УДК 519.11.176

Н.К. ТИМОФІЄВА

ПРО ФРАКТАЛЬНУ ПРИРОДУ КОМБІНАТОРНИХ МНОЖИН ТА ЗНАХОДЖЕННЯ ФОРМУЛ КОМБІНАТОРНИХ ЧИСЕЛ

Анотація. Розглянуто фрактальну структуру комбінаторних множин, яка утворюється в процесі впорядкування комбінаторних конфігурацій. З використанням фрактальних властивостей оговорених множин розроблено підхід до розв'язання перелічувальних задач у комбінаториці. Для знаходження комбінаторних чисел використано арифметичні послідовності.

Ключові слова: комбінаторика, фрактали, комбінаторні конфігурації, розбиття натурального числа, арифметичний трикутник, комбінаторні числа.

ВСТУП

Під час підрахунку кількості комбінаторних конфігурацій у їхніх множинах виникають комбінаторні числа (числа Фібоначчі, кількість перестановок у їхній множині $n!$, біноміальні коефіцієнти тощо). Використання фрактальних властивостей комбінаторних множин дає змогу знаходити формули цих чисел. У процесі таких обчислень використовують арифметичні послідовності, при цьому значеннями їхніх складових є многокутні та фігурні числа. Дослідженню фракталів присвячено дуже багато наукових праць, наприклад [1–4]. Зазвичай досліджують геометричні форми, фрактальні числові ряди та їхнє використання на практиці, зокрема для прогнозування різних явищ. Але аналізу фрактальних властивостей комбінаторних множин у літературі не приділено достатньої уваги. Для розв'язання перелічувальних задач є багато способів, наприклад, принцип включення і виключення, підходи з використанням продуктивних функцій, алгебри інцидентності тощо [5–8]. Перелічувальні задачі можна розв'язувати і з використанням фрактальних властивостей комбінаторних множин, однак цей підхід в літературі не розглянуто.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА ПРОПОНОВАНИЙ ПІДХІД

Під час генерування комбінаторних множин за строгими правилами можна побачити, що вони мають фрактальну структуру. Проте, незважаючи на величезну кількість публікацій щодо фракталів, ця проблема не є об'єктом особливої уваги їхніх авторів. Отже, для встановлення фрактальної структури комбінаторних множин необхідно розробити спосіб їхнього впорядкування, який би дав змогу прослідкувати за утворенням цих структур та з використанням їхніх властивостей розробити підхід до розв'язання перелічувальних задач у комбінаториці.

Для встановлення фрактальної структури комбінаторних множин розроблено метод генерування комбінаторних конфігурацій з використанням властивості періодичності. Упорядкування цим методом здійснено за строгими правилами. Виділено інтервали комбінаторних множин, які утворюються згідно з одними й тими самими процедурами. Нижче показано, що завдяки такому впорядкуванню утворені інтервали є самоподібними, а власне комбінаторна множина може бути як скінченною, так і нескінченною, що характерно для фрактальних структур. Фрактальні властивості комбінаторних множин дають змогу знаходити комбінаторні числа.

Елементами комбінаторних множин є комбінаторні конфігурації певного типу, тому розглянемо деякі їхні властивості. Утворення та впорядкування цих об'єктів ґрунтовно описано у [9]. Оговоримо деякі з них.

Означення 1. Комбінаторною конфігурацією назвемо будь-яку сукупність елементів, яка утворюється з усіх або з деяких елементів заданої множини $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Позначимо її впорядкованою множиною $w^k = (w_1^k, \ldots, w_\eta^k)$. Під символом $w_j^k \in A$ розуміємо як окремі елементи, так і підмножини (блоки), при цьому $\eta \in \{1, \ldots, n\}$ — кількість елементів у w^k, $W = \{w^k\}_1^q$ — множина комбінаторних конфігурацій. Верхній індекс k ($k \in \{1, \ldots, q\}$) у w^k позначає порядковий номер w^k у W, а q — кількість w^k у W.

Комбінаторні конфігурації будь-якого типу формуються з елементів заданої множини за допомогою характерної для кожного з них операції. Одні такі операції змінюють порядок розміщення елементів у цих конфігураціях, інші змінюють їхній склад. Множину $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, з елементів якої утворюються комбінаторні конфігурації, назвемо базовою.

Різноманітні типи комбінаторних конфігурацій утворюються за допомогою трьох рекурентних комбінаторних операторів, а саме вибирання, транспозиції та арифметичного. Означення оговорених операторів подано у [9].

Дві нетотожні комбінаторні конфігурації $w^k = (w_1^k, \ldots, w_{\eta^k}^k)$ та $w^i = (w_1^i, \ldots, w_{\eta^i}^i)$ назвемо ізоморфними, якщо $\eta^k = \eta^i$. Підмножину $W_{\eta^k} \subset W$ назвемо підмножиною ізоморфних комбінаторних конфігурацій, якщо її елементи — ізоморфні комбінаторні конфігурації. Множина перестановок складається з однієї підмножини $W_{\eta^k} = W$.

Вибірки (сполучення та розміщення з повтореннями та без повторень) упорядковуються підмножинами ізоморфних вибірок. Для фіксованого n на підмножині ізоморфних вибірок різних типів множина $W_{\eta^k} \subset W$ є скінченною, а для довільного n — нескінченною.

Комбінаторна множина одного і того самого типу може бути впорядкована у різні способи. Аналіз цих множин показує, що вони зазвичай упорядковуються одними й тими самими процедурами, тобто існують закономірності їхнього генерування. Однією з них є властивість періодичності, яка випливає з рекурентного способу утворення та впорядкування комбінаторних конфігурацій.

Означення 2 [9]. Властивість періодичності впорядкування комбінаторних множин випливає з рекурентного способу утворення комбінаторних конфігурацій та полягає в тому, що ці множини впорядковані інтервалами, в кожному з яких комбінаторні конфігурації утворюються за одними й тими самими правилами.

Упорядкуємо множину W комбінаторними конфігураціями w^k, $k \in \{1, \ldots, q\}$, у такий спосіб, що наступна w^{k+1} утворюється з попередньої w^k або з базової множини A за допомогою характерної для заданого типу рекурентної комбінаторної операції (транспозиції, вибирання або арифметичної). Вважатимемо, що базова множина $A = (a_1, \ldots, a_n)$ є впорядкованою. Комбінаторна конфігурація $w^k = (w_1^k, \ldots, w_\eta^k) \in W$ також є впорядкованою.

У множині комбінаторних конфігурацій виділимо найменшу підмножину, комбінаторні конфігурації в якій утворюються за одним і тим самим правилом. Назвемо цю підмножину інтервалом нульового рангу. Певна кількість інтервалів нульового рангу утворює інтервал першого рангу, останні утворюють інтервал другого рангу і т. д. З інтервалів ($\sigma-1$)-го рангу утворюється інтервал σ-го рангу. Іншими словами, для генерування комбінаторних конфігурацій будь-якого типу необхідно сформулювати правила утворення а) інтервалів нульового рангу, б) обмежувальної комбінаторної конфігурації (першої в інтервалі нульового рангу), в) інтервалу σ-го рангу, який складається з інтервалів ($\sigma-1$)-го рангу. Використання цих правил дає змогу описати фрактальну природу комбінаторних множин [9].

ПРО ФРАКТАЛЬНУ ПРИРОДУ КОМБІНАТОРНИХ МНОЖИН

У літературі фрактали розглядаються як деякі геометричні фігури, яким властива самоподібність та квазісамоподібність [4]. Вони повторюються, мають фрактальну розмірність і є одночасно скінченними та нескінченними.

Якщо впорядкувати комбінаторні множини з використанням властивості періодичності, то можна побачити, що вони характеризуються самоподібністю та квазісамоподібністю [10]. Вважаємо, що комбінаторні множини є самоподібними, якщо їхні елементи утворюються за допомогою одного й того самого рекурентного комбінаторного оператора, а їхнє впорядкування здійснюється за одними й тими самими правилами. Інтервал σ-го рангу упорядкованої множини W складається з інтервалів ($\sigma-1$)-го рангу. Ці інтервали містять у собі менші, тобто вони є самоподібними. Такі властивості є характерними для фракталів [10].

Приклад 1. Для фіксованого числа n множина W є скінченною, а для довільного значення n вона нескінченна, тобто W одночасно є скінченною та нескінченною. Підмножина W_η розміщень з повтореннями (або сполучень з повтореннями, розбиття n-елементної множини на підмножини з повтореннями) є скінченною, а множина W цих самих комбінаторних конфігурацій для того ж самого n — нескінченною.

Оскільки інтервал σ-го рангу складається з інтервалів ($\sigma-1$)-го рангу, а інтервал 1-го рангу — з інтервалів нульового рангу, нескладно, знаючи правила їхнього впорядкувння, визначати кількість комбінаторних конфігурацій у їхній множині. За певними правилами, які є різними для різних типів комбінаторних конфігурацій, утворюємо скінченну послідовність, кожне значення якої задає кількість w в інтервалах σ-го рангу. Формулу комбінаторного числа для W (кількість w у множині W) подамо σ-значною сумою. Множина W впорядковується $W_{\eta^k} \subset W$, тому запишемо її в такому вигляді:

$$\begin{aligned}&\sum_{j_\sigma=1}^{H_n^1}\left(\sum_{j_{\sigma-1}=1}^{H_{n-1}^1}\left(\ldots\left(\sum_{j_2=1}^{H_2^1}\left(\sum_{j_1=1}^{H_1^1}(h^1)\right)\right)\ldots\right)\right)+\ldots\\ &\ldots+\sum_{j_\sigma=1}^{H_n^{\tilde q}}\left(\sum_{j_{\sigma-1}=1}^{H_{n-1}^{\tilde q}}\left(\ldots\left(\sum_{j_2=1}^{H_2^{\tilde q}}\left(\sum_{j_1=1}^{H_1^{\tilde q}}(h^{\tilde q})\right)\right)\ldots\right)\right),\end{aligned} \tag{1}$$

де H_t^ξ — кількість інтервалів σ-го рангу, $t \in \{1, \ldots, \sigma\}$, $\sigma \in \{2, \ldots, n\}$, h^ξ — кількість комбінаторних конфігурацій в інтервалі нульового рангу для ξ-ї підмножини $W_{\eta^k} \subset W$, $\xi \in \{1, \ldots, \tilde q\}$, $\tilde q$ — кількість підмножин $W_{\eta^k} \subset W$,

$$\sum_{j_\sigma=1}^{H_n^\xi}\left(\sum_{j_{\sigma-1}=1}^{H_{n-1}^\xi}\left(\ldots\left(\sum_{j_2=1}^{H_2^\xi}\left(\sum_{j_1=1}^{H_1^\xi}(h^\xi)\right)\right)\ldots\right)\right)$$ — кількість комбінаторних конфігурацій у ξ-й підмножині $W_{\eta^k} \subset W$ (або у множині перестановок). Вираз (1) описує фрактальну структуру комбінаторної множини, яка є об'ємною та її можна подати геометричним об'єктом.

Будемо називати комбінаторні множини самоподібними, якщо кількість комбінаторних конфігурацій в інтервалах нульового та σ-го рангів є однаковою, а квазісамоподібними — якщо кількість комбінаторних конфігурацій в інтервалах нульового та σ-го рангів є різною.

Структуру комбінаторної множини будемо називати фрактальною, якщо вона утворюється за рекурентними правилами і результатом є множини, які можна подати геометричними формами, найбільша з яких містить у собі їхні зменшені копії. Зауважимо, що таких однакових копій у комбінаторній множині може бути багато.

Арифметичні послідовності. Розглянемо арифметичні послідовності [11], наприклад, перші n чисел натурального ряду. Утворення в ньому наступних чисел проводиться додаванням одиниці до попереднього. Аналогічно можна скласти послідовності, які починаються з одиниці, а наступні їхні елементи утворюються додаванням до попереднього числа по 2, по 3, по 4 і т.д. Одержимо такі послідовності:

$$
\begin{gathered}
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots, j; \\
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots, 2j-1; \\
1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, \ldots, 3j-2; \\
1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, \ldots, 4j-3; \\
\ldots .
\end{gathered}
\tag{2}
$$

Знаходячи суму одного, двох, трьох і т.д. чисел першої (другої, третьої) послідовностей (2), отримаємо такі послідовності многокутних чисел:

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, ..., $j(j+1)/2$ — трикутні числа,
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ..., j^2 — квадратні числа,
1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, ..., $j(3j-1)/2$ — п'ятикутні числа,
… ,

де $j \in \{1, 2, 3, \ldots, p\}$, p — кількість елементів у заданій послідовності.

Фігурними називають як многокутні числа, так і коефіцієнти членів степенів бінома $(a+b)^n$. З його коефіцієнтів складається арифметичний трикутник (трикутник Паскаля)

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

На косих лініях цього трикутника знаходяться коефіцієнти перших (других, третіх і т.д.) членів степенів $(a+b)^n$. Подамо їх у вигляді такої таблиці:

1	1	1	1	1	1	1	…
1	2	3	4	5	6	…	
1	3	6	10	15	…		
1	4	10	20	…			
1	5	15					

Перший рядок та перший стовпець цієї таблиці — це числа 1, 1, 1, 1, 1, 1, ..., Другий рядок та другий стовпець — числа натурального ряду: 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... Третій рядок та третій стовпець містить трикутні числа 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... , j-й елемент якого є сумою перших j чисел натурального ряду. Четвертий рядок та четвертий стовпець — числа 1, 4, 10, 20, 35, 56, ..., j-й елемент якого є сумою перших j значень трикутних чисел. Ці числа називають тетраедричними. П'ятий рядок та п'ятий стовпець містять числа, які називають п'ятикутними: 1, 5, 15, 35, 70, 126, ... , в яких j-й елемент є сумою перших j значень тетраедричних чисел, і т.д. Будь-який елемент таблиці, крім чисел натурального ряду, є сумою двох чисел, що знаходяться в тому самому рядку вліво від шуканого числа і в тому самому стовпці над ним.

Якщо записати рядки арифметичного трикутника один під другим і скласти числа цієї таблиці по діагоналі (зліва направо, знизу вверх), то отримаємо послідовність чисел Фібоначчі: 1, 1, 1+1=2; 1+2=3; 1+3+1=5; 1+4+3=8; 1+5+6+1=13.

ПОБУДОВА АРИФМЕТИЧНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ПІД ЧАС ГЕНЕРУВАННЯ МНОЖИНИ КОМБІНАТОРНИХ КОНФІГУРАЦІЙ

Описані вище послідовності формуються під час знаходження кількості комбінаторних конфігурацій w у їхній множині W за правилами їхнього генерування рекурентно-періодичним методом [9], згідно з якими утворюються: а) інтервал нульового рангу, б) обмежувальна комбінаторна конфігурація (перша в інтервалі нульового рангу), в) інтервал σ-го рангу.

Оскільки інтервал σ-го рангу складається з інтервалів $(\sigma-1)$-го рангу, а інтервал 1-го рангу — з інтервалів нульового рангу, знаючи правила їхнього впорядкування, можна легко визначити кількість комбінаторних конфігурацій у їхній множині. За певними правилами, які є різними для різних типів комбінаторних конфігурацій, утворимо арифметичні послідовності, кожне значення якої задає кількість w в інтервалах σ-го рангу. Формулу комбінаторного числа (кількість w у множині W) подамо σ-значною сумою (1). Із виразу (1) видно, що під час визначення формули комбінаторного числа знаходяться суми арифметичних послідовностей.

Для знаходження формули $P_\eta(n)$, яка визначає кількість розбиттів натурального числа у підмножині $W_\eta \in W$, сформулюємо таку теорему.

Теорема 1. Існує три основні послідовності

$$\begin{aligned} &1)\ (1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 10,\ 11, \ldots,\ J),\\ &2)\ (2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9,\ 11,\ 12,\ \ldots,\ J_1),\\ &3)\ (1,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 9,\ 10,\ 12, \ldots,\ J_2), \end{aligned} \tag{3}$$

різноманітні комбінації яких утворюють інші послідовності, сума членів яких дорівнює комбінаторному числу $P_\eta(n)$, $\eta > 3$. Члени J, J_1, J_2 залежать від класу лишків n по $\bmod 6$.

Доведення теореми 1 наведено у [9]

Теорема 2. Кількість розбиттів у підмножині W_3 обчислюється за однією і тією самою формулою для тих n, для яких $n \equiv j \pmod 6$, $j \in \{0, \ldots, 5\}$, і дорівнює

$$P_\eta(n) = \begin{cases} \dfrac{n^2}{12}, & \text{якщо } n \equiv 0 \pmod 6,\\ \dfrac{n^2-1}{12}, & \text{якщо } n \equiv 1 \pmod 6,\\ \dfrac{n^2-4}{12}, & \text{якщо } n \equiv 2 \pmod 6,\\ \dfrac{n^2+3}{12}, & \text{якщо } n \equiv 3 \pmod 6,\\ \dfrac{n^2-4}{12}, & \text{якщо } n \equiv 4 \pmod 6,\\ \dfrac{n^2-1}{12}, & \text{якщо } n \equiv 5 \pmod 6. \end{cases} \tag{4}$$

Доведення. Формули (4) у [7] виведено за допомогою рекурентного виразу $P_\eta(n) = P_\eta(n-\eta) + P_{\eta-1}(n-\eta) + \ldots + P_1(n-k)$. Доведемо теорему 2 з використанням послідовностей (3).

$P_\eta(n)$ для $n \equiv j \pmod 6$, $j \in \{0, \ldots, 5\}$, дорівнює сумі членів однієї й тієї самої послідовністі з N), N_1), N_2) [9].

Для $n \equiv 0 \pmod 6$

$$P_\eta(n) = 1+2+4+5+7+8+10+11+\ldots+\frac{n-2}{2} = \frac{(n-2)n}{8} - \frac{n(n-6)}{24} = \frac{n^2}{12}.$$

Для $n \equiv 1 \pmod 6$

$$P_\eta(n) = 1+3+4+6+7+9+10+12+\ldots+\frac{n-1}{2} = \frac{n^2-1}{8} - \frac{n^2-1}{24} = \frac{n^2-1}{12}.$$

Для $n \equiv 2 \pmod 6$

$$P_\eta(n) = 2+3+5+6+8+9+11+$$

$$+12+\ldots+\frac{n-2}{2} = \frac{(n-2)n}{8} - \frac{(n-2)(n-4)}{24} = \frac{n^2-4}{12}.$$

Для $n \equiv 3 \pmod 6$

$$P_\eta(n) = 1+2+4+5+7+8+10+11+\ldots+\frac{n-1}{2} = \frac{n^2-1}{8} - \frac{n^2-9}{24} = \frac{n^2+3}{12}.$$

Для $n \equiv 4 \pmod 6$

$$P_\eta(n) = 1+3+4+6+7+9+10+12+\ldots+\frac{n-2}{2} = \frac{(n-2)n}{8} - \frac{(n-3)^2-1}{24} = \frac{n^2-4}{12}.$$

Для $n \equiv 5 \pmod 6$

$$P_\eta(n) = 2+3+5+6+8+9+11+12+\ldots+\frac{n-1}{2} = \frac{n^2-1}{8} - \frac{n^2-1}{24} = \frac{n^2-1}{12}.$$

Отже, вирази (4), виведені з використанням послідовностей (3), збігаються з формулами, наведеними в [7].

Теорему 2 доведено.

Теорема 3. Кількість розбиттів $P_4(n)$ підмножини W_4 залежить від класу лишків n за mod (12) та задається сумою членів однієї з дванадцяти послідовностей, утворених комбінацією трьох послідовностей 1), 2), 3).

Доведення виконується так само як і для теореми 2.

Наслідок 1. Кількість розбиттів у підмножині W_4 обчислюється за одним і тим самим виразом для $n \equiv j \pmod{12}$, $j \in \{0, \ldots, 11\}$, і дорівнює

$$P_4(n) = \begin{cases} \dfrac{n^2(n+3)}{144}, & \text{якщо } n \equiv 0 \pmod{12}, \\ \dfrac{n(n^2+3n-9)+5}{144}, & \text{якщо } n \equiv 1 \pmod{12} \text{ або } n \equiv 7 \pmod{12}, \\ \dfrac{n^2(n+3)-20}{144}, & \text{якщо } n \equiv 2 \pmod{12}, \\ \dfrac{n(n^2+3n-9)-27}{144}, & \text{якщо } n \equiv 3 \pmod{12} \text{ або } n \equiv 9 \pmod{12}, \\ \dfrac{n^2(n+3)+32}{144}, & \text{якщо } n \equiv 4 \pmod{12}, \\ \dfrac{n(n^2+3n-9)-11}{144}, & \text{якщо } n \equiv 5 \pmod{12} \text{ або } n \equiv 11 \pmod{12}, \\ \dfrac{n^2(n+3)-36}{144}, & \text{якщо } n \equiv 6 \pmod{12}, \\ \dfrac{n^2(n+3)+16}{144}, & \text{якщо } n \equiv 8 \pmod{12}, \\ \dfrac{n^2(n+3)-4}{144}, & \text{якщо } n \equiv 10 \pmod{12} \end{cases}.$$

Розглянемо множину сполучень без повторень та множину розбиттів n-елементної множини на підмножини. Упорядкуємо ці множини за заданими правилами з використанням рекурентно-періодичного методу [9] підмножинами ізоморфних сполучень W_η, починаючи з $\eta = 1$ та закінчуючи $\eta = n$, де η — кількість елементів, які вибираються з базової множини $A = (a_1, \ldots, a_n)$.

Теорема 4. Значення послідовностей, які задають кількість сполучень без повторень w у їхній множині W, упорядкованій з використанням рекурентно-періодичного методу генерування комбінаторних конфігурацій, утворюють арифметичний трикутник та є фігурними числами.

Доведення. Застосуємо метод математичної індукції для підмножини ізоморфних сполучень. Для $\eta = 1$ підмножина W_1 складається з одного інтервалу нульового рангу та містить усі можливі для нього нетотожні сполучення кількістю n.

Підмножина W_η для $\eta = 2$ складається з одного інтервалу першого рангу, в який входять $n-1$ інтервали нульового рангу. Кількість w у ньому дорівнює $1+2+3+\ldots+n-1 = \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{n!}{(n-2)!\,2!}$. Аналогічно для $\eta = 3$ підмножина W_3, побудована за тими самими правилами, складається з одного інтервалу другого рангу, в який входять інтервали першого рангу, кожен з яких складається з $1, 2, 3, \ldots, n-3$ інтервалів нульового рангу. Тоді кількість w у W_3 дорівнює $1+3+6+10+\ldots+\left(\dfrac{j(j+1)}{2}\right)_{n-2} = \dfrac{n(n-1)\,(n-2)}{6} = \dfrac{n!}{(n-3)!\,3!}$, $j \in \{1, \ldots, n-2\}$. Відповідно, для $\eta = 4$ підмножина W_4 складається з одного інтервалу третього рангу, в який входять $n-2$ інтервали другого рангу, кожен з яких складається з $1, 2, 3, \ldots, n-3$ інтервалів першого рангу, а останні — з $1, 3, 6, 10, \ldots, \left(\dfrac{j(j+1)}{2}\right)_{n-3}$, $j \in \{1, \ldots, n-3\}$, інтервалів нульового рангу. Тоді кількість w у W_4 дорівнює $1+4+10+20+\ldots+\left(\dfrac{j(j+1)(j+2)}{6}\right)_{n-3} =$ $= \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = \dfrac{n!}{(n-4)!\;4!}$. Для n кількість w у підмножині W_n дорівнює одиниці.

З цього видно, що одержані послідовності, суми членів яких задають кількість w у підмножинах W_η, утворюють арифметичний трикутник, що і доводить теорему 4.

Розглянемо множину розбиттів n-елементної множини на підмножини. Впорядкуємо цю комбінаторну множину з використанням рекурентно-періодичного методу для підмножин W_η, де η — кількість підмножин $w_l \subset w$, на які розбивається базова множина $A = (a_1, \ldots, a_n)$, ξ_l — кількість елементів у підмножині $w_l \subset w$, $1 \in \{1\ldots, \eta\}$.

Теорема 5. Значення послідовностей, які задають кількість розбиттів n-елементної множини на підмножини у їхній підмножині W_η для $\eta = 2$, упорядкованій з використанням рекурентно-періодичного методу генерування комбінаторних конфігурацій, утворюють арифметичний трикутник та є фігурними числами.

Доведення. Застосуємо метод математичної індукції для підмножин ізоморфних розбиттів W_η, $\eta = 2$.

Для $\xi_1 = n-1$, $\xi_2 = 1$, кількість розбиттів у підмножині W_2 дорівнює n.

Для $\xi_1 = n-2$, $\xi_2 = 2$, кількість інтервалів σ-го рангу дорівнює $n-1$. Кількість інтервалів $(\sigma-1)$-го рангу в кожному з них подамо послідовністю $1, 2, 3, \ldots, n-1$. Звідси, кількість w у W_2 для $\xi_1 = n-2$, $\xi_2 = 2$ дорівнює $1+2+3+\ldots+n-1 = \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{n!}{(n-2)!\,2!}$.

Аналогічно для значень $\xi_1 = n-3$, $\xi_2 = 3$, кількість інтервалів σ-го рангу становить $n-2$, а кількість w у W_2 дорівнює $1+3+6+10+\left(\dfrac{j(j+1)}{2}\right)_{n-2} = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6} = \dfrac{n!}{(n-3)!\,3!}$, $j \in \{1, \ldots, n-2\}$.

Для $\xi_1 = n-4$, $\xi_2 = 4$, кількість w у W_2 дорівнює $1+4+10+20+\ldots$ $\ldots+\left(\dfrac{j(j-1)(j-2)}{6}\right)_{n-3} = \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = \dfrac{n!}{(n-4)!\,4!}$.

Звідси кількість розбиттів у підмножині W_2 для $\eta = 2$ дорівнює $\dfrac{n!}{(n-j)!\,j!}$, що відповідає виразу $\dfrac{n!}{\xi_1!\,\xi_2!}$. Якщо $\xi_1 = \dfrac{n}{2}$, $\xi_2 = \dfrac{n}{2}$, то кількість w у W_2 дорівнює $\dfrac{(n-1)!}{\left(\dfrac{n-2}{2}\right)!\left(\dfrac{n}{2}\right)!} = \dfrac{n!}{\left(\dfrac{n}{2}\right)!\left(\dfrac{n}{2}\right)!\,2!}$, $n \in \{2, 4, \ldots, 2j\}$.

З цього випливає, що одержані послідовності, суми членів яких задають кількість w у підмножині ізоморфних розбиттів W_2, утворюють арифметичний трикутник (трикутник Паскаля) та є фігурними числами, що і доводить теорему 5.

ВИСНОВКИ

Завдяки застосуванню рекурентно-періодичного методу, що ґрунтується на властивості періодичності, можна у процесі генерування комбінаторних конфігурацій прослідкувати динаміку утворення фрактальних структур в комбінаториці. Це дає змогу розв'язувати перелічувальні задачі. Під час підрахунку кількості комбінаторних конфігурацій утворюються арифметичні послідовності, які є многокутними та фігурними числами. Суми цих послідовностей задають формули комбінаторних чисел.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Турбин А.Ф, Працевитый Н.В. Фрактальные множества, функции, распределения. Киев: Наук. думка, 1992. 207 с.
2. Савченко І.О. Фрактальний аналіз множин неповних сум числових рядів: автореф. дис. … канд. фіз.-мат. наук. Київ, 2016. 20 с.
3. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. Москва: Постмаркет, 2000. 352 с.
4. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. Ижевск: ИКИ, 2010. 656 с.
5. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. Москва: Мир, 1990. 440 с.
6. Рыбников К.А. Введение в комбинаторный анализ. Москва: Изд-во Москов. ун-та, 1985. 308 с.
7. Холл М.Х. Комбинаторика. Москва: Мир, 1970. 424 с.
8. Гульден Я., Джексон Д. Перечислительная комбинаторика. Москва: Наука, 1990. 503 с.

9. Тимофієва Н.К. Теоретико-числові методи розв'язання задач комбінаторної оптимізації: дис. … д-ра техн. наук. Київ, 2007. 374 с.

10. Тимофієва Н.К. Про фрактальну структуру знакових комбінаторних просторів. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки.* 2017. Вип. 15. С. 236–242.

11. Депман И.Я. История арифметики. Москва: Госуд. учебно-педагогич. изд-во Минист. просвещ. РСФСР, 1959. 423 с.

Надійшла до редакції 15.02.2019

Н.К. Тимофеева

О ФРАКТАЛЬНОЙ ПРИРОДЕ КОМБИНАТОРНЫХ МНОЖЕСТВ И НАХОЖДЕНИИ ФОРМУЛ КОМБИНАТОРНЫХ ЧИСЕЛ

Аннотация. Рассмотрена фрактальная структура комбинаторных множеств, которая образуется в процессе упорядочения комбинаторных конфигураций. С использованием фрактальных свойств оговоренных множеств разработан подход к решению перечислительных задач в комбинаторике. При нахождении комбинаторных чисел используются арифметические последовательности.

Ключевые слова: комбинаторика, фракталы, комбинаторные конфигурации, разбиение натурального числа, арифметический треугольник, комбинаторные числа.

N.K. Timofieva

ON THE FRACTAL NATURE OF COMBINATORIAL SETS AND FINDING OF FORMULAS FOR COMBINATORIAL NUMBERS

Abstract. The fractal structure of combinatorial sets, which is formed in ordering of combinatorial configurations, is considered. Using the fractal properties of contracted sets, an approach to solving enumeration problems in combinatorics is developed. Arithmetic sequences are used to find combinatorial numbers.

Keywords: combinatorics, fractals, combinatorial configurations, partitioning of a natural number, arithmetic triangle, combinatorial numbers.

Тимофієва Надія Костянтинівна,
доктор техн. наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник Міжнародного науково-навчального центру інформаційних технологій та систем НАН та МОН України, Київ, e-mail: TymNad@gmail.com.