УДК 517.9

Л.А. ВЛАСЕНКО, А.Г. РУТКАС, В.В. СЕМЕНЕЦ, А.А. ЧИКРИЙ

О СТОХАСТИЧЕСКОМ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ДЕСКРИПТОРНОЙ СИСТЕМОЙ

Аннотация. Исследована задача оптимального управления дескрипторной системой, эволюцию которой описывают стохастическим дифференциально-алгебраическим уравнением в смысле Ито. Рассмотрен квадратичный функционал качества. Основное ограничение состоит в том, что характеристический пучок матриц, соответствующий уравнению, является регулярным. Установлены условия существования и единственности оптимального управления и соответствующего оптимального состояния. Результаты иллюстрируются на примере стохастической дескрипторной системы, описывающей переходные режимы в радиотехническом фильтре со случайными возмущениями в виде белого шума.

Ключевые слова: стохастическое дифференциально-алгебраическое уравнение, винеровский случайный процесс, квадратичный функционал качества, стохастическое оптимальное управление, радиотехнический фильтр, переходной режим.

В настоящей работе продолжаются исследования, начатые в [1, 2], которые относятся к теории дескрипторных систем управления и ее приложениям. Если система управления подвергается случайным возмущениям, то наиболее приемлемым подходом моделирования таких возмущений считается процесс броуновского движения [3, 4]. В результате уравнением модели является стохастическое дифференциальное уравнение в смысле Ито. Если случайные возмущения претерпевает дискретная модель, то применяются стохастические разностные уравнения, например, как для конфликтно-управляемой системы из работы [5]. Наличие случайных возмущений в дескрипторных системах описывается с помощью стохастических дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно стохастического дифференциала искомого случайного процесса [6–8]. В данной статье предлагается анализ задачи стохастического оптимального управления дескрипторной системой, который демонстрируется на примере задачи минимизации функционала энергии радиотехнического фильтра с учетом случайных возмущений.

Введем обозначения: $<\cdot,\cdot>$ — скалярное произведение, $||\cdot||$ — норма, E — единичная матрица надлежащей размерности; B^{tr} — транспонированная матрица или транспонированный вектор; $\{\Omega, F, P\}$ — полное вероятностное пространство с неубывающим семейством сигма-алгебр $\{F_t\}_{0\le t\le T}$ ($F_s \subseteq F_t \subseteq F$, $0 \le s \le t \le T$); $w(t)$ — винеровский процесс со значениями в $\mathbf{R}^{m_2}$, выходящий из нуля и согласованный с семейством сигма-алгебр $\{F_t\}$; $L_2(0,T;\mathbf{R}^n)$ — пространство вектор-функций со значениями в $\mathbf{R}^n$, суммируемых с квадратом нормы на $[0,T]$; $W_2^k(0,T;\mathbf{R}^n)$ — пространство Соболева вектор-функций из $L_2(0,T;\mathbf{R}^n)$, у которых обобщенные производные до порядка k включительно принадлежат $L_2(0,T;\mathbf{R}^n)$; $H_2(\Omega;\mathbf{R}^n) = H_2$ — гильбертово пространство n-мерных случайных величин $\xi = \xi(\omega)$, имеющих конечный абсолютный момент второго порядка $\mathbf{M}\,||\xi||^2 < \infty$, со скалярным произведением $<\xi,\eta>_{H_2} = \mathbf{M}<\xi,\eta>$; если F_0 — сигма-подалгебра сигма-алгебры F, то $H_2(\Omega;\mathbf{R}^n;F_0)$ — подпространство пространства H_2, состоящее из F_0-измеримых случайных величин; $L_2(0,T;\Omega;\mathbf{R}^n) = L_{2,\Omega,\mathbf{R}^n}$ — гильбертово пространство n-мерных измеримых случайных процессов $x(t,\omega)$, $0 \le t \le T$, $\omega \in \Omega$, удовлетворяющих условию $\int_0^T \mathbf{M}\,||x(t,\omega)||^2\,dt < \infty$, со скалярным произведением

$$< x,\, y>_{L_{2,\Omega,\mathbf{R}^n}} = \int_0^T \mathbf{M}< x(t),\, y(t) > dt;$$

$L_2(0,T;\Omega;\mathbf{R}^n;F_t) = L_{2,\Omega,\mathbf{R}^n,F_t}$ — подпространство пространства $L_{2,\Omega,\mathbf{R}^n}$, состоящее из неупреждающих случайных процессов по отношению к семейству σ-алгебр $\{F_t\}_{0\le t\le T}$. Функции из $W_2^1(0,T;\mathbf{R}^n)$ будем считать непрерывными на $[0,T]$, изменив их, если необходимо, на множестве нулевой меры. Ортогональная проекция $\Pi y(t)$ случайного процесса $y(t) \in L_2(0,T;\,\Omega;\mathbf{R}^n)$ на подпространство $L_2(0,T;\,\Omega;\mathbf{R}^n;F_t)$ при почти всех $t \in [0,T]$ есть условное математическое ожидание $\mathbf{M}[\,y(t)|F_t\,]$ случайной величины $y(t)$ относительно сигма-алгебры F_t.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ НА ПРИМЕРЕ РАДИОТЕХНИЧЕСКОГО ФИЛЬТРА

В качестве примера стохастической дескрипторной системы управления рассмотрим электрическую цепь, изображенную на рис. 1.

На вход цепи воздействуют два источника напряжения: $e(t) = e(t,\omega)$ — заданный случайный процесс; $u(t) = u(t,\omega)$ — случайный процесс, который является управлением. Параллельно с емкостями C_1, C_2 включены проводимости g_1, g_2. Последовательно с индуктивностью L включено омическое сопротивление r. Случайные возмущения, как принято в радиотехнических системах, учитываются с помощью белого шума, т.е. обобщенной производной $w'(t)$ винеровского процесса $w(t)$ [9, 10]. Данную ситуацию моделируем в соответствии со следующей процедурой: в дифференциальные соотношения между токами и напряжениями аддитивно входит белый шум $w'(t)$:

$$LI'_L = U_L + \tau_L w'(t),\;\; C_j U'_{C_j} = I_{C_j} + \tau_{C_j} w'(t),\;\; j = 1,2. \qquad (1)$$

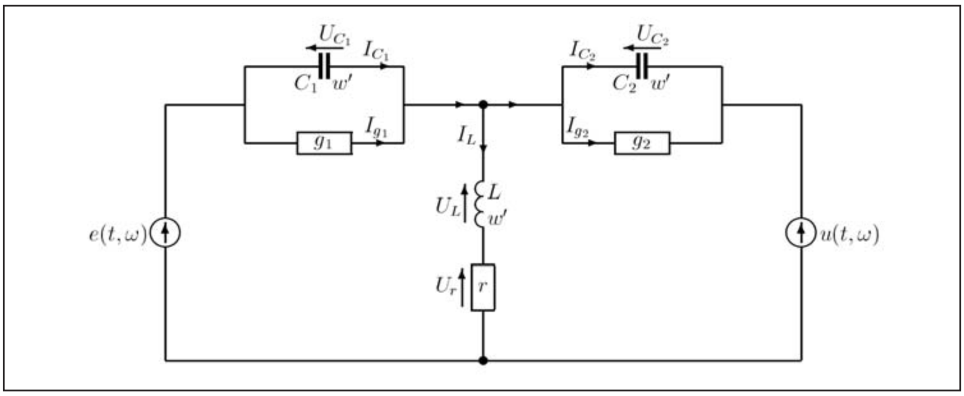

Рис. 1. Схема радиотехнического фильтра

С учетом того, что белый шум — обобщенная производная случайного процесса и как обычная функция не существует, соотношения (1) перепишем в виде стохастических дифференциалов, как принято в теории стохастических дифференциальных уравнений [11]:

$$LdI_L(t) = U_L(t)dt + \tau_L dw(t), \ \ C_j dU_{C_j}(t) = I_{C_j}(t)dt + \tau_{C_j} dw(t), \ \ j = 1, 2. \qquad (2)$$

Согласно законам Кирхгофа и Ома для токов и напряжений имеем

$$I_{C_1} + I_{g_1} = I_{C_2} + I_{g_2} + I_L, \ \ U_{C_1} + U_L + U_r = e, \ U_{C_1} + U_{C_2} + u = e,$$
$$U_r = rI_L, \ \ I_{g_j} = g_j U_{C_j}, \ \ j = 1, 2. \qquad (3)$$

В соотношениях (1)–(3) полагаем: L, r, C_j, g_j — положительные постоянные, τ_L, τ_{C_j} — весовые коэффициенты, определяющие величины воздействий белого шума на соответствующие инерционные элементы. Состояние электрической цепи характеризует трехмерный случайный процесс $x(t) = x(t, \omega)$, состоящий из «энергетических» компонент, соответствующих инерционным элементам:

$$x(t) = x(t, \omega) = (I_L(t) \ \ U_{C_1}(t) \ \ U_{C_2}(t))^{\mathrm{tr}}. \qquad (4)$$

Выполнив очевидные преобразования над соотношениями (2)–(4), получим систему трех уравнений относительно «энергетических» компонент (4) на отрезке времени $[0, T]$

$$LdI_L(t) + U_{C_1}(t)dt + rI_L(t)dt = e(t)dt + \tau_L dw(t),$$
$$C_1 dU_{C_1}(t) - C_2 dU_{C_2}(t) - I_L(t)dt + g_1 U_{C_1}(t)dt - g_2 U_{C_2}(t)dt = (\tau_{C_1} - \tau_{C_2})dw(t),$$
$$U_{C_1}(t) + U_{C_2}(t) = e(t) - u(t). \qquad (5)$$

Первые два уравнения стохастические дифференциальные, а третье — алгебраическое. В начальный момент времени $t = 0$ заданы значения

$$LI_L(0, \omega) = \xi_1(\omega), \ C_1 U_{C_1}(0, \omega) - C_2 U_{C_2}(0, \omega) = \xi_2(\omega), \qquad (6)$$

где ξ_1, ξ_2 — случайные величины. Задача стохастического оптимального управления системой (5), (6) состоит в выборе входного (управляющего) напряжения $u(t)$, реализующего минимум функционала энергии инерционных элементов и управления

$$J(u) = \mathbf{M}\left\{ \int_0^T [LI_L^2(t) + C_1 U_{C_1}^2(t) + C_2 U_{C_2}^2(t) + u^2(t)]dt \right\}. \qquad (7)$$

В обозначениях

$$A = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & -C_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} r & 1 & 0 \\ -1 & g_1 & -g_2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$f(t) = \begin{pmatrix} e(t) \\ 0 \\ e(t) \end{pmatrix}, \ K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \sigma = \begin{pmatrix} \tau_L \\ \tau_{C_1} - \tau_{C_2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (8)$$

начальную задачу (5), (6) перепишем в векторной форме относительно состояния $x(t)$ (4):

$$d[Ax(t)]+Bx(t)dt=f(t)dt+Ku(t)dt+\sigma dw(t),\ 0\le t\le T, \tag{9}$$

$$Ax(0,\omega)=\xi(\omega). \tag{10}$$

В отличие от соответствующей радиотехнической модели из работы [10] стохастическая модель (9), (10) является дескрипторной в силу вырожденности матрицы A.

Описание математических моделей цепей с отрезками длинных линий и сосредоточенными элементами приводит к дескрипторным системам с запаздыванием [12, 13]. Учет случайного воздействия на элементы этих цепей моделируется стохастическими дескрипторными системами с запаздыванием [7].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СТОХАСТИЧЕСКОГО ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЕСКРИПТОРНОЙ СИСТЕМОЙ

Рассмотрим задачу стохастического оптимального управления системой (9), (10) в более общей ситуации, когда A и B — вещественные матрицы размеров $n\times n$, K и σ — вещественные матрицы размеров $n\times m_1$ и $n\times m_2$ соответственно, $f(t)$ — n-мерный случайный процесс, $u(t)$ — m_1-мерный случайный процесс (управление), $w(t)$ — m_2-мерный винеровский процесс, ξ — n-мерная случайная величина. Для оценки качества управления системой (9), (10) определим функционал

$$J(u)=\mathbf{M}\left\{\int_0^T[<Rx(t),x(t)>+<Nu(t),u(t)>]dt\right\}, \tag{11}$$

где R, N — вещественные матрицы размеров $n\times n$, $m_1\times m_1$.

Допустимому управлению $u(t)\in U=L_2(0,T;\Omega;\mathbf{R}^{m_1};F_t)$ поставим в соответствие состояние системы $x(t)=x(t;u)$ или решение начальной задачи (9), (10). Пусть $f(t,\omega)\in L_2(0,T;\Omega;\mathbf{R}^n;F_t)$, $\xi\in H_2(\Omega;\mathbf{R}^n;F_0)$. Случайный процесс $x(t)\in L_2(0,T;\Omega;\mathbf{R}^n;F_t)$ является решением начальной задачи (9), (10), если справедливо равенство

$$Ax(t)-\xi+\int_0^t Bx(s)ds=\int_0^t[f(s)+Ku(s)]ds+\sigma w(t),\ \text{п.в. } t\in[0,T],\ \omega\in\Omega. \tag{12}$$

Единственность решения стохастического дифференциального уравнения понимается с точностью до стохастической эквивалентности [11].

Задача стохастического оптимального управления системой (9), (10) заключается в нахождении минимума

$$\min_{u\in U} J(u) \tag{13}$$

функционала качества $J(u)$ (11) на состояниях $x(t)=x(t;u)$ системы. Управление $u_*\in U$, на котором достигается минимум (13), т.е. $J(u_*)=\min\limits_{u\in U}J(u)$, назовем оптимальным управлением, а соответствующее ему состояние $x_*(t)=x(t;u_*)$ системы (9), (10) — оптимальным состоянием или оптимальным решением.

При исследовании систем управления принципиальным является представление состояния системы, допускающее аддитивное вхождение блока управления, например в [14] или для систем более общего вида в [15]. Опишем решения

$x(t)=x(t;u)$ начальной задачи (9), (10) при различных допустимых управлениях $u(t)\in U$. На динамику дескрипторной системы существенное влияние оказывает характеристический пучок матриц или операторов [16]. Для системы (9), (10) таким пучком является $\lambda A+B$. Наиболее часто предполагается, что система регулярна, т.е. регулярным является характеристический пучок (определитель пучка как функция от λ тождественно не обращается в ноль). В дальнейшем будем предполагать, что дескрипторная система (9), (10) регулярна. На основании исследований, начатых в работах [1, 2], предположение регулярности позволяет ввести в рассмотрение следующие матрицы:

$$I=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}(\lambda A+B)^{-1}d\lambda,\ G=AI(A-B)+B,$$

$$D=-AIBG^{-1},\ H=(E-AI)AG^{-1}, \tag{14}$$

где γ — контур, ограничивающий все собственные числа характеристического пучка. Заметим, что матрица I вещественная, матрицы AI и IA проекционные, матрица H нильпотентная с индексом нильпотентности ν.

В следующей теореме устанавливаем условия, при которых регулярная задача (9), (10) однозначно разрешима, а также приводим явную формулу для описания состояний дескрипторной системы или решений данной задачи.

Теорема 1. Пусть для регулярной системы (9), (10) выполнены следующие предположения: $f(t,\omega)\in L_2(0,T;\Omega;\mathbf{R}^n;F_t)$; $\xi\in H_2(\Omega;\mathbf{R}^n;F_0)$; если индекс нильпотентности ν матрицы H больше 1, то детерминированными являются вектор $(E-AI)\xi$ и вектор-функция $Hf(t,\omega)=h(t)\in W_2^j(0,T;\mathbf{R}^n)$, $j=1,\dots,\nu-1$; справедливы ограничения

$$HK=0,\ AI\sigma=\sigma,\ (E-AI)\xi=\sum_{j=0}^{\nu-1}(-1)^j\frac{d^j}{dt^j}[H^jh(0)]. \tag{15}$$

Тогда для любого допустимого управления $u(t)\in U$ с точностью до стохастической эквивалентности можно определить единственное состояние системы (9), (10), которое допускает представление в виде формулы вариации постоянных

$$x(t)=x(t;u)=\varphi(t)+G^{-1}\left\{\int_0^t e^{D(t-s)}AIKu(s)ds+[E-AI]Ku(t)\right\},$$

$$\varphi(t)=G^{-1}\left\{G^{-1}e^{Dt}AI\xi+\int_0^t e^{D(t-s)}AIf(s)ds\right\}+$$

$$+G^{-1}\left\{\sum_{j=0}^{\nu-1}(-1)^j\frac{d^j}{dt^j}[H^j(E-AI)f(t)]+\int_0^t e^{D(t-s)}\sigma dw(s)\right\}. \tag{16}$$

Стохастический интеграл $\int_0^t e^{D(t-s)}\sigma dw(s)$ в формуле (16) понимается в смысле интеграла Ито по векторному винеровскому процессу.

Доказательство. В частном случае $\nu=1$ утверждение теоремы 1 можно получить из соответствующих результатов работы [6], предположив, что все пространства конечномерны. Рассмотрим общую ситуацию $\nu\ge 1$ и опишем схему доказательства теоремы 1. Поскольку матрицы AI и IA являются проекционными, решение $x(t)$ задачи (9), (10) допускает представление в виде суммы двух компонент $x(t) = IAx(t) + (E - IA)x(t)$, а уравнение (12) эквивалентно системе двух уравнений

$$GIAx(t) - AI\xi = \int_0^t DGIAx(s)ds + \int_0^t AI[f(s) + Ku(s)]ds + \sigma w(t), \tag{17}$$

$$HG(E - IA)x(t) - (E - AI)\xi + \int_0^t G(E - IA)x(s)ds = \int_0^t (E - AI)[f(s) + Ku(s)]ds. \tag{18}$$

Компонента $IAx(t)$ — решение уравнения (17) тогда и только тогда, когда случайный процесс $y(t) = GIAx(t)$ является решением следующей начальной задачи для линейного стохастического дифференциального уравнения:

$$dy(t) = Dy(t)dt + AI[f(t) + Ku(t)]dt + \sigma dw(t), \ \ 0 \le t \le T, \ \ y(0) = AI\xi.$$

Данная начальная задача имеет единственное решение, которое является сильным согласно терминологии [11], и это решение задается формулой

$$y(t) = e^{Dt} AI\xi + \int_0^t e^{D(t-s)} AI[f(s) + Ku(s)]ds + \int_0^t e^{D(t-s)} \sigma dw(s). \tag{19}$$

С помощью уравнения (18), учитывая, что ν — индекс нильпотентности матрицы H и справедливо первое равенство в (16), однозначно находим компоненту $(E - IA)x(t)$ в виде

$$(E - IA)x(t) = G^{-1}\left[\sum_{j=0}^{\nu-1} (-1)^j \frac{d^j}{dt^j}[H^j (E - AI) f(t)] + [E - AI]Ku(t)\right]. \tag{20}$$

Отсюда получаем необходимое ограничение в (15) на случайную величину ξ (10).

С учетом (19) и (20) заключаем, что начальная задача (9), (10) имеет единственное решение $x(t) = G^{-1}[y(t) + (E - IA)x(t)]$, которое представляется в виде (16).

Теорема доказана.

Формула для состояний системы (16) не охватывает стохастических систем с импульсным управлением, интерес к которым вызывают исследования, начатые в работе [2]. Учет случайной и импульсной составляющих в [6] позволяет обслужить стохастические импульсные системы, если индекс нильпотентности ν матрицы H дескрипторной системы равен единице или система является явной, т.е. уравнение системы разрешено относительно дифференциала состояния. Это замечание указывает на метод исследования импульсных систем из [17–19] с учетом случайного воздействия в виде аддитивного белого шума.

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СТОХАСТИЧЕСКОГО ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В работах [6, 7] предложен метод исследования задачи стохастического оптимального управления с квадратичным критерием качества для распределенных систем, не разрешенных относительно стохастического дифференциала $dx(t)$. Расширим данный метод на случай сосредоточенных дескрипторных систем, эволюционные уравнения которых рассматриваются в конечномерных пространствах. В отличие от работ [6, 7] здесь не налагаем никаких ограничений на обратную матрицу $(\lambda A + B)^{-1}$, а исследования проводим в вещественных пространствах.

Теорема 2. Предположим, что для регулярной системы (9), (10) справедливы предположения теоремы 1. Пусть матрицы R, N в определении функционала качества (11) являются неотрицательно определенными и, более того, $N \geq \alpha E$, $\alpha > 0$. Тогда существует единственное оптимальное управление $u_*(t) \in U$, на котором достигается минимум (13) функционала качества (11).

Доказательство. Представим функционал (11) как квадратичную форму, определенную на гильбертовом пространстве $U = L_2(0,T;\Omega;\mathbf{R}^{m_1};F_t)$. Случайный процесс $\varphi(t)$ в (16) — элемент пространства $X = L_2(0,T;\Omega;\mathbf{R}^n;F_t)$. Введем ограниченный линейный оператор

$$(\Psi z)(t) = G^{-1}\left\{\int_0^t e^{D(t-s)} AIKv(s)ds + [E - AI]Kz(t)\right\}, \ \Psi : U \to X,$$

и его сопряженный

$$(\Psi^* y)(t) = \Pi \int_t^T (G^{-1}e^{D(s-t)}AIK)^{\mathrm{tr}}\, y(s)ds + [G^{-1}(E - AI)K]^{\mathrm{tr}}\, y(t), \ \Psi^* : X \to U.$$

Формула (16) для состояния системы принимает вид

$$x(t;u) = (\Psi u)(t) + \varphi(t).$$

Следовательно, функционал $J(u)$ (11) допускает представление

$$J(u) = < R(\Psi u + \varphi), \Psi u + \varphi >_X + < Nu, u >_U . \tag{21}$$

С помощью самосопряженного ограниченного линейного оператора

$$\Phi = N + \Psi^* R \Psi : U \to U \tag{22}$$

выражение (21) запишем как

$$J(u) = < \Phi u, u >_U + 2 < \Psi^* R\varphi, u >_U + < R\varphi, \varphi >_X .$$

Оператор Φ (22) имеет ограниченный линейный обратный оператор $\Phi^{-1} : U \to U$, для нормы которого справедлива оценка $\|\Phi^{-1}\| \leq \alpha^{-1}$. Непосредственно проверяем, что для управления

$$u_* = -\Phi^{-1}\Psi^* R\varphi \tag{23}$$

при всех $u \in U$ справедливо неравенство

$$J(u) - J(u_*) = < \Phi(u - u_*), u - u_* >_U \geq \alpha \| u - u_* \|_U^2 .$$

Отсюда следует, что управление (23) является единственным оптимальным управлением задачи (9)–(11), (13).

Теорема доказана.

В дальнейшем предполагаем, что выполнены условия теоремы 2, гарантирующие существование и единственность решения задачи стохастического оптимального управления (9)–(11), (13). Ориентируясь на схему исследования распределенных систем [20], определим сопряженное состояние

$$p(t) = \int_t^T (G^{-1}e^{D(s-t)}AI)^{\mathrm{tr}}\, Rx(s)ds + [G^{-1}(E - AI)]^{\mathrm{tr}}\, Rx(t).$$

Сопряженное состояние — единственное решение сопряженной системы

$$\frac{d}{dt}[(AIA)^{\mathrm{tr}} p(t)] - B^{\mathrm{tr}} p(t) = -Rx(t),\ 0 \le t \le T,\ (AIA)^{\mathrm{tr}} p(T) = 0. \qquad (24)$$

Уравнение (24) является дифференциально-алгебраическим уравнением со случайной правой частью $-Rx(t,\omega)$. Его решения — случайные процессы $p(t) \in L_2(0,T;\mathbf{R}^n)$ P-п.н. такие, что $(AIA)^{\mathrm{tr}} p(t) \in W_2^1(0,T;\mathbf{R}^n)$ P-п.н. и уравнение удовлетворяется P-п.н. для п.в. $t \in [0,T]$.

Выразим оптимальное управление через сопряженное состояние. Нетрудно видеть, что соотношение

$$Nu + \Psi^* Rx(u) = 0$$

выполняется тогда и только тогда, когда u — оптимальное управление, а x — оптимальное состояние задачи (9)–(11), (13). Отсюда получаем представление для оптимального управления

$$u_* = -N^{-1} K^{\mathrm{tr}} \Pi p(t). \qquad (25)$$

Поэтому для оптимального решения уравнение (9) принимает вид

$$d[Ax(t)] + Bx(t)dt = [f(t) - KN^{-1} K^{\mathrm{tr}} \Pi p(t)]dt + \sigma dw(t),\ 0 \le t \le T. \qquad (26)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Предположим, что справедливы предположения теоремы 2. Тогда краевая задача (26), (10), (24) имеет единственное решение $x(t) = x_*(t) \in L_2(0,T;\Omega;\mathbf{R}^n;F_t)$, $p(t) \in L_2(0,T;\Omega;\mathbf{R}^n)$. Управление (25) является оптимальным управлением, а функция $x_*(t)$ — соответствующим оптимальным состоянием задачи (9)–(11), (13).

4. ПРИЛОЖЕНИЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ ОПТИМАЛЬНЫХ ПЕРЕХОДНЫХ РЕЖИМОВ РАДИОТЕХНИЧЕСКОГО ФИЛЬТРА

Применим полученные в разд. 3 результаты к поставленной в разд. 1 задаче стохастического оптимального управления переходными режимами радиотехнического фильтра. Напомним, что система (5), (6), описывающая переходные режимы, допускает представление (9), (10) в обозначениях (4), (8). Функционал энергии (7) представляется в виде (11) с матрицей $R = \mathrm{diag}\{L, C_1, C_2\}$ и числом $N = 1$. Пусть $e(t) \in L_2(0,T;\Omega;\mathbf{R};F_t)$, $\xi_1, \xi_2 \in H_2(\Omega;\mathbf{R};F_0)$. Класс допустимых управлений (входных напряжений $u(t)$) состоит из случайных процессов $U = L_2(0,T;\Omega;\mathbf{R};F_t)$.

Система (5), (6) является регулярной в силу регулярности характеристического определителя

$$\det(\lambda A + B) = (\lambda L + r)(\lambda C_{12} + g_{12}) + 1 \not\equiv 0,\ C_{12} = C_1 + C_2,$$
$$g_{12} = g_1 + g_2,\ \mu C_{12} = C_2 g_1 - C_1 g_2.$$

Матрицы в (14) принимают вид

$$AI = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{-C_2}{C_{12}} \\ 0 & 1 & -\mu \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad G^{-1} = \frac{1}{C_{12}} \begin{pmatrix} \dfrac{C_{12}}{L} & 0 & \dfrac{-C_2}{L} \\ 0 & 1 & C_2 - \mu \\ 0 & -1 & \mu + C_1 \end{pmatrix},$$

$$D=\frac{1}{LC_{12}}\begin{pmatrix} -rC_{12} & -L & rC_2+\mu L \\ C_{12} & -g_{12}L & \mu Lg_{12}-C_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица H нулевая с индексом нильпотентности $\nu=1$. Пусть $\xi=(\xi_1\ \ \xi_2\ \ 0)^{\mathrm{tr}}$. Для системы (5), (6) с функционалом энергии (7) выполнены условия теорем 1–3. В силу теоремы 1 для любого допустимого управления $u(t)\in U$ состояние $x(t)$ (4) определяется однозначно в явном виде

$$\begin{pmatrix} I_L(t) \\ U_{C_1}(t) \\ U_{C_2}(t) \end{pmatrix}=(\Psi u)(t)+\varphi(t),\ \ (\Psi u)(t)=G^{-1}\int_0^t e^{D(t-s)}\begin{pmatrix} C_2C_{12}^{-1} \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix}u(s)ds-C_{12}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ C_2 \\ C_1 \end{pmatrix}u(t),$$

$$\varphi(t)=G^{-1}\left[e^{Dt}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ 0 \end{pmatrix}+\int_0^t e^{D(t-s)}\begin{pmatrix} C_2C_{12}^{-1} \\ -\mu \\ 0 \end{pmatrix}e(s)ds+\int_0^t e^{D(t-s)}\begin{pmatrix} \tau_L \\ \tau_{C_1}-\tau_{C_2} \\ 0 \end{pmatrix}dw(s)\right]+$$

$$+C_{12}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ C_2 \\ C_1 \end{pmatrix}e(t). \qquad (27)$$

Согласно теореме 2 существует единственное оптимальное управление $u_*(t)\in U$ (23), на котором достигается минимум (13) функционала энергии (7). Тогда для тока I_L и напряжений U_{C_1}, U_{C_2} их оптимальные состояния $I_{L*}(t)$ и $U_{C_1*}(t)$, $U_{C_2*}(t)$ определяются с помощью формул (27) при $u=u_*$ (25):

$$u=u_*=-\Phi^{-1}\Psi^*\mathrm{diag}\{L,C_1,C_2\}\varphi,\ (\Phi z)(t)=z(t)+(\Psi^*\mathrm{diag}\{L,C_1,C_2\}\Psi z)(t),$$

$$(\Psi^* y)(t)=\mathbf{M}\left[\int_t^T (G^{-1}e^{D(s-t)}AIK)^{\mathrm{tr}}\, y(s)ds\,|F_t\right]-C_{12}^{-1}[C_2y_2(t)+C_1y_3(t)].$$

Оптимальное управление и оптимальное состояние можно построить, как в теореме 3, переходом к сопряженному состоянию

$$p(t)=\begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{pmatrix}=\int_t^T (G^{-1}e^{D(s-t)}AI)^{\mathrm{tr}}\begin{pmatrix} LI_L(s) \\ C_1U_{C_1}(s) \\ C_2U_{C_2}(s) \end{pmatrix}ds+\frac{C_1C_2}{C_{12}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ U_{C_1}(t)+U_{C_2}(t) \end{pmatrix}$$

и сопряженной системе

$$\frac{d}{dt}[A^{\mathrm{tr}}p(t)]-B^{\mathrm{tr}}p(t)=-\begin{pmatrix} LI_L(t) \\ C_1U_{C_1}(t) \\ C_2U_{C_2}(t) \end{pmatrix},\ 0\le t\le T,\ \ p_1(T)=p_2(T)=0. \qquad (28)$$

Запишем уравнение (26) для радиотехнической системы

$$LdI_L(t)+U_{C_1}(t)dt+rI_L(t)dt=e(t)dt+\tau_L dw(t),$$

$$C_1dU_{C_1}(t)-C_2dU_{C_2}(t)-I_L(t)dt+g_1U_{C_1}(t)dt-g_2U_{C_2}(t)dt=(\tau_{C_1}-\tau_{C_2})dw(t),$$

$$U_{C_1}(t)+U_{C_2}(t)=e(t)+\mathbf{M}[p_3(t)|F_t],\ 0\le t\le T. \qquad (29)$$

В силу теоремы 3 существует единственное решение $I_L(t) = I_{L*}(t)$, $U_{C_1}(t) = U_{C_1*}(t), U_{C_2}(t) = U_{C_2*}(t),\ p(t)$ краевой задачи (29), (6), (28). По формуле (25) находим оптимальное управляющее напряжение $u_*(t,\omega) = \mathbf{M}[p_3(t,\omega)|F_t]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Vlasenko L.A., Rutkas A.G., Semenets V.V. Sequential composition and decomposition of descriptor control systems. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2018. Vol. 50, N 9. P. 60–75. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v50.i9.50.
2. Власенко Л.А., Руткас А.Г., Семенец В.В., Чикрий А.А. Об оптимальном импульсном управлении в дескрипторных системах. *Проблемы управления и информатики*. 2019. № 3. С. 5–18.
3. Красовский Н.Н. Игра сближения-уклонения со стохастическим поводырем. *Доклады Академии наук СССР*. 1977. Т. 237, № 5. С. 1020–1023.
4. Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. Москва: Мир, 1978. 320 с.
5. Dziubenko K.G., Chikrii A.A. An approach problem for a discrete system with random perturbations. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2010. Vol. 46, N 2. P. 271–281. https://doi.org/10.1007/s10559-010-9204-3.
6. Vlasenko L.A., Rutkas A.G. Stochastic impulse control of parabolic systems of Sobolev type. *Differential Equations*. 2011. Vol. 47, N 10. P. 1498–1507. https://doi.org/10.1134/S0012266111100132.
7. Vlasenko L.A., Rutkas A.G. Optimal control of a class of random distributed Sobolev type systems with aftereffect. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2013. Vol. 45, Iss. 9. P. 66–76. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v45.i9.60.
8. Liaskos K.B., Stratis I.G., Pantelous A.A. Stochastic degenerate Sobolev equations: well posedness and exact controllability. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2018. Vol. 41, Iss. 3. P. 1025–1032. https://doi.org/10.1002/mma.4077.
9. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. Москва: Радио и связь, 1982. 624 с.
10. Kolarova E., Braneik L. Vector stochastic differential equations used to electrical networks with random parameters. *International Journal of Advances in Telecommunications, Electronics, Signals and Systems*. 2013. Vol. 2, N 1. P. 1–8. http://dx.doi.org/10.11601/ijates.v2i1.24.
11. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. Москва: Наука, 1974. 696 с.
12. Vlasenko L.A. Existence and uniqueness theorems for an implicit delay differential equation. *Differential Equations*. 2000. Vol. 36, N 5. P. 689–694. https://doi.org/10.1007/BF02754227.
13. Rutkas A.G., Vlasenko L.A. Time-domain descriptor models for circuits with multiconductor transmission lines and lumped elements. *Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals. Proceedings of 5-th IEEE International Conference*. Sept 6–10, 2010, Sevastopol, Ukraine. P. 102–104. https://doi.org/10.1109/UWBUSIS.2010.5609106.
14. Chikrii A.A. Conflict-controlled processes. Dordrecht: Springer Science and Business Media, 2013. 424 p. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1135-7.
15. Chikrii A.A., Chikrii V.K. Image structure of multivalued mappings in game problems of motion. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2016. Vol. 48, Iss. 3. P. 20–35. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v48.i3.30.
16. Rutkas A.G. Spectral methods for studying degenerate differential-operator equations. *Journal of Mathematical Sciences*. 2007. Vol. 144, N 4. P. 4246–4263. https://doi.org/10.1007/s10958-007-0267-2.
17. Vlasenko L.A., Myshkis A.D., Rutkas A.G. On a class of differential equations of parabolic type with impulsive action. *Differential Equations*. 2008. Vol. 44, N 2. P. 231–240. https://doi.org/10.1134/S0012266108020110.
18. Кривонос Ю.Г., Матичин И.И., Чикрий А.А. Динамические игры с разрывными траекториями. К.: Наук. думка, 2005. 220 с.

19. Chikrii A.A., Matychyn I.I., Chikrii K.A. Differential games with impulse control. *Advances in Dynamic Game Theory*. *Annals of the International Society of Dynamic Games*. Boston: Birkhauser, 2007. Vol. 9. P. 37–55. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4553-3_2.

20. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. Москва: Мир, 1972. 415 с.

Надійшла до редакції 29.07.2019

Л.А. Власенко, А.Г. Руткас, В.В. Семенець, А.О. Чикрій

ПРО СТОХАСТИЧНЕ ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ДЕСКРИПТОРНОЮ СИСТЕМОЮ

Анотація. Досліджено задачу оптимального керування дескрипторною системою, еволюцію якої описують стохастичним диференціально-алгебраїчним рівнянням у сенсі Іто. Розглянуто квадратичний функціонал якості. Основне обмеження полягає в тому, що характеристичний жмуток матриць, який відповідає рівнянню, є регулярним. Встановлено умови існування та єдиності оптимального керування та відповідного оптимального стану. Результати ілюструються на прикладі стохастичної дескрипторної системи, що описує перехідні режими у радіотехнічному фільтрі з випадковими збуреннями у вигляді білого шуму.

Ключові слова: стохастичне диференціально-алгебраїчне рівняння, вінеровський випадковий процес, квадратичний функціонал якості, стохастичне оптимальне керування, радіотехнічний фільтр, перехідний режим.

L.A. Vlasenko, A.G. Rutkas, V.V. Semenets, A.A. Chikrii

ON THE STOCHASTIC OPTIMAL CONTROL OF A DESCRIPTOR SYSTEM

Abstract. We study the optimal control problem of a descriptor system, whose evolution is described by Ito's differential-algebraic equation. The quadratic cost functional is considered. The main constraint is that the characteristic matrix pencil corresponding to the equation is regular. We establish the conditions for the existence and uniqueness of the optimal control and the corresponding optimal state. The results are illustrated on an example of a descriptor system that describes transient states in a radio engineering filter with random perturbations in the form of white noise.

Keywords: stochastic differential algebraic equation, Wiener random process, quadratic performance functional, stochastic optimal control, radio engineering filter, transient state.

Власенко Лариса Андреевна,
доктор техн. наук, профессор Харьковского национального университета радиоэлектроники,
e-mail: lara@rutrus.com.

Руткас Анатолий Георгиевич,
доктор физ.-мат. наук, профессор Харьковского национального университета радиоэлектроники,
e-mail: anatoly@rutrus.com.

Семенец Валерий Васильевич,
доктор техн. наук,профессор, ректор Харьковского национального университета радиоэлектроники,
e-mail: valery.semenets@nure.ua.

Чикрий Аркадий Алексеевич,
академик НАН Украины, доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий отделом Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: chik@insyg.kiev.ua.