

**БАГАТОЕТАПНИЙ ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ ПАКУВАННЯ НЕОПУКЛИХ БАГАТОГРАННИКІВ**

**Анотація.** Розглянуто задачу пакування неопуклих багатогранників у контейнер мінімального об'єму. Побудовано точну математичну модель задачі пакування неопуклих багатогранників, для яких можливі неперервні трансляції та повороти. Проаналізовано властивості математичної моделі, на основі яких розроблено багатоетапний підхід до розв'язання задачі, що дає змогу знайти оптимальний розв'язок, який в загальному випадку не є глобальним мінімумом, але є доведеним локальним мінімумом. Наведено чисельні приклади.

**Ключові слова:** пакування, неопуклі неорієнтовані багатогранники, Ф-функція, нелінійне програмування.

**ВСТУП**

Оптимізаційні задачі пакування 3D-об'єктів є частиною теорії дослідження операцій і мають широкий спектр практичних застосувань, наприклад для розв'язання сучасних проблем біології, мінералогії, медицини, матеріалознавства, нанотехнологій, робототехніки, в системах розпізнавання образів, 3D-друку.

Актуальність розв'язання таких задач полягає в тому, що вони дають змогу замінити повномасштабні дорогі експерименти комп'ютерним моделюванням реальних процесів і структур матеріалів. Це призводить до значної економії часу і фінансових ресурсів.

Наприклад, інноваційним застосуванням задач розміщення багатогранників є тривимірне моделювання мікроструктур різних матеріалів (у тому числі нано-матеріалів). Останні досягнення в цій галузі пов'язані з розробленням комп'ютерної технології 3D томографічного аналізу мінеральних частинок [1]. У роботі [2] описано застосування задачі пакування багатогранників у порошковій металургії. Такі ж задачі застосовують для ефективного розв'язання проблеми утилізації небезпечних відходів і автоматизації процесу пакування тиглів у виробництві напівпровідникових пластин.

Задачі пакування 3D-об'єктів є NP-складними, і, зазвичай, для розв'язання таких задач використовуються різні евристики. Відомі підходи до розв'язання тривимірних задач пакування можна класифікувати на такі групи:

- евристичні методи (евристики, що базуються на релаксації інформації про форму об'єктів [3]; генетичні алгоритми [4]; алгоритми, основані на ідеї імітаційного відпалу [5]; мурашині алгоритми [6]; алгоритми, що використовують розширений пошук за зразком [7]);
- традиційні методи лінійного та нелінійного програмування [8];
- комбіновані підходи, які використовують евристики і методи математичного програмування [9].

У більшості робіт, присвячених розміщенню тривимірних тіл, унеможливлені їхні безперервні повороти. Так, наприклад, у роботі [10] застосовувалися тільки перетворення трансляції. У дослідженні [11] розглянуто ортогональні повороти об'єктів. У дослідженні [12] запропоновано алгоритм НАРЕ3D, який уможливорює повороти багатогранників навколо кожної координатної осі дискретно на кути, кратні  $45^\circ$ .

Оскільки найменш дослідженими є задачі пакування тривимірних тіл, які разом з неперервними трансляціями допускають і неперервні повороти, то виникає необхідність в розробленні методології математичного та комп'ютерного моделювання процесу оптимізації пакування таких тривимірних об'єктів.

#### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай задано множину неопуклих багатогранників  $P_i$ ,  $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ , і контейнер у вигляді кубоїда  $\Omega = \{X \in R^3, 0 \leq w_1 \leq x \leq w_2, 0 \leq l_1 \leq x \leq l_2, 0 \leq \eta_1 \leq x \leq \eta_2\}$ , де  $w_1, w_2, l_1, l_2, \eta_1$  та  $\eta_2$  є змінними, тобто вектор  $u_\Omega = (w_1, w_2, l_1, l_2, \eta_1, \eta_2)$  визначає розміри  $\Omega$ . Багатогранники  $P_i$  є об'єднанням опуклих багатогранників  $P_i = \bigcup_{k=1}^{\varepsilon_i} P_{ik}$ ,  $i \in I_n$ , а багатогранники  $P_{ik}$  визначаються вершинами  $p_{ikt} = (p_{ikt}^1, p_{ikt}^2, p_{ikt}^3)$ ,  $i \in I$ ,  $k \in K_i = \{1, 2, \dots, \varepsilon_i\}$ ,  $t \in T_{ik} = \{1, 2, \dots, \rho_{ik}\}$ . Розміщення багатогранника  $P_i$  в арифметичному евклідовому просторі  $R^3$  визначається вектором трансляції  $v_i = (x_i, y_i, z_i)$  і кутами повороту  $\theta_i = (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ ,  $i \in I$ . Отже, вектор  $u_i = (v_i, \theta_i) = (x_i, y_i, z_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$  визначає розміщення  $P_i$  у  $R^3$ . Звідси вектор  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in R^{6n}$  визначає місце розміщення  $P_i$ ,  $i \in I$ , в  $R^3$ ; отже, повний набір змінних задачі буде визначатись вектором  $X = (u, u_\Omega) = (u_1, u_2, \dots, u_n, u_\Omega) \in R^m$ , де  $m = 6n + 6$ . Надалі багатогранник  $P_i$ , трансляований на вектор  $v_i$  і повернутий на кути  $\alpha_i, \beta_i$  та  $\gamma_i$ , позначимо як  $P_i(u_i)$ , а контейнер  $\Omega$  зі змінними розмірами, що задаються вектором  $u_\Omega$ , позначимо як  $\Omega(u_\Omega)$ .

Нехай  $V_{i_r}$ ,  $r \in J_i = \{1, 2, \dots, \vartheta_i\}$ , є вершина опуклої оболонки  $P_i$ . Отже,  $V_{i_r}(u_i) = R_i^T V_{i_r} + v_i$ ,  $i \in I$ ,  $r \in J_i$ ,  $p_{ikt}(u_i) = R_i^T p_{ikt} + v_i$ ,  $i, j \in I$ ,  $k \in K_i$ ,  $t \in T_{ik}$ , де  $R_i$  — оператор повороту.

**Задача.** Знайти вектор  $u \in R^m$ , який забезпечує розміщення  $P_i(u_i)$ ,  $i \in I$ , без взаємних перетинів у контейнері  $\Omega(u_\Omega)$  таким чином, щоб об'єм  $H(u_\Omega)$  досягав мінімального значення.

#### МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

Математичну модель поставленої задачі, використовуючи метод Ф-функцій [13], можна записати у вигляді

$$H(u_\Omega^*) = \min_{X \in W} H(u_\Omega), \quad (1)$$

$$W = \{X \in R^m : \Phi_{ij}(u_i, u_j) \geq 0, i < j \in I, \Phi_i(u_i, u_\Omega) \geq 0, i \in I, F(u_\Omega) \geq 0\}, \quad (2)$$

де

$$H(u_\Omega) = (w_2 - w_1)(l_2 - l_1)(\eta_2 - \eta_1), F(u_\Omega) = \min \{w_2 - w_1, l_2 - l_1, \eta_2 - \eta_1\},$$

$$\Phi_i(u_i, u_\Omega) = \min \{\phi_{io}^r(u_i, u_\Omega), o \in O = \{1, 2, \dots, 6\}, r \in J_i\},$$

$$\phi_{i1}^r(u_i, u_\Omega) = V_{1ir}(u_i) - w_1, \phi_{i2}^r(u_i, u_\Omega) = w_2 - V_{1ir}(u_i), \phi_{i3}^r(u_i, u_\Omega) = V_{2ir}(u_i) - l_1,$$

$$\phi_{i4}^r(u_i, u_\Omega) = l_2 - V_{2ir}(u_i), \phi_{i5}^r(u_i, u_\Omega) = V_{3ir}(u_i) - \eta_1, \phi_{i6}^r(u_i, u_\Omega) = \eta_2 - V_{3ir}(u_i).$$

До того ж нерівність  $\Phi_{ij}(u_i, u_j) \geq 0$  забезпечує неперетинання  $P_i$  і  $P_j$ , а нерівність  $\Phi_i(u_i, u_\Omega) \geq 0$  забезпечує знаходження  $P_i$  у  $\Omega(u_\Omega)$ , тобто  $\Phi_i(u_i, u_\Omega) \in$  Ф-функцією  $P_i$  і  $B(u_\Omega) = R^3 \setminus \text{int } \Omega(u_\Omega)$ . Слід зазначити, що  $\Phi_{ij}(u_i, u_j) = \min \{\Phi_{ij}^{sp}(u_i, u_j), s \in K_i, p \in K_j\}$ , де  $\Phi_{ij}^{sp}(u_i, u_j)$  — Ф-функція для пари опуклих багатогранників [14].

Розглянемо деякі важливі особливості математичної моделі (1), (2), які впливають на розроблення методології розв'язання задачі.

1. Область  $W$  допустимих розв'язків задачі в загальному випадку є незв'язною множиною, і кожна її компонента зв'язності є багатозв'язною та має «яружний» характер.

2. Нерівність  $\Phi_i(X) \geq 0$  є системою з неперервно-диференційованих функцій.

3. Оскільки кожна функція  $\Phi_{ij}(X)$  являє собою систему максимінних функцій, область допустимих розв'язків можна представити у вигляді об'єднання

підобластей, тобто  $W = \bigcup_{q=1}^{\zeta} W_q$ , де кожна підобласть  $W_q$  визначається системою

нерівностей з неперервно-диференційованих функцій. Отже, задачу (1), (2) можна звести до послідовності задач  $F(X^*) = \text{extr} \{F(X^{*q}), q = 1, 2, \dots, \zeta\}$ , де  $F(X^{*q}) = \text{extr}_{X \in W_q} F(X)$ .

4. Кожна підзадача  $F(X^*) = \text{extr} \{F(X^{*q}), q = 1, 2, \dots, \zeta\}$  є багатоекстремальною задачею нелінійного програмування.

5. Задача (1), (2) належить до класу NP-складних.

#### ЗАГАЛЬНА СТРАТЕГІЯ БАГАТОЕТАПНОГО ПІДХОДУ

Для скорочення великих обчислювальних та часових витрат здійснимо декомпозицію розв'язання задачі на підготовчий етап та етап багаторазового запуску.

На підготовчому етапі виконується розв'язання низки допоміжних задач нелінійного програмування, які дозволяють отримати дані для побудови початкових точок основної задачі (1), (2). На етапі багаторазового запуску відбувається побудова різних початкових допустимих точок та пошук відповідних їм локальних мінімумів. Для розв'язання цих задач використовують стратегію, яка ґрунтується на гомотетичних перетвореннях та побудові перспективних точок [15, 16].

Як наближення до глобального мінімуму задачі обирають найкращий локальний мінімум, отриманий у результаті виконання етапу багаторазового запуску.

#### ПОБУДОВА ДОПУСТИМОЇ ПОЧАТКОВОЇ ТОЧКИ

Для того щоб побудувати допустиму початкову точку для задачі (1), (2), пропонуємо метод кластеризації, який має такий алгоритм.

Задані багатогранники попарно пакують в кубоїди (кластери) мінімального об'єму. Із отриманої множини кластерів формують підмножину кластерів, яка покриває множину заданих багатогранників. Формування такої підмножини відбувається за критерієм максимального коефіцієнта заповнення кластерів багатогранниками. У подальшому розв'язують задачу пакування сформованої підмножини кластерів у кубоїд мінімального об'єму. Потім для кожного багатогранника згідно з отриманим розміщенням кластерів визначають параметри розміщення багатогранників (рис. 1). Для обчислення кутів повороту кожного багатогранника розв'язується задача нелінійного програмування.

Розглянемо більш детально запропонований підхід. Нехай множина багатогранників  $P_i, i \in I_n$ , складається з  $k$  груп, кожна з яких містить  $l_k$  ідентичних багатогранників. На першому етапі кожен неопуклий багатогранник  $P_i$  та кожна його опукла компонента покриваються кулями  $S_i$  мінімального радіуса  $r_i^*$  та кулями  $S_{ik}$  мінімального радіуса  $r_{ik}^*, i \in I_n, k \in K_i$ . Для цього розв'язуються задачі нелінійного програмування:

$$r_i^* = \min_{(v_i, r_i) \in D_i \subset R^4} r_i, \quad i \in I_n,$$

$$D_i = \{(v_i, r_i) \in R^4: \Psi_{ij} = r_i^2 - (x'_{ij} - x_i)^2 - (y'_{ij} - y_i)^2 - (z'_{ij} - z_i)^2 \geq 0, j \in T_i\}.$$

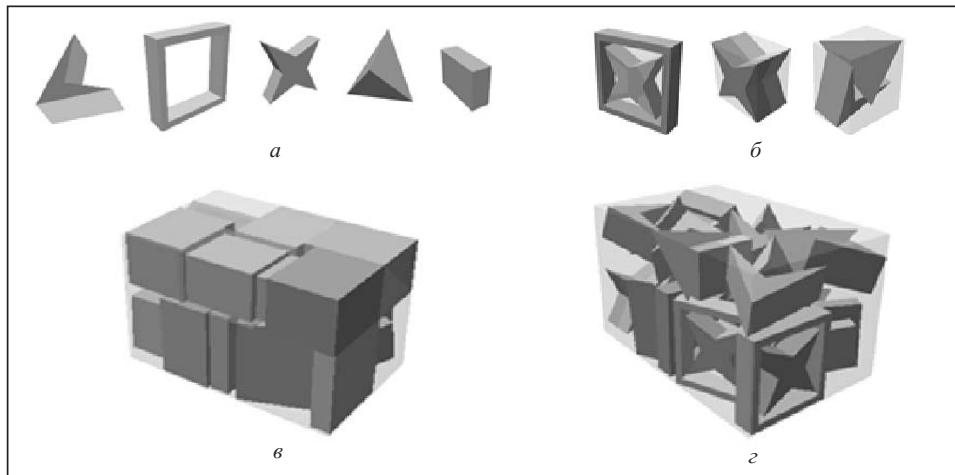


Рис. 1. Побудова початкової точки за методом кластеризації: *a* — задані форми багатогранників; *б* — обрані кластери за критерієм максимального коефіцієнту заповнення; *в* — результат пакування сформованої підмножини кластерів; *г* — допустима початкова точка, яка відповідає розміщенню кластерів

Нехай  $(v_i^*, r_i^*)$  є точкою локального мінімуму цієї задачі. Поліус кожного багатогранника  $P_i$  та кожної його опуклої компоненти зміщується на вектор  $v_i^*$ .

На другому етапі розв'язують  $C_n^2 + n$  задач попарного пакування  $P_i, i \in I_n$ , у кубоїди  $C_{ij}$  мінімального об'єму  $D_{ij}^C$

$$D_{ij}^C(u_{C_{ij}}^*) = \min_{(u_i, u_j, u_{C_{ij}}) \in W_{ij} \subset R^{18}} D_{ij}^C(u_{C_{ij}}), \quad (3)$$

$$W_{ij} = \{(u_i, u_j, u_{C_{ij}}) \in R^{18} : \Phi_{ij}(u_i, u_j) \geq 0, \Phi_i(u_i, u_{C_{ij}}) \geq 0, \Phi_j(u_j, u_{C_{ij}}) \geq 0, F(u_{C_{ij}}) \geq 0\}, \quad (4)$$

де  $i, j \in I_n, u_{C_{ij}} = (l_2, l_1, w_2, w_1, h_2, h_1), D_{ij}^C(u_{C_{ij}}) = (l_2 - l_1)(w_2 - w_1)(h_2 - h_1), F(u_{C_{ij}}) = \min \{l_2 - l_1, w_2 - w_1, h_2 - h_1\}$ . Нерівність  $\Phi_{ij}(u_i, u_j) \geq 0$  гарантує, що  $\text{int } P_i \cap \text{int } P_j = \emptyset$ , а нерівності  $\Phi_i(u_i, u_{C_{ij}}) \geq 0$  та  $\Phi_j(u_j, u_{C_{ij}}) \geq 0$  гарантують розміщення відповідно  $P_i$  та  $P_j$  у  $C_{ij}(u_{C_{ij}})$ .

Результатом розв'язання задач виду (3), (4) буде множина  $K$  кластерів, яка складається з  $C_n^2 + n$  паралелепіпедів.

На третьому етапі із отриманої множини  $K$  кластерів необхідно виокремити за критерієм максимального коефіцієнту заповнення підмножини  $\tilde{K}$  кластерів, в якій можна розмістити всі багатогранники  $P_i, i \in I_n$ .

Отже, кожен кластер  $Q_i$  містить пару багатогранників  $P_{k_i}$  і  $P_{l_i}$  з параметрами розміщення  $u_{k_i}^Q$  і  $u_{l_i}^Q$  відносно його локальної системи координат  $Q_i$ .

Далі розв'язуємо задачу пакування сформованої підмножини кластерів  $Q_i, i \in M$ , у кубоїд  $\Omega$  мінімального об'єму. На основі рівнянь (1), (2) запишемо математичну модель задачі в такому вигляді:

$$H(\tilde{u}_\Omega^*) = \min_{(\tilde{u}, \tilde{u}_\Omega) \in \tilde{W} \subset R^{6\mu+6}} H(\tilde{u}_\Omega), \quad (5)$$

$$\tilde{W} = \{(\tilde{u}, \tilde{u}_\Omega) \in R^{6\mu+6} : \Phi_{ij}(\tilde{u}_i, \tilde{u}_j) \geq 0, i < j \in M, \Phi_i(\tilde{u}_i, \tilde{u}_\Omega) \geq 0, i \in M, F(\tilde{u}_\Omega) \geq 0\}, \quad (6)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{u}_\Omega &= (l_2, l_1, w_2, w_1, h_2, h_1), \quad H(\tilde{u}_\Omega) = (l_2 - l_1)(w_2 - w_1)(h_2 - h_1), \\ F(\tilde{u}_\Omega) &= \min \{l_2 - l_1, w_2 - w_1, h_2 - h_1\}. \end{aligned}$$

Нехай точка  $(\tilde{u}^*, \tilde{u}_\Omega^*) \in R^{6\mu+6}$  є наближенням до точки глобального мінімуму задачі (5), (6). Їй відповідає пакування кластерів  $Q_i(u_i^*)$ ,  $i \in M$ , в кубоїд  $\Omega(u_\Omega^*)$ , і кожен кластер містить пару багатогранників  $P_{k_i}$  і  $P_{t_i}$  з параметрами розміщення  $u_{k_i}^Q$  і  $u_{t_i}^Q$  відносно локальної системи координат кластера  $Q_i$ . Для того щоб перейти до допустимої початкової точки  $(u^0, u_\Omega^0) \in W$  задачі (1), (2), необхідно відповідно до розміщення кластерів  $Q_i$ ,  $i \in M$ , визначити параметри розміщення багатогранників  $P_i$ ,  $i \in I_n$ . Встановимо  $u_\Omega^0 = \tilde{u}_\Omega^*$ , координати полюсів багатогранників  $P_i$ ,  $i \in I_n$ , визначимо за формулою  $v_i^0 = \tilde{v}_i^* + v_i^Q$ . Щоб визначити кути повороту  $\theta_i^0$  багатогранників  $P_i$ ,  $i \in I_n$ , необхідно розв'язати  $n$  задач нелінійного програмування вигляду

$$r_{13}^{i*} = \min_{R_i \in D_i \subset R^9} r_{13}^i, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} D_i = \left\{ R_i \in R^9 : V_1^i R^i = \tilde{V}_1^i, V_2^i R^i = \tilde{V}_2^i, V_3^i R^i = \tilde{V}_3^i, \right. \\ \left. \sum_i r_{ij} r_{ik} = \delta_{jk}, \sum_i r_{ji} r_{ki} = \delta_{jk}, i=1, 2, 3 \right\}, \quad (8) \end{aligned}$$

де  $i \in I_n$ ,  $V_1^i, V_2^i, V_3^i$  — вектори вихідних координат перших трьох вершин багатогранника  $P_i$ ;  $\tilde{V}_j^i = \tilde{R}_i^* (R_i^Q V_j^i + v_i^Q)$ ,  $j=1, 2, 3$ ;  $R_i$  — шукана матриця обертань. Нехай  $R_i^*$  — розв'язок задачі (7), (8). Тоді кути повороту багатогранника  $P_i$  можна визначити як  $\beta_i = \arcsin r_{13}^{i*}$ ,  $\alpha_i = \arcsin (-r_{23}^{i*} / \cos \beta_i)$ ,  $\gamma_i = \arccos (-r_{12}^{i*} / \cos \beta_i)$ .

#### ЛОКАЛЬНА ОПТИМІЗАЦІЯ

Слід зазначити, що область допустимих розв'язків задачі (1), (2) описують великою кількістю нелінійних нерівностей [17]. Це вимагає розроблення методів, які дають змогу ефективно розв'язувати проблему великої розмірності задач. Ідея методу локальної оптимізації ґрунтується на декомпозиції основної задачі на підзадачі зі значно меншою кількістю обмежень та меншої розмірності. Для цього виокремлюємо такі етапи: послідовна генерація підобластей області допустимих розв'язків, які містять початкову точку; визначення підсистеми  $\varepsilon$ -активних обмежень; пошук за допомогою сучасних розв'язувачів задач нелінійного програмування другого порядку локальних екстремумів на обраних підобластях; організація переходу до інших підобластей. Розглянемо більш детально розроблені методи.

**Метод внутрішньої точки разом зі стратегією декомпозиції.** Нехай точка  $X^* \in W$  є початковою точкою. Пошук локального екстремуму починається з виділення підобласті  $W_0$  такої, що  $X^* \in W_0 \subset W$ . Для побудови підобласті  $W_0$  необхідно підставити точку  $X^*$  в нерівності, що формують систему вигляду (2). Оскільки Ф-функція має вигляд  $\Phi_{ij}^s(u_i, u_j) = \max \{\Psi_{ij}^s(u_i, u_j), s=1, \dots, \wp_{ij}\}$ , то допустима підобласть  $W_0$  матиме вигляд системи нерівностей, яка формується за

рахунок вибору в кожній  $\Phi$ -функції  $\Phi'_{ij}(u_i, u_j)$  однієї з функцій  $\Psi^{a_{ij}}(u_i, u_j)$ ,  $a_{ij} \in \{1, \dots, \rho_{ij}\}$ ,  $i < j \in I$ , такої, що  $\Phi'_{ij}(u_i^*, u_j^*) = \Psi^{a_{ij}}(u_i^*, u_j^*) = \chi_{ij}^*$ . Аналогічним способом виділяють нерівності з  $\Phi_i(u_i, u_\Omega) \geq 0$ ,  $i \in I$ . У результаті отримуємо систему нерівностей  $\Upsilon^0(X) \geq 0$ , яка і описує підобласть  $W_0$ . Потім розв'язуємо задачу  $F(u_\Omega^{0*}) = \min_{X \in W_0 \subset R^b} F(u_\Omega)$  і обчислюємо точку локального мінімуму  $X^{0*}$  для початкової точки  $X^* \in W_0$ . Далі в системі  $\Upsilon^0(X^{0*}) \geq 0$  виокремлюємо активні нерівності  $\zeta_{j_0}(\xi_j^{0*}) \geq 0$ ,  $j \in \Gamma_0 = \{1, 2, \dots, \mu_0\} \subset \Gamma = \{1, 2, \dots, \mu\}$ . Нехай ці нерівності належать підсистемі нерівностей  $\Psi_{ij}^a(u_i, u_j) \geq 0$ ,  $i \in I_{0\eta_1} \subset I$ ,  $j \in I_{0\eta_2} \subset I$ . Це дає змогу вибрати функції  $\hat{\Phi}'_{ij}(u_i, u_j)$ , які містять в собі функції  $\Psi_{ij}^a(u_i, u_j)$ ,  $i \in I_{0\eta_1}$ ,  $j \in I_{0\eta_2}$ , та обчислити їхні значення в точці  $X^{0*}$ . Нехай  $\Phi'_{ij}(u_i^{0*}, u_j^{0*}) = \Psi_{ij}^c(u_i^{0*}, u_j^{0*}) = \chi_{ij}^0$ ,  $i \in I_{0\eta_1}$ ,  $j \in I_{0\eta_2}$ . Якщо  $\chi_{ij}^0 > 0$ ,  $i \in I_{0\eta_1}$ ,  $j \in I_{0\eta_2}$ , то замінюємо підсистему  $\Psi_{ij}^a(u_i, u_j) \geq 0$  на підсистему  $\Psi_{ij}^c(u_i, u_j) \geq 0$ ,  $i \in I_{0\eta_1}$ ,  $j \in I_{0\eta_2}$ . У результаті отримуємо нову підсистему нерівностей, яка визначає нову допустиму підобласть  $W_1 \subset W$ . Вочевидь,  $X^{0*} \in W_1$ . Для початкової точки  $X^{0*}$  розв'язуємо задачу  $F(u_\Omega^{1*}) = \min_{X \in W_1 \subset R^m} F(u_\Omega)$  і обчислюємо точку локального мінімуму  $X^{1*}$ . Обчислювальний процес повторюємо  $\rho$  раз до тих пір, доки не буде виконано умову  $F(u_\Omega^{(\rho-1)*}) = F(u_\Omega^{\rho*})$ .

**Зменшення кількості обмежень.** Системи нерівностей  $\Upsilon^\tau(X) \geq 0$ , що задають підобласті  $W_\tau$ ,  $\tau \in \{0, \dots, \zeta\}$ , також складаються з великої кількості нерівностей. Вочевидь, що для ефективного розв'язання задач пакування необхідне суттєве зменшення кількості обмежень. Для цього у статті запропоновано спеціальний метод декомпозиції, суть якого полягає у зведенні розв'язання задач вигляду (1), (2) до розв'язання послідовності оптимізаційних підзадач. Для кожної такої підзадачі вводиться додаткова система обмежень на змінні, що дозволяє на кожному етапі пошуку локального екстремуму розглядати лише деякі обмеження зі всієї системи  $\Upsilon^\tau(X) \geq 0$ . Перевага цього підходу полягає в істотному скороченні кількості обмежень, які задають допустимі області підзадач.

Розглянемо детальніше описаний метод декомпозиції. Перш за все, задамо величину  $\sigma > 0$  і серед нерівностей  $\Phi_{ij}(u_i, u_j) \geq 0$ ,  $i < j \in I$ , та  $\Phi_i(u_i, u_\Omega) \geq 0$  виокремимо нерівності  $\Phi_{ij}(u_i, u_j) \geq 0$  такі, що

$$\|v_i^{(\tau-1)*} - v_j^{(\tau-1)*}\| - (r_i^0 + r_j^0) \leq \sigma, \quad i < j \in I, \quad (9)$$

і нерівності  $\Phi_i(u_i, u_\Omega) \geq 0$  такі, що виконана хоча б одна з умов

$$\begin{aligned} x_i^{(\tau-1)*} - r_i^0 - l_1^{(\tau-1)*} &\leq \sigma, & y_i^{(\tau-1)*} - r_i^0 - w_1^{(\tau-1)*} &\leq \sigma, \\ z_i^{(\tau-1)*} - r_i^0 - h_1^{(\tau-1)*} &\leq \sigma, & l_2^{(\tau-1)*} - x_i^{(\tau-1)*} - r_i^0 &\leq \sigma, \\ w_2^{(\tau-1)*} - y_i^{(\tau-1)*} - r_i^0 &\leq \sigma, & h_2^{(\tau-1)*} - z_i^{(\tau-1)*} - r_i^0 &\leq \sigma, \quad i \in I. \end{aligned} \quad (10)$$

Виокремимо з системи  $\Upsilon^\tau(X) \geq 0$  нерівності вигляду  $\zeta_\tau(\xi_t) \geq 0$ , які є частинами нерівностей  $\Phi'_{ij}(u_i, u_j) \geq 0$ ,  $i < j \in I$ , і  $\Phi_i(u_i, u_\Omega) \geq 0$ ,  $i \in I$ . Ці нерівності

формують підсистему  $Y^{\tau_0}(X) \geq 0$ , що складається з  $t_{\mu_0}$  нерівностей і визначає підмножину  $W_{\tau_0} \subset W_{\tau}$ . Вочевидь,  $Y^{\tau_0}(X^{(\tau-1)*}) \geq 0$  та  $t_{\mu_0} < \mu_{\tau}$ .

Підсистема  $Y^{\tau_0}(X) \geq 0$  описує підмножину точок  $X^{\tau_0} \in W_{\tau_0} \subset R^m$ . Для початкової точки  $X^{(\tau-1)0*} \in W_{\tau_0}$  розв'яжемо задачу

$$F(u_{\Omega}^{\tau_0*}) = \min_{X^{\tau_0} \in W_{\tau_0} \subset R^m} F(u_{\Omega}), \quad (11)$$

$$W_{\tau_0} = \left\{ X^{\tau_0} \in R^m : Y^{\tau_0}(X^{\tau_0}) \geq 0, \frac{1}{2}\sigma - \|v_i^{(\tau-1)*} - v_i\| \geq 0, i \in I \right\}. \quad (12)$$

Далі для точки  $X^{\tau_0*}$  будемо нову систему нерівностей  $Y^{\tau_1}(X) \geq 0$ . З урахуванням цієї точки сформуємо точку  $X^{\tau_1} \in W_{\tau_1}$  як початкову і будемо розв'язувати задачу  $F(u_{\Omega}^{\tau_1*}) = \min_{X^{\tau_1} \in W_{\tau_1} \subset R^m} F(u_{\Omega})$ . Отже, розв'язується послідовність підзадач  $F(u_{\Omega}^{\tau k*}) = \min_{X^{\tau k} \in W_{\tau k} \subset R^m} F(u_{\Omega})$ ,  $k = 1, 2, 3$ , до тих пір, доки не буде виконана умова  $F(u_{\Omega}^{\tau(k-1)*}) = F(u_{\Omega}^{\tau k*})$ .

Легко бачити, що чим менша величина  $\sigma$ , тим менша кількість нерівностей, які задають  $W_{\tau k}$ , і тим більшу кількість  $k$  підзадач необхідно розв'язати, щоб знайти точку локального мінімуму. З іншого боку, чим більша  $\sigma$ , тим більше нерівностей містить система, яка задає  $W_{\tau k}$ , і потрібно витратити більше часу для розв'язання підзадач. Як показали чисельні експерименти, значення величини  $\sigma$  можна обрати рівним середньому радіусу куль, що покривають багатогранники.

Зазначимо, що пошук локального мінімуму задачі (1), (2) може бути розділений на два етапи: етап оптимізації з системою лінійних обмежень та етап нелінійного програмування. Етап оптимізації можна реалізувати за рахунок фіксації кутів повороту  $\theta_i^0 = \text{const}$  багатогранників  $P_i$ ,  $i \in I_n$ , у початковій точці  $(u^0, u_{\Omega}^0) \in W$ . Фіксація кутів повороту дозволяє значно скоротити розмірність задачі (1), (2), перейти до лінійних обмежень, які формують область допустимих розв'язків  $W$ , та модифікувати алгоритм декомпозиції з метою зменшення кількості обмежень. Це дозволяє значно скоротити обчислювальні витрати та швидше знайти наближення до локального мінімуму. На цьому етапі математична модель задачі матиме вигляд

$$H(u_{\Omega}^*) = \min_{X \in W} H(u_{\Omega}),$$

$$W = \{X = (v, u_{\Omega}) \in R^{3n+6} : \Phi_{ij}(v_i, v_j) \geq 0, i < j \in I, \Phi_i(v_i, u_{\Omega}) \geq 0, i \in I, F(u_{\Omega}) \geq 0\}.$$

Оскільки кути повороту фіксуються, то системи нерівностей  $W_{\tau k}$  (12) є лінійними.

#### ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ

Експерименти проводились за допомогою програмного забезпечення, розробленого мовою C#. Програмне забезпечення розроблено за принципом модульності і складається з таких модулів: введення початкових даних; обчислення Ф-функцій; формування підзадач; формування початкових точок; локальна оптимізація; глобальна оптимізація. Модульність програмного забезпечення дала змогу виконати декомпозицію алгоритму та застосувати технології паралельних обчислень, що зумовило скорочення часу розв'язання задач. Для пошуку локальних екстремумів використано сучасний розв'язувач задач не-

лінійного програмування у вигляді безкоштовної бібліотеки IPOPT v.3.9.1 (Interior Point OPTimizer) [18]. Слід зазначити, що ефективність бібліотеки IPOPT зумовлена використанням методу внутрішніх точок. Параметрами комп'ютера, на якому проводились обчислювальні експерименти, є процесор Intel Core I5-750, 2,5 GHz, 6 Gb оперативної пам'яті.

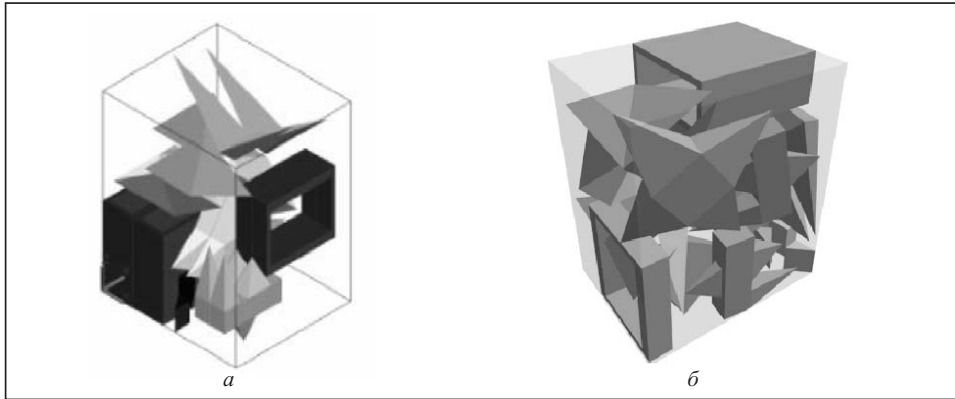


Рис. 2. Пакування 20 багатогранників: *a* — метод HARE3D (об'єм 32550, час — 26202 с); *б* — розроблений підхід (об'єм 28500, час — 6656 с)

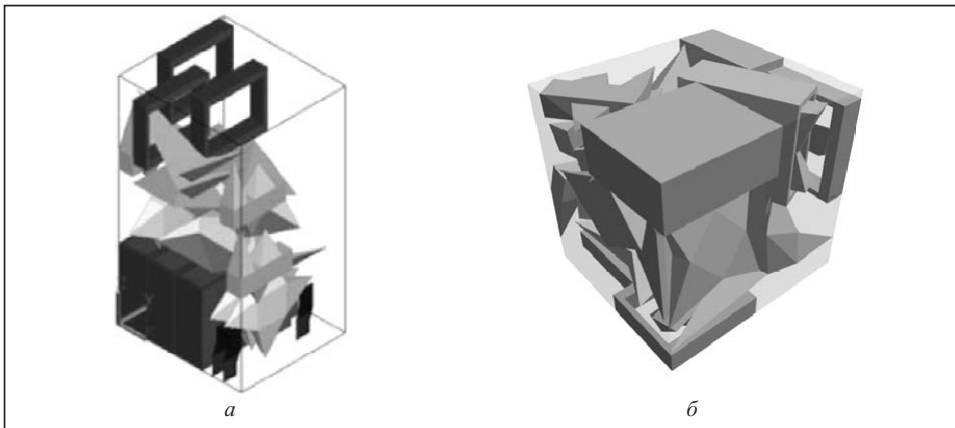


Рис. 3. Пакування 30 багатогранників: *a* — метод HARE3D (об'єм 48300, час — 53741 с); *б* — розроблений підхід (об'єм 42450, час — 9543 с)

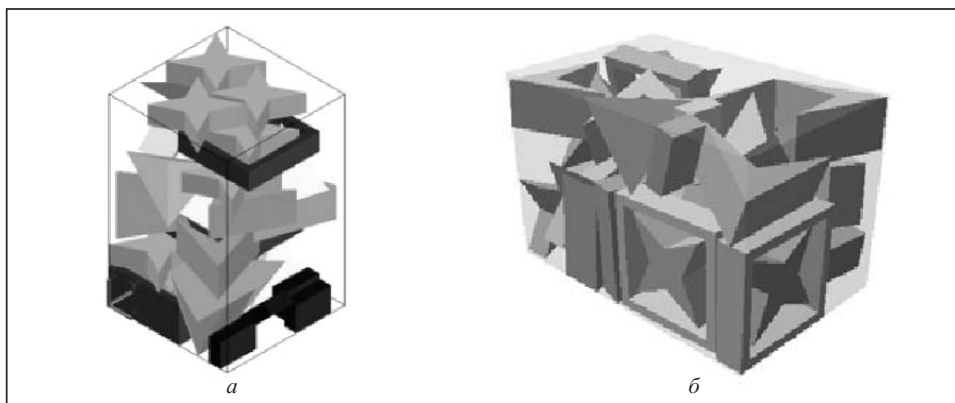


Рис. 4. Пакування 36 багатогранників: *a* — метод HARE3D (об'єм 12480, час — 9637 с); *б* — розроблений підхід (об'єм 10720, час — 4789 с)



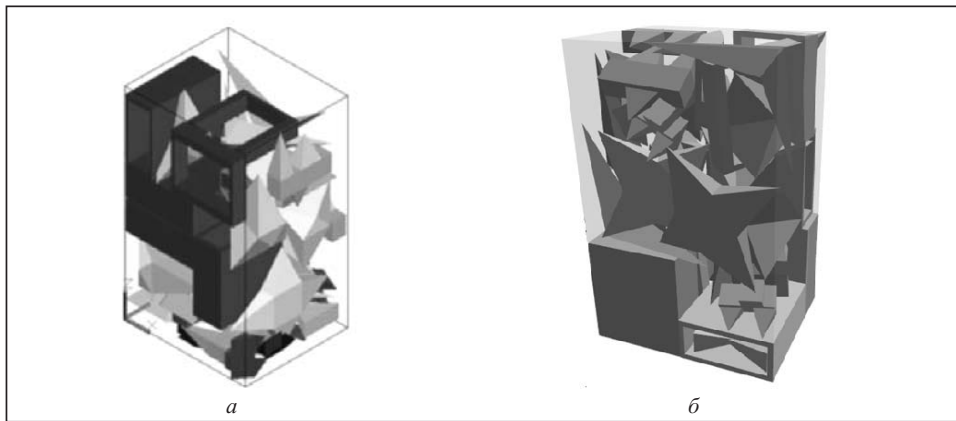


Рис. 5. Пакування 40 багатогранників: *a* — метод HAP3D (об'єм 6150, час — 99952 с); *б* — розроблений підхід (об'єм 56012, час — 24543 с)

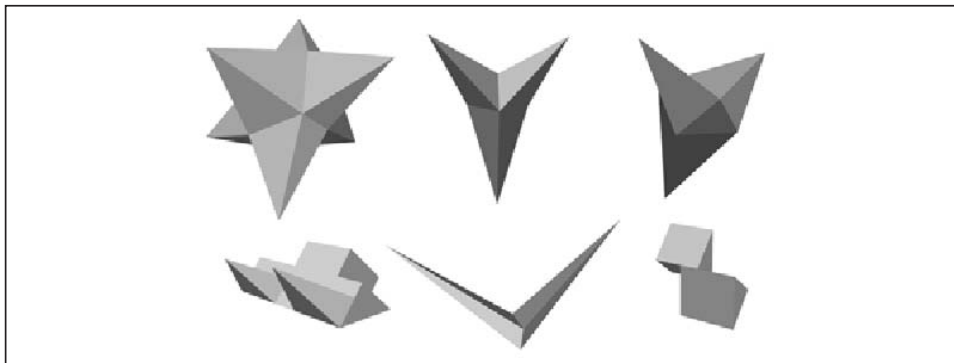


Рис. 6. Форми багатогранних тіл

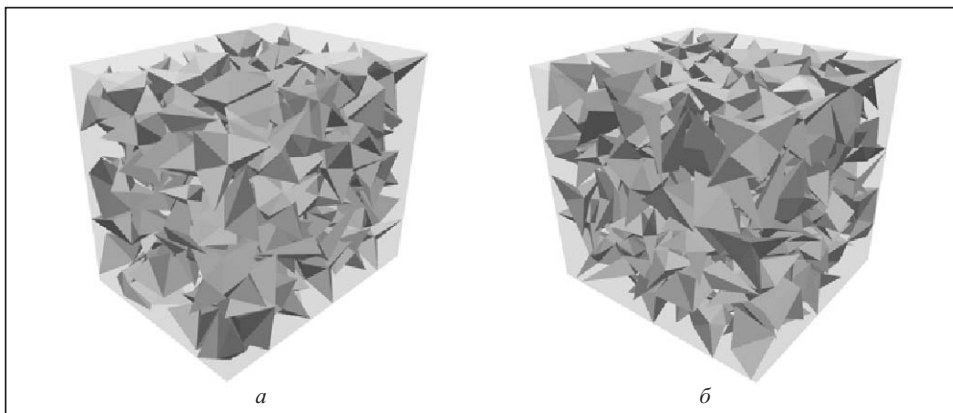


Рис. 7. Пакування неопуклих багатогранних тіл: 150 багатогранних тіл (*a*); 200 багатогранних тіл (*б*)

Для перевірки ефективності розробленого підходу було розв'язано низку наведених у роботі [12] тестових прикладів за допомогою методу HAP3D. Результати пакування багатогранників представлено на рис. 2–5.

Як видно за наведених рисунків, в усіх тестових прикладах отримано покращення як за результатом, так і за часом розв'язання. Отже, проведені обчислювальні експерименти підтверджують ефективність та достовірність розроблених методів.

Задачу пакування було розв'язано для множини із 150 та із 200 багатогранних тіл, форма яких зображена на рис. 6. Відповідні результати зображено на рис. 7. Час розв'язання задач склав 32 та 41 годину відповідно.

## ВИСНОВКИ

У роботі побудовано точну математичну модель задачі оптимального пакування неопуклих неорієнтованих багатогранників. Застосований метод Ф-функцій дає змогу використовувати сучасні методи нелінійного програмування на всіх етапах розв'язання задачі (1), (2), у тому числі побудову початкових точок, обчислення локальних мінімумів та пошук «наближень» до глобального мінімуму.

Завдяки методу кластеризації неопуклих неорієнтованих багатогранних тривимірних тіл побудова початкових точок зводиться до розв'язання задачі пакування вдвічі меншої кількості опуклих тіл значно простішої просторової форми. Отже, значно скорочено час побудови початкових точок. Слід зазначити, що зменшенню обчислювальних витрат сприяє те, що пошук локального екстремуму задачі розбивається на два підетапи: етап розв'язання лінійної задачі за рахунок фіксації кутів повороту та етап розв'язання задачі нелінійного програмування (1), (2).

Ітераційні процеси, які використовуються для розв'язання задачі, можуть бути легко розпаралелені. Наведені результати показали ефективність запропонованого підходу до розв'язання задачі.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Wang Y., Lin C.L., Miller J.D. 3D image segmentation for analysis of multisize particles in a packed particle bed. *Powder Technology*. 2016. Vol. 301. P. 160–168.
2. Korte A.C.J., Brouwers H.J.H. Random packing of digitized particles. *Powder Technology*. 2013. Vol. 233. P. 319–324.
3. Li S.X., Zhao J., Lu P., Xie Y. Maximum packing densities of basic 3D objects. *China Science Bulletin*. 2010. Vol. 55, Iss. 2. P. 114–119.
4. Karabulut K., İnceoğlu M. A hybrid genetic algorithm for packing in 3D with deepest bottom left with fill method. In: *Advances in Information Systems. ADVIS 2004. Lecture Notes in Computer Science*. T. Yakhno (Eds.). 2004. Vol. 3261. Berlin; Heidelberg: Springer, 2004. P. 441–450.
5. Pei Cao, Zhaoyan Fan, Robert Gao, Jiong Tang. A multi-objective simulated annealing approach towards 3D packing problems with strong constraints. *ASME 2015. International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. Vol. 2A. Paper No DETC2015-47670, V02AT03A052; 12 p. <https://doi.org/10.1115/DETC2015-47670>.
6. Guangqiang Li, Fengqiang Zhao, Rubo Zhang, Jialu Du, Chen Guo, Yiran Zhou. A parallel particle bee colony algorithm approach to layout optimization. *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*. 2016. Vol. 13, N 7. P. 4151–4157.
7. Torczon V., Trosset M. From evolutionary operation to parallel direct search: Pattern search algorithms for numerical optimization. *Computing Science and Statistics*. 1998. Vol. 29. P. 396–401.
8. Birgin E.G., Lobato R.D., Martinez J.M. Packing ellipsoids by nonlinear optimization. *Journal of Global Optimization*. 2016. Vol. 65. P. 709–743.
9. Fasano G.A. Global optimization point of view for non-standard packing problems. *Journal of Global Optimization*. 2013. Vol. 55. P. 279–299.
10. Stoyan Y.G., Semkin V.V., Chugay A.M. Optimization of 3D objects layout into a multiply connected domain with account for shortest distances. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. Vol. 50, N 3. P. 374–385.
11. Grebennik I.V., Pankratov A.V., Chugay A.M., Baranov A.V. Packing  $n$ -dimensional parallelepipeds with the feasibility of changing their orthogonal orientation in an  $n$ -dimensional parallelepiped. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2010. Vol. 46, N 5. P. 393–802.
12. Liu X., Liu J., Cao A. HAPE3D-a new constructive algorithm for the 3D irregular packing problem. *Frontiers Inf. Technol. Electronic Eng*. 2015. Vol. 16. P. 380–390.
13. Chernov N., Stoyan Y., Romanova T. Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem. *Computational Geometry. Theory and Application*. 2010. Vol. 43, Iss. 5. P. 535–553.

14. Stoyan Y., Chugay A. Mathematical modeling of the interaction of non-oriented convex polytopes. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2012. Vol. 48, N 6. P. 837–845.
15. Stoyan Y.G., Chugay A.M. Packing different cuboids with rotations and spheres into a cuboid. In: *Advances in Decision Sciences*, 2014. URL: <https://www.hindawi.com/journals/ads/2014/571743>.
16. Stoyan Y.G., Semkin V.V., Chugay A.M. Modeling close packing of 3D objects. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. Vol. 52, N 2. P. 296–304.
17. Stoian Y.E., Chugay A.M., Pankratov A.V., Romanova T.E. Two approaches to modeling and solving the packing problem for convex polytopes. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. Vol. 54, N 4. P. 585–593.
18. Wachter A., Biegler L.T. On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming. *Mathematical Programming*. 2006. Vol. 106, Iss. 1. P. 25–57.

*Надійшла до редакції 18.03.2019*

**Ю.Г. Стоян, А.М. Чугай**

**МНОГОЭТАПНЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ УПАКОВКИ НЕВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ**

**Аннотация.** Рассматривается задача упаковки невыпуклых многогранников в контейнер минимального объема. Построена точная математическая модель задачи упаковки невыпуклых многогранников, которые допускают непрерывные трансляции и повороты. Анализируются свойства математической модели, на основании которых разработан многоэтапный подход к решению задачи. Такой подход позволяет получить оптимальное решение, которое в общем случае не является глобальным минимумом, но является доказанным локальным минимумом. Приведены численные примеры.

**Ключевые слова:** упаковка, невыпуклые неориентированные многогранники, Ф-функция, нелинейное программирование.

**Y.G. Stoyan, A.M. Chugay**

**MULTISTAGE APPROACH TO SOLVING THE OPTIMIZATION PACKING PROBLEM FOR CONCAVE POLYHEDRA**

**Abstract.** The paper considers the problem of packing concave polyhedra into a container of minimal volume. The aim of our investigations is construction of an exact mathematical model of the packing problem of concave polyhedra with continuous translations and rotations. Characteristics of the mathematical model are analyzed and are used as the basis to develop a multistage solution approach to obtain a nearly optimal solution which is not a global minimum solution but a proved local minimum. Numerical examples are given.

**Keywords:** packing, concave polytopes,  $\Phi$ -function, nonlinear optimization.

**Стоян Юрій Григорович,**

чл.-кор. НАН України, доктор техн. наук, професор, завідувач відділу Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, Харків, e-mail: [stoyan@ipmach.kharkov.ua](mailto:stoyan@ipmach.kharkov.ua).

**Чугай Андрій Михайлович,**

доктор техн. наук, старший науковий співробітник Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, Харків, e-mail: [chugay.andrey80@gmail.com](mailto:chugay.andrey80@gmail.com).