УДК 519.21+62

І.В. САМОЙЛЕНКО, А.В. НІКІТІН, Б.В. ДОВГАЙ

АСИМПТОТИЧНА ДИСИПАТИВНІСТЬ ДЛЯ УКРУПНЕНИХ СТОХАСТИЧНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ СИСТЕМ З МАРКОВСЬКИМИ ПЕРЕМИКАННЯМИ ТА ІМПУЛЬСНИМИ ЗБУРЕННЯМИ В УМОВАХ АПРОКСИМАЦІЇ ЛЕВІ

Анотація. Для укрупненої системи стохастичних диференціальних рівнянь з марковськими перемиканнями та імпульсним збуренням у схемі апроксимації Леві встановлено умови асимптотичної дисипативності. Зокрема, досліджено питання, як поведінка граничного процесу залежить від дограничного нормування стохастичної еволюційної системи в ергодичному марковському середовищі в умовах апроксимації Леві.

Ключові слова: випадкова еволюція, апроксимація Леві, асимптотична дисипативність.

ВСТУП

Дисипативність як властивість детермінованих систем та систем з випадковими збуреннями широко висвітлюється в літературі, зокрема у роботах [1–4]. Дисипативність — поняття, запозичене з фізики; у фізичному сенсі дисипативний стан — це стійкий стан, який виникає у середовищі за умови розсіювання енергії, яка надходить іззовні. Дисипативність тісно пов'язана зі стійкістю за Ляпуновим. Це дає змогу застосовувати до дослідження дисипативності ті ж методи, що і для дослідження стійкості, зокрема за допомогою функцій Ляпунова.

Ця стаття продовжує напрямок досліджень, проведених у роботах [2, 4–6], де вивчались асимптотичні властивості еволюційних моделей за умов некласичних схем апроксимації. Зокрема, у роботі [6] описано схему подвійного укрупнення для стохастичних диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням. Укрупнення фазового простору станів еволюційної системи відбулося у два етапи. На першому етапі укрупнено кожну підмножину станів, де марковський процес перебуває протягом великого інтервалу часу, за відповідною стаціонарною мірою, і, таким чином, їх зведено до рівня одного стану. Другий етап — це усереднення за стаціонарною мірою рідкісних стрибків між отриманими укрупненими підмножинами марковського процесу. Аналіз укрупненої системи значно спрощується, але водночас у разі вдалого розщеплення фазового простору основні характеристики спрощеної системи можуть досить точно відображати відповідні характеристики початкової системи.

У свою чергу, близькість реальної і укрупненої систем означає також близькість глобальних характеристик, які визначають на зростаючих інтервалах часу. Ми дослідимо умови асимптотичної дисипативності для укрупненої системи в сенсі, описаному вище, коли збурення системи визначають імпульсним процесом у схемі апроксимації Леві.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Стохастичну еволюційну систему в ергодичному марковському середовищі задано стохастичним диференціальним рівнянням [5]

$$du^{\varepsilon}(t) = C(u^{\varepsilon}(t), x(t/\varepsilon^3))dt + d\eta^{\varepsilon}(t), \quad u^{\varepsilon}(t) \in \mathrm{R}, \tag{1}$$

де марковський процес $x(t/\varepsilon^3)$, $t \ge 0$, визначають на стандартному фазовому просторі (E, ε) з розщепленням

$$\boldsymbol{E} = \bigcup_{k=1}^{N} E_k, \ E_k \cap E_{k'} = \varnothing, \ k \ne k',$$

у схемі серій з малим параметром серії $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon > 0$.

Марковське ядро має вигляд

$$Q^{\varepsilon}(x, B, t) = P^{\varepsilon}(x, B)[1 - \exp\{-q(x)t\}], \ x \in E, \ B \in \varepsilon, \ t \ge 0.$$

Нехай при цьому виконуються такі умови.

МЕ1. Ядро, що описує перехідні ймовірності вкладеного ланцюга Маркова $x_n^{\varepsilon}, n \ge 0$, має таке представлення:

$$P^{\varepsilon}(x, B) = P(x, B) + \varepsilon P_1(x, B).$$

Стохастичне ядро $P(x, B)$ на розщепленому фазовому просторі визначають так:

$$P(x, E_k) = \mathbf{1}_k(x) = \begin{cases} 1, \ x \in E_k, \\ 0, \ \ x \notin E_k. \end{cases}$$

Стохастичне ядро $P(x, B)$ визначає супроводжувальний ланцюг Маркова x_n, $n \ge 0$, на класах $E_k, 1 \le k \le N$. До того ж збурювальне ядро $P_1(x, B)$ задовольняє умову

$$P_1(x, E) = 0,$$

що є прямим наслідком рівності $P^{\varepsilon}(x, E) = P(x, E) = 1$.

МЕ2. Асоційований марковський процес $x^0(t), t \ge 0$, заданий генератором

$$\mathbf{Q}\varphi(x) = q(x)\int_E P(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)],$$

є рівномірно ергодичним на кожному з класів $E_k, 1 \le k \le N$, зі стаціонарними розподілами $\pi_k(dx), 1 \le k \le N$, які задовольняють співвідношення

$$\pi_k(dx)q(x) = q_k\rho_k(dx), \ q_k := \int_{E_k} \pi_k(dx)q(x),$$

де $\rho(dx)$ — стаціонарний розподіл вкладеного ланцюга Маркова.

МЕ3. Усереднені ймовірності виходу мають вигляд

$$\hat{p}_k := q(x)\int_{E_k} \rho_k(dx)P_1(x, E \setminus E_k) > 0, \ 1 \le k \le N.$$

Таким чином, збурювальне ядро $P_1(x, B)$ визначає перехідні ймовірності між класами $E_k, 1 \le k \le N$. Отже, рівність $P^{\varepsilon}(x, B) = P(x, B) + \varepsilon P_1(x, B)$ означає, що вкладений ланцюг Маркова $x_n^{\varepsilon}, n \ge 0$, перебуває протягом тривалого проміжку часу у кожному класі E_k та перестрибує між класами з малими ймовірностями $\varepsilon P_1(x, E \setminus E_k)$.

За умов **МЕ1–МЕ3** має місце слабка збіжність [7]:

$$\upsilon(x^{\varepsilon}(t)) \Rightarrow \hat{x}(t), \ \varepsilon \to 0, \ \upsilon(x) = k \in \hat{E} = \{1, \ldots, N\}, \ x \in E_k, 1 \le k \le N.$$

Граничний марковський процес $\hat{x}(t), t \ge 0$, на укрупненому фазовому просторі $\hat{E} = \{1, \ldots, N\}$ визначено генерувальною матрицею

$$\hat{Q}_1 = (\hat{q}_{kr}, 1 \le k, r \le N),$$

де

$$\hat{q}_{kr} = \hat{q}_k \hat{p}_{kr}, \ k \neq r, \ \hat{q}_k = q_k \hat{p}_k, \ 1 \leq k \leq N,$$

$$\hat{p}_{kr} = p_{kr} / \hat{p}_k, \ p_{kr} = \int_{E_k} \rho_k(dx) P_1(x, E_r), 1 \leq k, r \leq N, k \neq r,$$

$$\hat{p}_k = -\int_{E_k} \rho_k(dx) P_1(x, E_k).$$

МЕ4. Укрупнений марковський процес $\hat{x}(t), t \geq 0$, є ергодичним зі стаціонарним розподілом $\hat{\pi} = (\pi_k, k \in \hat{E})$.

Отже, оператор Q^ε можна подати у вигляді

$$Q^\varepsilon = \mathbf{Q} + \varepsilon Q_1, \ Q_1(x) = q(x) \int_E P_1(x, dy) \varphi(y),$$

$$\mathbf{Q}(x) = q(x) \int_E P(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)].$$

Нехай Π — проектор на нуль-підпростір зведено-оборотного оператора $\mathbf{Q}$. Його дія на тест-функції визначена так:

$$\Pi\varphi(x) = \sum_{k=1}^{N} \hat{\varphi}_k \mathbf{1}_k(x), \ \hat{\varphi}_k := \int_{E_k} \pi_k(dx) \varphi(dx).$$

Зведений оператор $\hat{Q}_1$ визначимо за допомогою співвідношення

$$\hat{Q}_1 \Pi = \Pi Q_1 \Pi.$$

Нехай $\hat{\Pi}$ — проектор на нуль-підпростір зведено-оборотного оператора $\hat{Q}_1$:

$$\hat{\Pi}\hat{\varphi} := q(x) \sum_{k \in \hat{E}} \hat{\pi}_k \hat{\varphi}_k.$$

Потенціальна матриця $\hat{R}_0 = [\hat{R}_{kl}^0, 1 \leq k, \ l \leq N]$ визначена співвідношеннями

$$\hat{Q}_1 \hat{R}_0 = \hat{R}_0 \hat{Q}_1 = \hat{\Pi} - I.$$

ІМПУЛЬСНИЙ ПРОЦЕС ЗБУРЕНЬ У СХЕМІ АПРОКСИМАЦІЇ ЛЕВІ

Імпульсний процес збурень $\eta^\varepsilon(t), t \geq 0$, у схемі апроксимації Леві задають співвідношення

$$\eta^\varepsilon(t) = \int_0^t \eta^\varepsilon(ds, x^\varepsilon(s/\varepsilon^3)), \tag{2}$$

де сукупність процесів з незалежними приростами $\eta^\varepsilon(t, x), t \geq 0, x \in X$, визначають генератори

$$\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-2} \int_R (\varphi(w + v) - \varphi(w)) \Gamma^\varepsilon(dv, x), x \in X, \tag{3}$$

та задовольняє такі умови апроксимації Леві (детальніше див. [7, 8]).

L1. Апроксимація середніх:

$$\int_R v \Gamma^\varepsilon(dv, x) = \varepsilon a_1(x) + \varepsilon^2 (a_2(x) + \theta_a(x)), \ \theta_a(x) \to 0, \varepsilon \to 0,$$

та

$$\int_R v^2 \Gamma^\varepsilon(dv, x) = \varepsilon^2 (b(x) + \theta_b(x)), \ \theta_b(x) \to 0, \varepsilon \to 0.$$

L2. Умова на функцію розподілу:

$$\int_R g(v)\Gamma^{\varepsilon}(dv, x) = \varepsilon^2 (\Gamma_g(x) + \theta_g(x)), \ \theta_g(x) \to 0, \varepsilon \to 0,$$

для всіх $g(v) \in C_3(R)$. Тут міра $\Gamma_g(x)$ обмежена для всіх $g(v) \in C_3(R)$ та визначена співвідношенням

$$\Gamma_g(x) = \int_R g(v)\Gamma_0(dv, x), \ g(v) \in C_3(R).$$

L3. Рівномірна квадратична інтегровність:

$$\lim_{c \to \infty} \int_{|v|>c} v^2 \Gamma_0(dv, x) = 0.$$

Введемо позначення: $\Gamma_1(x)\varphi(w) = a(x)\varphi'(w)$.

Нехай виконана умова балансу

$$\Pi\Gamma_1 = 0, \tag{4}$$

де $\Gamma_1\varphi(w) = \Pi\Gamma_1(x)\varphi(w)$.

АНАЛІЗ АСИМПТОТИЧНО ДИСИПАТИВНОЇ УКРУПНЕНОЇ СИСТЕМИ

Перед тим як сформулювати та довести теорему — основний результат цієї роботи, наведемо означення дисипативної та асимптотично дисипативної систем.

Означення 1 [1]. Система (1) у разі виконання початкової умови $u(t_0) = u_0(\omega)$ названа дисипативною, якщо випадкові величини $|u(t, \omega)|$ обмежені за ймовірністю рівномірно відносно $t \geq t_0$ та рівномірно відносно $u_0(\omega)$ за умови $\mathbf{P}\{|u_0(\omega)| < k\} = 1$ для деякого $k < \infty$.

Означення 2. Система (1) названа асимптотично дисипативною, якщо $u^{\varepsilon}(t)$ слабко збігається до $u(t)$, і гранична еволюція, яка визначена рівнянням (4), буде дисипативною у сенсі означення 1.

Теорема 1. Нехай існує функція Ляпунова $V(u) \in C^3(R^d)$ системи

$$\frac{du}{dt} = \alpha(u), \tag{5}$$

де $\alpha(u) = \hat{\hat{C}}(u) + \hat{\hat{a}}$, що задовольняє такі умови:

$C1$: $|\hat{\hat{\Gamma}}_u^1(x) R_0 \mathbf{L} V(u)| < M_1 V(u), \quad M_1 > 0$;

$C2$: $|\hat{\hat{\Gamma}}_u^1(x) R_0 \hat{\hat{\Gamma}}_u^1(x) V(u)| < M_2 V(u), \quad M_2 > 0$;

$C3$: $|\hat{\hat{\Gamma}}_u^1(x) R_0 \hat{\hat{\mathbf{C}}}(x) V(u)| < M_3 V(u), \quad M_3 > 0$;

$C4$: $|\hat{\hat{\mathbf{C}}}(x) R_0 \mathbf{L} V(u)| < M_4 V(u), \quad M_4 > 0$;

$C5$: $|\hat{\hat{\mathbf{C}}}(x) R_0 \hat{\hat{\Gamma}}_u^1(x) V(u)| < M_5 V(u), \quad M_5 > 0$;

$C6$: $|\hat{\hat{\mathbf{C}}}(x) R_0 \hat{\hat{\mathbf{C}}}(x) V(u)| < M_6 V(u), \quad M_6 > 0$.

Крім того нехай виконано нерівності

$$\alpha(u) V'(u) < -c_1 V(u), \tag{6}$$

$$\sup_{u \in R^d} \|\hat{\hat{\sigma}}(u)\| < c_2(x), \tag{7}$$

$$\left| \int_R v^2 \hat{\hat{\Gamma}}_0(dv, x) \right| < c_3(x), \tag{8}$$

де $c_1 > 0, c_2 > 0, \widetilde{c}_3 = \int_X \pi(dx)\, c_3(x) > 0$. Тоді система (1) буде асимптотично дисипативною.

В попередніх співвідношеннях беруть участь величини

$$\mathbf{L}\varphi(u, w) = \hat{\hat{C}}(u)\,\varphi'_u(u, \cdot) + \hat{\hat{\Gamma}}{}_1^u \varphi(u, \cdot) + \hat{\hat{\Gamma}}{}_1^w \hat{R}_0 \hat{\hat{\Gamma}}{}_1^w \varphi(\cdot, w) + \hat{\hat{\Gamma}}{}_2^w \varphi(\cdot, w),$$

$$\hat{\hat{C}}(u) = \Pi\mathbf{C}(x) = \int_X \pi(dx)\, C(u, x),$$

$$\hat{\hat{\Gamma}}_0(v) = \sum_{k \in \hat{E}} \hat{\pi}_k \int_{\hat{E}_k} \pi(dx) \Gamma_0(v, x),$$

$$\hat{\hat{\Gamma}}{}_1^u(x)\varphi(u, w) = \hat{\hat{a}}_1(x)\varphi'_u(u, w), \quad \hat{\hat{\Gamma}}{}_1^w(x)\varphi(u, w) = \hat{\hat{a}}_1(x)\varphi'_w(u, w),$$

$$\hat{\hat{\Gamma}}{}_2^u(x)\varphi(u, w) = (\hat{\hat{a}}_2(x) - \hat{\hat{a}}_0(x))\varphi'_u(u, w) + \frac{1}{2}(\hat{\hat{b}}(x) - \hat{\hat{b}}_0(x))\varphi''_{uu}(u, w) +$$

$$+ \int_R [\varphi(u, w + v) - \varphi(u, v)]\, \hat{\hat{\Gamma}}_0(dv, x),$$

$$\hat{\hat{a}}_2 = \sum_{k \in \hat{E}} \hat{\pi}_k \int_{E_k} \pi_k(dx)(a_2(x) - a_0(x)), \quad \hat{\hat{b}}(x) = \sum_{k \in \hat{E}} \hat{\pi}_k \int_{E_k} \pi_k(dx) b(x),$$

$$\hat{\hat{a}}_1(x) = \sum_{k \in \hat{E}} \hat{\pi}_k \int_{E_k} \pi_k(dx) a_1(x),$$

$$\hat{\hat{a}}_0(x) = \sum_{k \in \hat{E}} \hat{\pi}_k \int_{\hat{E}_k} v \Gamma_0(dv, x), \quad \hat{\hat{b}}_0(x) = \sum_{k \in \hat{E}} \hat{\pi}_k \int_{\hat{E}_k} v^2 \Gamma_0(dv, x),$$

$$\hat{\hat{\sigma}}{}^2 = \sum_{k \in \hat{E}} \hat{\pi}_k \int_{\hat{E}_k} \pi(dx)(b(x) - b_0(x)) + 2 \sum_{k \in \hat{E}} \hat{\pi}_k \int_{\hat{E}_k} \pi(dx) a_1(x) R_0 a_1(x).$$

ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМИ 1

Розглянемо низку допоміжних стверджень.

Лема 1. Генератор трикомпонентного марковського процесу $u^\varepsilon(t)$, $x(t/\varepsilon^2)$, $\eta^\varepsilon(t, x)$, $t \ge 0$, має вигляд

$$\mathbf{L}^\varepsilon(x)\varphi(u, w, x) = \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(u, w, x) + \Gamma_w^\varepsilon(x)\varphi(u, w, x) +$$

$$+ \mathbf{C}(x)\varphi(u, w, x) + \Gamma_u^\varepsilon(x)\varphi(u, w, x), \tag{9}$$

де $\Gamma_w^\varepsilon(x)$ — генератор сукупності процесів з незалежними приростами (3), який діє за змінною w, а $\Gamma_u^\varepsilon(x)$ — еквівалентний попередньому генератор сукупності процесів з незалежними приростами (3), який діє за змінною u.

Доведення. Генератор марковського процесу на збуреній тест-функції визначено з співвідношення

$$\mathbf{L}^\varepsilon(x)\varphi(u, w, x) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} E[\varphi(u_{t+\Delta}^\varepsilon, w_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon) -$$

$$- \varphi(u, w, x) \mid u^\varepsilon(t) = u, \quad \eta^\varepsilon(t) = w, \quad x(t/\varepsilon^2) = x].$$

Додамо та віднімемо в умовному математичному сподіванні $\varphi(u, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})$. Отримаємо

$$E[\varphi(u^{\varepsilon}_{t+\Delta}, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})-\varphi(u, w, x)| u^{\varepsilon}(t)=u, \quad \eta^{\varepsilon}(t)=w, \quad x(t/\varepsilon^2)=x]=$$

$$=E[\varphi(u^{\varepsilon}_{t+\Delta}, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})-\varphi(u, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})]-$$

$$-E[\varphi(u, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})-\varphi(u, w, x)].$$

Розклад $u^{\varepsilon}_{t+\Delta}$ має вигляд

$$u^{\varepsilon}_{t+\Delta}=u+C(u, x)\Delta+\Delta w+o(\Delta).$$

Здобутий вираз підставимо у перший доданок умовного математичного сподівання

$$E[\varphi(u^{\varepsilon}_{t+\Delta}, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})-\varphi(u, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})]=$$

$$=E[\varphi(u+C(u, x)\Delta+\Delta w+o(\Delta), w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})-\varphi(u, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})]=$$

$$=E[\varphi(z+\Delta w, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})-\varphi(u, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})],$$

де

$$z=u+C(u, x)\Delta+o(\Delta).$$

Додамо та віднімемо $\varphi(z, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})$ у здобутому виразі

$$E[\varphi(u^{\varepsilon}_{t+\Delta}, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})-\varphi(u, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})]=$$

$$=E[\varphi(z+\Delta w, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})-\varphi(z, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})]+$$

$$+E[\varphi(z, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})-\varphi(u, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})].$$

Оскільки генератор $\Gamma^{\varepsilon}_{u}(x)$ має представлення

$$\Gamma^{\varepsilon}_{u}(x)\varphi(u, w, x)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}(E[\varphi(u+\Delta u, w, x)-\varphi(u, w, x)]),$$

то для границі першого доданку отримуємо

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(z+\Delta w, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})-\varphi(z, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})]=\Gamma^{\varepsilon}_{u}(x)\varphi(u, w, x).$$

Розкладемо $\varphi(z, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})$ за формулою Тейлора

$$\varphi(u+C(u, x)\Delta+o(\Delta), w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})=$$

$$=\varphi(u, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})+\varphi'(u, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})(C(u, x)\Delta+o(\Delta))+o(\Delta).$$

Підставимо у вираз $E[\varphi(z, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})-\varphi(u, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})]$ здобутий розклад і отримуємо

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(z, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})-\varphi(u, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})]=$$

$$= \lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta} E[\varphi(u + C(u,x)\Delta + o(\Delta), w^\varepsilon_{t+\Delta}, x^\varepsilon_{t+\Delta}) - \varphi(u, w^\varepsilon_{t+\Delta}, x^\varepsilon_{t+\Delta})] =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta} E[\varphi(u, w^\varepsilon_{t+\Delta}, x^\varepsilon_{t+\Delta}) + \varphi'(u, w^\varepsilon_{t+\Delta}, x^\varepsilon_{t+\Delta})(C(u,x)\Delta + o(\Delta)) +$$

$$+ o(\Delta) - \varphi(u, w^\varepsilon_{t+\Delta}, x^\varepsilon_{t+\Delta})] =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta} E[\varphi'(u, w^\varepsilon_{t+\Delta}, x^\varepsilon_{t+\Delta})(C(u,x)\Delta + o(\Delta)) + o(\Delta)] =$$

$$= C(u,x)\varphi'(u,w,x).$$

Так само зі співвідношення для генератора $\Gamma^\varepsilon_w(x)$ та очевидної рівності для генератора марковського процесу $\lim\limits_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta} E[\varphi(w, x^\varepsilon_{t+\Delta}) - \varphi(w,x)] = \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(w,x)$ отримуємо

$$\lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta} E[\varphi(u, w^\varepsilon_{t+\Delta}, x^\varepsilon_{t+\Delta}) - \varphi(u,w,x)] =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta} E[\varphi(u, w^\varepsilon_{t+\Delta}, x^\varepsilon_{t+\Delta}) - \varphi(u, w, x^\varepsilon_{t+\Delta}) + \varphi(u, w, x^\varepsilon_{t+\Delta}) - \varphi(u,w,x)] =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta} E[\varphi(u, w^\varepsilon_{t+\Delta}, x^\varepsilon_{t+\Delta}) - \varphi(u, w, x^\varepsilon_{t+\Delta})] +$$

$$+ \lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta} E[\varphi(u, w, x^\varepsilon_{t+\Delta}) - \varphi(u,w,x)] =$$

$$= \Gamma^\varepsilon_w(x)\varphi(u,w,x) + \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(u,w,x).$$

Звідси $\mathbf{L}^\varepsilon(x)$ має вигляд (9).

Лема 2. Генератор (9) допускає асимптотичний розклад

$$\mathbf{L}^\varepsilon(x)\varphi(u,w,x) = \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(u,w,x) +$$

$$+ \hat{\hat{\Gamma}}{}^1_u(x)\varphi(u,w,x) + \mathbf{C}(u)\varphi(u,w,x) + \hat{\hat{\Gamma}}{}^1_w(x)\varphi(u,w,x) + \gamma^\varepsilon(x)\varphi(w,x),$$

де

$$\mathbf{C}(u)\varphi(u) = C(u,x)\varphi'(u),$$

а залишковий член $\|\gamma^\varepsilon(x)\varphi(u,w,x)\|$ прямує до нуля для $\varepsilon \to 0$, $\varphi(u,w,\cdot) \in C^3(R)$.

Зрізаним генератором будемо називати конструкцію

$$\mathbf{L}^\varepsilon_0(x)\varphi(u,w,x) =$$
$$= \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(u,w,x) + \hat{\hat{\Gamma}}{}^1_u(x)\varphi(u,w,x) + \hat{\hat{\mathbf{C}}}(u)\varphi(u,w,x) + \hat{\hat{\Gamma}}{}^1_w(x)\varphi(u,w,x). \tag{10}$$

Лема 3. Розв'язування проблеми сингулярного збурення для оператора $\mathbf{L}^\varepsilon_0(x)$ на збуреній тест-функції

$$\varphi^\varepsilon(u,w,x) = \varphi(u,w) + \varepsilon\varphi_1(u,w,x) \tag{11}$$

визначено рівністю

$$\mathbf{L}^\varepsilon_0(x)\varphi^\varepsilon(u,w,x) = \mathbf{L}\varphi(u,w) + \varepsilon\theta^\varepsilon(x)\varphi(u,w),$$

де

$$\theta^\varepsilon(x) = \hat{\hat{\Gamma}}{}^1_u(x)R_0\mathbf{L} - \hat{\hat{\Gamma}}{}^1_u(x)R_0\hat{\hat{\Gamma}}{}^1_u(x) - \hat{\hat{\Gamma}}{}^1_u(x)R_0\hat{\hat{\mathbf{C}}}(x) - \hat{\hat{\Gamma}}{}^1_u(x)R_0\hat{\hat{\Gamma}}{}^1_w(x) +$$

$$+\hat{\hat{\mathbf{C}}}(x)R_0\overset{\frown}{\mathbf{L}}-\hat{\hat{\mathbf{C}}}(x)R_0\hat{\hat{\Gamma}}{}_u^1(x)-\hat{\hat{\mathbf{C}}}(x)R_0\hat{\hat{\mathbf{C}}}(x)-\hat{\hat{\mathbf{C}}}(x)R_0\hat{\hat{\Gamma}}{}_w^1(x)+ \qquad (12)$$

$$+\hat{\hat{\Gamma}}{}_w^1(x)R_0\mathbf{L}-\hat{\hat{\Gamma}}{}_w^1(x)R_0\hat{\hat{\Gamma}}{}_u^1(x)-\hat{\hat{\Gamma}}{}_w^1(x)R_0\hat{\hat{\mathbf{C}}}(x)-\hat{\hat{\Gamma}}{}_w^1(x)R_0\hat{\hat{\Gamma}}{}_w^1(x)\,.$$

Доведення. Підставимо (11) в (10) і отримуємо

$$\mathbf{L}_0^{\varepsilon}(x)\varphi^{\varepsilon}(u,w,x)=\varepsilon^{-1}\mathbf{Q}[\varphi(u,w)+\varepsilon\varphi_1(u,w,x)]+\hat{\hat{\Gamma}}{}_u^1(x)[\varphi(u,w)+\varepsilon\varphi_1(u,w,x)]+$$

$$+\hat{\hat{\mathbf{C}}}(x)[\varphi(u,w)+\varepsilon\varphi_1(u,w,x)]+\hat{\hat{\Gamma}}{}_w^1(x)[\varphi(u,w)+\varepsilon\varphi_1(u,w,x)]=$$

$$=\varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(u,w)+[\mathbf{Q}\varphi_1(u,w,x)+\hat{\hat{\Gamma}}{}_u^1(x)\varphi(u,w)+\hat{\hat{\mathbf{C}}}(x)\varphi(u,w)+\hat{\hat{\Gamma}}{}_w^1(x)\varphi(u,w)]+$$

$$+\varepsilon[\hat{\hat{\Gamma}}{}_u^1(x)\varphi_1(u,w,x)+\hat{\hat{\mathbf{C}}}(x)\varphi_1(u,w,x)+\hat{\hat{\Gamma}}{}_w^1(x)\varphi_1(u,w,x)]\,.$$

Для існування граничного оператора $\mathbf{L}\varphi(u,w)$ для $\varepsilon\to 0$ потрібно, щоб задовольнялася умова

$$\mathbf{Q}\varphi(u,w)=0\,,$$

тобто функція повинна належати нуль-підпростору оператора $\mathbf{Q}$. Тоді

$$\mathbf{L}\varphi(u,w)=\mathbf{Q}\varphi_1(u,w,x)+\hat{\hat{\Gamma}}{}_u^1(x)\varphi(u,w)+\hat{\hat{\mathbf{C}}}(x)\varphi(u,w)+\hat{\hat{\Gamma}}{}_w^1(x)\varphi(u,w)\,,$$

звідки

$$\mathbf{Q}\varphi_1(u,w,x)=[\mathbf{L}-\hat{\hat{\Gamma}}{}_u^1(x)-\hat{\hat{\mathbf{C}}}(x)-\hat{\hat{\Gamma}}{}_w^1(x)]\ \varphi(u,w)\,.$$

З умови розв'язування для останнього рівняння отримуємо

$$\Pi\mathbf{Q}\Pi\varphi_1(u,w,x)=0=\Pi[\mathbf{L}-\hat{\hat{\Gamma}}{}_u^1(x)-\hat{\hat{\mathbf{C}}}(x)-\hat{\hat{\Gamma}}{}_w^1(x)]\Pi\varphi(u,w)\,.$$

Отже,

$$\mathbf{L}\varphi(u,w)=\Pi\hat{\hat{\Gamma}}{}_u^1(x)\varphi(u,w)+\Pi\hat{\hat{\mathbf{C}}}(x)\varphi(u,w)+\Pi\hat{\hat{\Gamma}}{}_w^1(x)\varphi(u,w)\,,$$

а $\varphi_1(u,w,x)=R_0[\mathbf{L}-\hat{\hat{\Gamma}}{}_u^1(x)-\hat{\hat{\mathbf{C}}}(x)-\hat{\hat{\Gamma}}{}_w^1(x)]\varphi(u,w)$.

Звідси отримуємо розклад для останнього доданку

$$\varepsilon[\hat{\hat{\Gamma}}{}_u^1(x)\varphi_1(u,w,x)+\hat{\hat{\mathbf{C}}}(x)\varphi_1(u,w,x)+\hat{\hat{\Gamma}}{}_w^1(x)\varphi_1(u,w,x)]=$$

$$=\varepsilon[\hat{\hat{\Gamma}}{}_u^1(x)R_0[\mathbf{L}-\hat{\hat{\Gamma}}{}_u^1(x)-\hat{\hat{\mathbf{C}}}(x)-\hat{\hat{\Gamma}}{}_w^1(x)]+\hat{\hat{\mathbf{C}}}(x)R_0[\mathbf{L}-\hat{\hat{\Gamma}}{}_u^1(x)-\hat{\hat{\mathbf{C}}}(x)-\hat{\hat{\Gamma}}{}_w^1(x)]+$$

$$+\hat{\hat{\Gamma}}{}_w^1(x)R_0[\mathbf{L}-\hat{\hat{\Gamma}}{}_u^1(x)-\hat{\hat{\mathbf{C}}}(x)-\hat{\hat{\Gamma}}{}_w^1(x)]]\varphi(u,w)\,.$$

Завершимо доведення теореми 1. Оскільки виконано умови $C1$–$C6$ з теореми 1, справедливою буде обмеженість залишкового члена (12)

$$\|\theta^{\varepsilon}(x)V(u)\|=$$

$$=|\hat{\hat{\Gamma}}{}_u^1(x)R_0\mathbf{L}V(u)-\hat{\hat{\Gamma}}{}_u^1(x)R_0\hat{\hat{\Gamma}}{}_u^1(x)V(u)-\hat{\hat{\Gamma}}{}_u^1(x)R_0\hat{\hat{\mathbf{C}}}(x)V(u)-\hat{\hat{\Gamma}}{}_u^1(x)R_0\hat{\hat{\Gamma}}{}_w^1(x)V(u)+$$

$$+\hat{\hat{\mathbf{C}}}(x)R_0\mathbf{L}V(u)-\hat{\hat{\mathbf{C}}}(x)R_0\hat{\hat{\Gamma}}{}_u^1(x)V(u)-\hat{\hat{\mathbf{C}}}(x)R_0\hat{\hat{\mathbf{C}}}(x)V(u)-\hat{\hat{\mathbf{C}}}(x)R_0\hat{\hat{\Gamma}}{}_w^1(x)V(u)+$$

$$+\hat{\hat{\Gamma}}{}_w^1(x)R_0\mathbf{L}V(u)-\hat{\hat{\Gamma}}{}_w^1(x)R_0\hat{\hat{\Gamma}}{}_u^1(x)V(u)-\hat{\hat{\Gamma}}{}_w^1(x)R_0\hat{\hat{\mathbf{C}}}(x)V(u)-\hat{\hat{\Gamma}}{}_w^1(x)R_0\hat{\hat{\Gamma}}{}_w^1(x)V(u)|\le$$

$$\le M_1V(u)+M_2(x)V(u)+M_3V(u)+M_4V(u)+M_5(x)V(u)+M_6V(u)\,,$$

звідки

$$\| \theta^{\varepsilon}(x) V(u) \| \le M V(u) , \qquad (13)$$

де $M = \sum_{k=1}^{6} M_k$.

З твердження леми 2, виразу (13) та виконання умов модельної теореми з роботи [7] маємо слабку збіжність

$$(u^{\varepsilon}(t), \eta^{\varepsilon}(t)) \Rightarrow (u(t), \eta(t)), \quad \varepsilon \to 0 .$$

Нехай далі $\frac{d^{(1)} V(u)}{du}$ — похідна функції Ляпунова, обчислена вздовж траєкторії системи (5). Оскільки функція Ляпунова повинна задовольняти умові Ліпшиця

$$| V(u_2) - V(u_1) | < K | u_2 - u_1 | ,$$

де K є сталою величиною, то

$$\frac{d^{(1)} V(u)}{du} \le \frac{dV(u)}{du} + K [\| \hat{\sigma}(u) \| \, | dw(t) | + \int_R v^2 \hat{\hat{\Gamma}}_0 (dv) \, | dt |] .$$

Тут $\frac{dV(u)}{du}$ — похідна функції Ляпунова, обчислена вздовж траєкторії детермінованої системи (5),

$$\hat{\hat{\Gamma}}_0 (v) = \sum_{k \in \hat{E}} \hat{\pi}_k \int_{\hat{E}_k} \pi(dx) \Gamma_0 (v, x) .$$

Згідно умов (6)–(8) теореми 1 отримуємо

$$\frac{d^{(1)} V(u)}{du} \le -c_1 V(u) + K [c_2 | dw(t) | + C | dt |] .$$

Отже, на підставі леми 1.7 з [9] маємо

$$V(u) \le V(u_0) \exp\{-c_1 t\} + K c_2 \int_0^t \exp\{-c_1 (t-s)\} d | w(s) | \, ds + K \hat{c}_3 | dt | .$$

Звідси та на підставі леми 1.9 з [9] випливає

$$P\{ | u(t) | > R \} \le \frac{V(u)}{\inf_{u \in R^d} V(u)} , \; R \to \infty.$$

Отже, система (1) є дисипативною; більш того, з виконання умов модельної граничної теореми з роботи [7] та дисипативності граничної еволюції випливає, що система (1) є асимптотично дисипативною.

ВИСНОВКИ

Отримані результати дають змогу визначати асимптотичні характеристики укрупнених еволюційних систем, які аналізувати істотно простіше, ніж початкові системи у вигляді стохастичних диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням з умов апроксимації Леві та марковськими перемиканнями.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Хасьминский Р.З. О диссипативности случайных процессов, определяемых дифференциальными уравнениями. *Проблемы передачи информации*. 1965. Т. 1. Вып 1. С. 88–104.
2. Nikitin A.V. Asymptotic dissipativity of stochastic processes with impulsive perturbation in the Lévy approximation scheme. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2018. Vol. 50, N 4. P. 54–63.
3. Семенюк С.А., Чабанюк Я.М. Стохастичні еволюційні системи з імпульсними збуреннями. *Вісник Національного університету «Львівська політехніка. Фізико-математичні науки»*. 2009. Вип. 660. С. 56–60.
4. Samoilenko I.V., Chabanyuk Y.M., Nikitin A.V., Chimka U.T. Differential equations with small stochastic additions under Poisson approximation conditions. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. Vol. 53, N 3. P. 93–99.
5. Samoilenko I.V., Nikitin A.V. Differential equations with small stochastic terms under the Lévy approximating conditions. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2018. Vol. 69, N 9. P. 1445–1454.
6. Samoilenko I.V., Nikitin A.V. Double merging of the phase space for stochastic differential equations with small additions in Poisson approximation conditions. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2019. Vol. 55, N 2. P. 265–273.
7. Koroliuk V.S., Limnios N. Stochastic systems in merging phase space. *World Scientific.* Singapore, 2005. 330 p.
8. Koroliuk V.S., Limnios N., Samoilenko I.V. Lévy and Poisson approximations of switched stochastic systems by a semimartingale approach. *Comptes Rendus Mathématique*. 2016. Vol. 354. P. 723–728.
9. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. Москва: Наука, 1969. 368 с.

Надійшла до редакції 06.03.2019

И.В. Самойленко, А.В. Никитин, Б.В. Довгай

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ДИССИПАТИВНОСТЬ ДЛЯ УКРУПНЕННЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ СИСТЕМ С МАРКОВСКИМИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ И ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ В УСЛОВИЯХ АППРОКСИМАЦИИ ЛЕВИ

Аннотация. Для укрупненной системы стохастических дифференциальных уравнений с марковскими переключениями и импульсным возмущением в схеме аппроксимации Леви получены условия асимптотической диссипативности. В частности, изучен вопрос о том, как поведение предельного процесса зависит от допредельной нормировки стохастической эволюционной системы в эргодической марковской среде в условиях аппроксимации Леви.

Ключевые слова: случайная эволюция, аппроксимация Леви, асимптотическая диссипативность.

I.V. Samoilenko, A.V. Nikitin, B.V. Dovhai

ASYMPTOTIC DISSIPATIVITY FOR MERGED STOCHASTIC EVOLUTIONARY SYSTEMS WITH MARKOV SWITCHINGS AND IMPULSE PERTURBATIONS UNDER CONDITIONS OF LEVY APROXIMATIONS

Abstract. Conditions for asymptotic dissipativity are established for the merged system of stochastic differential equations with Markov switchings and impulse perturbations under conditions of Levi approximation. In particular, it is analyzed how the behavior of the boundary process depends on the pre-limiting normalization of a stochastic evolution system in the ergodic Markovian environment under the conditions of Levi approximation.

Keywords: random evolution, Levi approximation, asymptotic dissipativity.

Самойленко Ігор Валерійович,
доктор фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри Київського національного університету імені Тараса Шевченка, e-mail: isamoil@i.ua.

Нікітін Анатолій Володимирович,
доктор фіз.-мат. наук, доцент, старший науковий співробітник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, e-mail: nikitin2505@gmail.com.

Довгай Богдан Валерійович,
кандидат фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри Київського національного університету імені Тараса Шевченка, e-mail: bogdov@gmail.com.