

И. В. Янчевский, В. В. Кириченко

**НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ  
СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В АКУСТИЧЕСКОМ СЛОЕ**

*Национальный технический университет Украины  
«Киевский политехнический институт им. Игоря Сикорского»,  
пр. Победы, 37, 03056, Киев, Украина, e-mail: i.yanchevskiy@kpi.ua*

**Abstract.** An analytical-numerical approach for the study of processes in an hydroelectroelastic system «spherical shell – acoustic layer» is proposed. The disturbed motion of a fluid and a shell is modeled by the relations of the acoustic approximation and theory of thin electroelastic shells. Using the method of «image sources», the method of separation of variables, and the Laplace integral transform in the time coordinate, the problem is reduced to an infinite system of Volterra's integral equations with retarded arguments, which is solved numerically using the method of reduction. The numerical results are given for the case of excitation of the shell as a point source by an electrical load in the form of a sinusoidal impulse.

**Keywords:** acoustic layer, electroelastic spherical shell, method of image source, Laplace integral transform.

**Введение.**

Исследование волновых процессов в ограниченных акустических средах представляет собой достаточно сложное и, вместе с тем, важное направление гидроакустики. Из множества прикладных задач актуальными являются задачи, в которых рассматривается нестационарное взаимодействие акустических волн как с границами среды, так и с погруженными в нее деформируемыми электроупругими (пьезоактивными) телами. Такие задачи нестационарной гидроэлектроупругости имеют большое теоретическое и практическое значение [3, 5, 9, 12, 14], поскольку они позволяют выявить закономерности поведения пьезопреобразователей (излучателей, приемников) при кратковременных электрических и/или механических воздействиях и проследить эволюцию динамического процесса в целом.

К настоящему времени получены численно-аналитические решения нестационарных задач гидроэлектроупругости об излучении/приеме и дифракции в акустическом полупространстве волн, возбуждаемых сферическими или цилиндрическими электроупругими оболочками [1, 5, 8]. Не менее важными, с точки зрения практического приложения, являются задачи исследования нестационарных акустических полей в ограниченных пространствах, в частности, в областях, ограниченных двумя параллельными границами [6, 13, 14]. Основная сложность решения таких задач связана с учетом влияния граничных поверхностей, формирующих поле многократно отраженных волн. Применяемые при этом методы решения, как правило, связаны с использованием метода «мнимых» источников, преобразованием Лапласа для временной координаты и сведением задачи к численному решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений с привлечением метода редукции.

В работе [14], в частности, получено решение задачи об исследовании волновых процессов в системе «электроупругая цилиндрическая оболочка – акустический слой»

при нестационарном нагружении оболочки. При этом принятые в данной работе выражения для граничных условий позволяют смоделировать различные свойства границ акустического слоя, в т.ч. относящиеся к классу импедансных. Настоящая работа является логическим дополнением к полученным в публикации [14] результатам. Целью настоящей работы является построение точного численно-аналитического решения задачи о волновых процессах в акустическом слое, генерируемых расположенной в нем тонкостенной сферической оболочкой из пьезоактивного материала при ее импульсном электромеханическом нагружении.

### 1. Постановка задачи.

В декартовой системе координат  $Oxy$  рассматривается акустический слой, ограниченный двумя параллельными плоскостями  $y = l_1$  и  $y = -l_2$ . Акустическая среда считается идеальной сжимаемой жидкостью и для моделирования ее движения привлекаются классические соотношения [14]

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{c_w^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}; \quad p = -\rho_w \frac{\partial \Phi}{\partial t}; \quad \vec{v} = \vec{\nabla} \Phi. \quad (1)$$

Здесь  $\Phi$  – потенциал скорости  $\vec{v}$  частиц среды;  $p$  – гидродинамическое давление;  $c_w$ ,  $\rho_w$  – скорость распространения звука и плотность среды.

Считается, что верхняя граница среды ( $y = l_1$ ) является свободной поверхностью, а нижняя ( $y = -l_2$ ) взаимодействует с жесткой стенкой. Тогда граничные условия для функции  $\Phi$  должны обеспечивать равенство нулю давлений на  $y = l_1$  и отсутствие нормальных к стенке перемещений на  $y = -l_2$

$$\Phi|_{y=l_1} = 0; \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{y=-l_2} = 0, \quad (2)$$

которые дополним условием убывания волны давления на бесконечности –

$$\lim_{x^2+y^2+z^2 \rightarrow \infty} \Phi = 0. \quad (3)$$

В более общем случае на плоских границах можно рассмотреть импедансное условие [14]

$$\left( \zeta_1 \Phi + \zeta_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \Big|_{y=l_1, -l_2} = 0, \quad (4)$$

постоянные  $\zeta_{1,2}$  которого характеризуют свойства границ слоя: при  $\zeta_1 = 0$  следует вариант жесткой стенки, а при  $\zeta_2 = 0$  – свободной поверхности.

Источником осесимметричных нестационарных волн в акустической среде является погруженная в нее электроупругая сферическая оболочка, центр которой совмещен с началом декартовой системы координат. Колебания оболочки обусловлены заданным механическим нагружением  $q_0(t)$ , равномерно распределенным на внутренней ее поверхности, и/или разностью электрических потенциалов  $V_0$ , подводимого к сплошным токопроводящим ее покрытиям. При этом считается, что оболочка состоит из двух жестко соединенных между собой тонких слоев, внешний слой из которых имеет постоянную толщину  $h_m$  и изготовлен из упругого материала, а внутренний, толщиной  $h_p$  – из поляризованной по толщине пьезокерамики.

В предположении применимости обобщенных гипотез Кирхгофа – Лява система уравнений движения оболочки в связанной с ней сферической системе координат  $(r, \theta)$  имеет вид [4]

$$\begin{aligned}
D_1 u_0 + D_2 w + \alpha^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} &= -(1 + \zeta_p) \frac{\partial V}{\partial \theta}; \\
D_3 u_0 + D_4 w + \alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \beta q + \left[ 2V - \zeta_p \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \right].
\end{aligned} \tag{5}$$

Расчетные выражения для входящих в (5) постоянных коэффициентов и дифференциальных операторов  $D_i$  ( $i = \overline{1, 4}$ ) совпадают с используемыми в публикациях [4, 14], поэтому в настоящей работе не приводятся. Совпадают также формулы для безразмерных переменных: перемещения точек поверхности приведения в радиальном и окружном направлениях  $w(t, \theta)$  и  $u_0(t, \theta)$ , линейные размеры отнесены к радиусу поверхности приведения оболочки  $R_0$ ; электрический сигнал  $V(t, \theta) = V_0(t) - k - D_N/e_1$ ; время  $t - k R_0/c_w$ ; нормальная к поверхности приведения нагрузка  $q(\theta, t) - k \rho_w c_w^2$ .

Следует отметить, что функция  $q$  (5) содержит как известное механическое нагружение оболочки  $q_0(t)$ , так и неизвестное гидродинамическое давление со стороны внешней среды  $p -$

$$q = q_0 - p|_{r=R}. \tag{6}$$

Для оболочки должно также выполняться условие безотрывного контакта со средой

$$\frac{\partial w}{\partial t} = v_r|_{r=R}. \tag{6''}$$

С использованием принятого обезразмеривания система уравнений движения среды (1) и соотношения для давления  $p$  и скорости частиц среды в радиальном направлении  $v_r$  примут вид

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}; \quad p = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}; \quad v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}. \tag{7}$$

Начальные условия – нулевые.

## 2. Метод решения.

Задача решается с использованием метода «мнимых источников» [10], предполагающего «искусственное» введение в расчетную модель дополнительных, «мнимых» генераторов нестационарных волн для удовлетворения граничных условий (4). С учетом осесимметрии постановки задачи, центры вспомогательных источников будут располагаться на оси ординат декартовой системы, симметрично от плоскостей среды [13].

Положения координат центров «мнимых» ( $j \geq 1$ ) источников возмущений в акустической среде должны удовлетворять следующему выражению:

$$y_j = (-1)^{j+1} \cdot 2R_j; \quad 2R_j = [2l_1 + 2l_2] \cdot \tilde{E} \left( \frac{j-2}{4} \right) + 2l_1 \cdot \delta_{0, \tilde{e}((j-1)/4)} + 2l_2 \cdot \delta_{0, \tilde{e}((j-2)/4)}, \tag{8}$$

где  $\tilde{E}(x) = x - \tilde{e}(x)$ ;  $\tilde{e}(x)$  – функция, выделяющая дробную часть числа  $x$ .

Специфику выражения (8) можно объяснить стремлением авторов к автоматизации последующего машинного счета и минимизации количества вспомогательных коэффициентов.

Картину расположения действительного и «мнимых» источников иллюстрирует рис. 1.

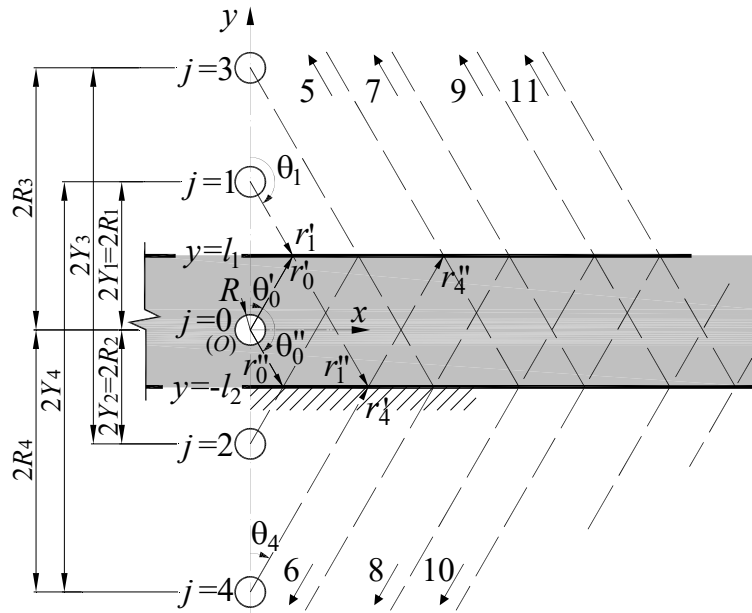


Рис. 1

С центром каждого источника свяжем сферические системы координат  $(r_j, \theta_j)$ , где  $r_j$  – расстояние от центра системы до расчетной точки;  $\theta_j$  – угол между осью ординат  $y$  и линией, соединяющей центр  $j$ -го источника с расчетной точкой. Тогда акустическое поле в среде, в силу линейности задачи, можно представить в виде суперпозиции формируемого сферической оболочкой поля ( $j = 0$ ) и полей от «мнимых источников» ( $j \geq 1$ )

$$\Phi = \sum_{j=0}^J \phi_j . \quad (9)$$

С использованием интегрального преобразования Лапласа по временной координате ( $s$  – параметр преобразования) в пространстве изображений как суммарный потенциал  $\Phi$ , так и каждая ее составляющая  $\phi_j$ , должны удовлетворять волновому уравнению  $\Delta \phi^L = s^2 \phi^L$  (см. (7)), общее решение которого в сферических координатах с учетом условия затухания при  $r \rightarrow \infty$  и нулевых начальных условиях выражается через модифицированную функцию Бесселя второго рода  $K_n$  [1, 13]

$$\phi_j^L(s, r_j, \theta_j) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{j,n}^L(s) \frac{1}{\sqrt{sr_j}} e^{sR} K_{n+1/2}(sr_j) P_n(\cos \theta_j) \quad (j = \overline{0, J}). \quad (10)$$

Здесь индексом  $L$  обозначены трансформированные по Лапласу функции ( $f^L(s, z) = L\{f(t, z)\}$ );  $A_{j,n}^L$  – произвольные функции, которые определяются из граничных условий;  $R = 1$  – безразмерный радиус оболочки.

Учитывая, что в расчетных точках на плоскостях  $y = l_1$  и  $y = -l_2$  имеют место равенства  $r_j = r_{e^{[j+4\bar{z}(j/2)-3]}}$  и  $\theta_j = \pi - \theta_{e^{[j+4\bar{z}(j/2)-3]}}$  (рис. 1),

где  $\hat{e}(x) = x \cdot H(x)$ ;  $H(x)$  – единичная функция Хевисайда; и, кроме того, для полиномов Лежандра справедливо соотношение  $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$  [2] из формул (9), (10) и (4) вытекает следующее рекуррентное соотношение между коэффициентами  $A_{j,n}^L(s)$  при  $j \geq 1$

$$A_{j,n}^L(s) = (-1)^n \kappa_j A_{\hat{e}[j+4\hat{e}(j/2)-3],n}^L(s). \quad (11)$$

Здесь  $\kappa_j = (\zeta_{2,j} - \zeta_{1,j}) / (\zeta_{2,j} + \zeta_{1,j})$ . В случае идеализированных граничных условий (2) получим  $\kappa_j = (-1)^j$ .

Потенциалы  $\phi_j$  ( $j = \overline{1, J}$ ) из формулы (9) могут быть переписаны в сферических координатах  $(r_0, \theta_0)$  при помощи трансляционных теорем сложения сферических функций. В литературе, посвященной задачам многократного рассеяния, представлено значительное количество публикаций с изложением скалярных и векторных теорем сложения. В данной работе будут использованы обозначения и теоремы, приведенные в публикациях [1, 13], которые применительно к рассматриваемой задаче при  $r_0 < 2R_j$  имеют вид

$$\frac{1}{\sqrt{sr_j}} K_{n+1/2}(sr_j) P_n(\cos \theta_j) = \sum_{m=0}^{\infty} T_{mn}^{(j)}(s2R_j) \frac{1}{\sqrt{sr_0}} I_{m+1/2}(sr_0) P_m(\cos \theta_0), \quad (12)$$

где

$$T_{mn}^{(j)}(s2R_j) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (2m+1) \sum_{\sigma=|m-n|}^{m+n} (-1)^{\sigma j} b_{\sigma}^{(n0m0)} \frac{1}{\sqrt{s2R_j}} K_{\sigma+1/2}(s2R_j).$$

Здесь  $I_n$  – модифицированная функция Бесселя;  $b_{\sigma}^{(n0m0)}$  – коэффициенты Клебша – Гордона;  $2R_j = |y_j|$  – расстояние между полюсами систем координат  $(r_0, \theta_0)$  и  $(r_j, \theta_j)$  (см. (8)).

Представления (9), (10) и (12) позволяют записать полный потенциал возмущений в сферических координатах  $(r_0, \theta_0)$  (далее индекс 0 опущен):

$$\begin{aligned} \Phi^L = & \sum_{n=0}^{\infty} A_{0,n}^L(s) e^{sr} \frac{1}{\sqrt{sr}} K_{n+1/2}(sr) P_n(\cos \theta) + \\ & + \sum_{j=1}^J \sum_{n=0}^{\infty} A_{j,n}^L(s) e^{sr} \sum_{m=0}^{\infty} T_{mn}^{(j)}(s2R_j) \frac{1}{\sqrt{sr}} I_{m+1/2}(sr) P_m(\cos \theta). \end{aligned} \quad (13)$$

Отметим, что модифицированные функции Бесселя с полуцелым индексом представимы в виде многочленов по обратным степеням параметра преобразования  $s$  [2]

$$\frac{e^{sz}}{\sqrt{sz}} K_{n+1/2}(sz) = \frac{1}{z} g_{1,n}^L(s, z); \quad \frac{e^{-sz}}{\sqrt{sz}} I_{n+1/2}(sz) = \frac{1}{z} f_{1,n}^L(s, z),$$

где

$$g_{m,n}^L(s, z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{s^m} \sum_{k=0}^n \frac{(n+k)!}{k!(n-k)!(2sz)^k}; \quad f_{m,n}^L(s, z) = \frac{1}{\pi} g_{m,n}^L(s, -z).$$

В результате выражение (13) для потенциальной функции  $\Phi^L$  после изменения порядка суммирования может быть представлено в виде

$$\Phi^L(s, r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n^L(s, r) P_n(\cos \theta). \quad (14)$$

Здесь

$$\Phi_n^L(s, r) = e^{-s(r-R)} \frac{1}{r} A_{0,n}^L(s) g_{1,n}^L(s, r) + \sum_{j=1}^J e^{-s(2R_j-R-r)} \frac{1}{r} \sum_{m=0}^{\infty} A_{j,m}^L(s) Q_{mn}^{(j)}(s) f_{1,n}^L(s, r);$$

$$Q_{mn}^{(j)}(s) = e^{s2R_j} T_{mn}^{(j)}(s2R_j) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{2m+1}{2R_j} \sum_{\sigma=|m-n|}^{m+n} (-1)^{\sigma j} b_{\sigma}^{(n0m0)} g_{1,\sigma}^L(s, 2R_j).$$

Тогда для гидродинамических параметров среды с учетом соотношений (7) в пространстве изображений по Лапласу будут справедливы формулы

$$p^L(s, r, \theta) = -s\Phi^L = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^L(s, r) P_n(\cos \theta); \quad (15)$$

$$v_r^L(s, r, \theta) = \frac{\partial \Phi^L}{\partial r} = \sum_{n=0}^{\infty} v_n^L(s, r) P_n(\cos \theta). \quad (16)$$

Здесь

$$p_n^L(s, r) = \frac{-1}{r} \left[ e^{-s(r-R)} A_{0,n}^L(s) g_{2,n}^L(s, r) + \sum_{j=1}^J e^{-s(2R_j-R-r)} \sum_{m=0}^{\infty} A_{j,m}^L(s) Q_{mn}^{(j)}(s) f_{2,n}^L(s, r) \right];$$

$$v_n^L(s, r) = \frac{1}{r} \left[ e^{-s(r-R)} A_{0,n}^L(s) G_n^L(s, r) + \sum_{j=1}^J e^{-s(2R_j-R-r)} \sum_{m=0}^{\infty} A_{j,m}^L(s) Q_{mn}^{(j)}(s) F_n^L(s, r) \right],$$

где приняты следующие обозначения:

$$G_n^L(s, z) = \frac{n}{z} g_{1,n}^L(s, z) - g_{0,n+1}^L(s, z); \quad F_n^L(s, z) = \frac{n}{z} f_{1,n}^L(s, z) - f_{0,n+1}^L(s, z).$$

Общее решение трансформированной по Лапласу системы уравнений (5) ищем в виде ряда по собственным формам колебаний оболочки [4] –

$$w^L(s, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^L(s) P_n^0(\cos \theta); \quad u_0^L(s, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^L(s) P_n^1(\cos \theta), \quad (17)$$

где  $a_n^L(s)$ ,  $b_n^L(s)$  – коэффициенты, подлежащие определению;  $P_n^0 = P_n$  и  $P_n^1 = dP(\cos \theta)/d\theta$  – присоединенные функции Лежандра.

Аналогичное (17) представление имеет место для функций  $V^L$  и  $q^L = q_0^L - p^L|_{r=R}$  (6'), описывающих электромеханическое нагружение оболочки:

$$q^L = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n^L(s) - p_n^L|_{r=R}) P_n(\cos \theta); \quad V^L = \sum_{n=0}^{\infty} d_n^L(s) P_n(\cos \theta), \quad (18')$$

коэффициенты которых, исходя из допущений  $V(t, \theta) = V_0(t)$  и  $q_0(t, \theta) = q_0(t)$ , равны

$$c_0^L = q_0^L(s); \quad d_0^L = V_0^L(s); \quad c_n^L = d_n^L = 0 \quad \text{при } n \geq 1. \quad (18'')$$

После подстановки (17) и (18) в трансформированные по Лапласу уравнения (5), получаем систему алгебраических уравнений относительно искомым коэффициентов разложений  $a_n^L(s)$  и  $b_n^L(s)$ :

$$a_n^L \xi_n^{(2)} + b_n^L (\xi_n^{(1)} + \alpha^2 s^2) = 0; \quad a_n^L (\xi_n^{(4)} + \alpha^2 s^2) + b_n^L \xi_n^{(3)} = \beta (c_n^L - p_n^L) + \xi_n^{(6)} d_n^L, \quad (19)$$

где  $\xi_n^{(6)} = 2\delta_{0,n}$ . Расчетные выражения для других коэффициентов совпадают с используемыми в [4].

Решение системы (19) с учетом (18'') имеет вид

$$a_0^L = \left[ \beta(q_0^L - p_0^L|_{r=R}) + 2V_0^L \right] \bar{f}^L; \quad a_n^L = -\beta p_n^L \bar{g}^L; \quad b_n^L = \beta \frac{\xi_n^{(2)}}{D_n} p_n^L \quad \text{при } n \geq 1. \quad (20)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\bar{f}^L(s) = \frac{1}{2(1+\nu) + \alpha^2 s^2}; \quad \bar{g}^L(s) = \frac{\xi_n^{(1)} + \alpha^2 s^2}{D_n};$$

$$D_n(s) = (\xi_n^{(4)} + \alpha^2 s^2)(\xi_n^{(1)} + \alpha^2 s^2) - \xi_n^{(2)} \xi_n^{(3)}.$$

Очевидно, что коэффициенты  $a_n^L(s)$  и  $b_n^L(s)$  (20) связаны с неизвестными  $A_{j,n}^L(s)$  (10), (11), (14) посредством трансформированного по Лапласу граничного условия (6'')

$$sW^L = \nu_r^L|_{r=R}. \quad (21)$$

В результате подстановки (15) – (17) и (20) в (21) получим бесконечную систему алгебраических уравнений относительно  $A_{j,n}^L(s)$  –

$$\begin{aligned} & A_{0,0}^L \left[ G_0^L|_{r=R} - \beta \cdot \bar{f}^L \cdot g_{1,0}^L|_{r=R} \right] + \\ & + \sum_{j=1}^J e^{-s2(R_j-R)} \sum_{m=0}^{\infty} A_{j,m}^L Q_{m0}^{(j)} \left[ F_0^L|_{r=R} - \beta \cdot \bar{f}^L \cdot f_{1,0}^L|_{r=R} \right] = R(\beta q_0^L + 2V_0^L) s \bar{f}^L; \\ & A_{0,n}^L \left[ G_n^L|_{r=R} - \beta \cdot \bar{g}^L \cdot g_{1,n}^L|_{r=R} \right] + \\ & + \sum_{j=1}^J e^{-s2(R_j-R)} \sum_{m=0}^{\infty} A_{j,m}^L Q_{mn}^{(j)} \left[ F_n^L|_{r=R} - \beta \cdot \bar{g}^L \cdot f_{1,n}^L|_{r=R} \right] = 0 \quad (n \geq 1). \end{aligned} \quad (22)$$

При этом между  $A_{j,n}^L(s)$  ( $j \geq 1$ ) и  $A_{0,n}^L(s)$  справедливо соотношение

$$A_{j,n}^L(s) = (-1)^n A_{0,n}^L(s) \cdot \Pi_j; \quad \Pi_j = \prod_{k=1}^{E[(j+1)/2]} \kappa_{k+2E[(j+1)/2]},$$

которое записано на основании (11) с учетом равенства  $\kappa_j = \kappa_{j+2}$ .

Решение системы (22) строится в пространстве оригиналов. В результате обращения, которое может быть выполнено аналитически, получим бесконечную систему интегральных уравнений Вольтерры относительно  $A_{j,n}(t)$ . Оригиналы входящих в (22) функций являются или табличными [11], или могут быть построены на основании приведенных в монографии [1] данных. В частности, для  $g_{m,n}(t, z) = L^{-1}\{g_{m,n}^L(t, z)\}$  получено следующее выражение:

$$g_{m,n}(t, z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^n \frac{(n+k)!}{k!(n-k)!(2z)^k} \cdot \frac{t^{m+k-1}}{(m+k-1)!}. \quad (23)$$

Ядра  $G_n(t, z)$  и  $F_n(t, z)$  представляют собой линейную комбинацию функций  $g_{n,m}(t, z)$  и  $f_{n,m}(t, z)$ .

Вид самой системы интегральных уравнений не приводится с целью сокращения объема данной работы. Вместе с тем отметим, что ее структура подобна системе (23) в публикации [14], как и алгоритм ее численного решения. Несложно показать, что полученная в результате обращения бесконечная система интегральных уравнений является сходящейся при любых конечных значениях времени исследования и допускает редуцирование.

Располагая значениями  $A_{j,n}(t)$ , на последующем этапе вычисляются гидродинамические параметры среды и нестационарные колебания электроупругой оболочки.

### 3. Численные результаты.

При проведении численных экспериментов считалось, что акустической средой является вода ( $c_w = 1500$  м/с;  $\rho_w = 1000$  кг/м<sup>3</sup>), слой которой имеет безразмерную толщину  $l_1 + l_2 = H = 20$ . Границы слоя моделировались параметрами  $\kappa_j = -1$  ( $j = 1, 3, 5, \dots$ ) и  $\kappa_j = 0,9$  ( $j = 2, 4, 6, \dots$ ) [14]. Центр оболочки расположен на расстоянии  $l_2 = 0,3 H$  от нижней границы. Считается, что оболочка составлена из слоя пьезокерамики марки PZT-5 толщиной  $h_p = 0,04$  и слоя титанового сплава ВТ-6 ( $h_m = 0,02$ ), материальные характеристики которых можно найти в [4, 7].

В данном конкретном случае (когда  $R \ll \min(l_1, l_2)$ ) в первом приближении оболочку можно рассматривать как точечный источник и влиянием отраженных волн на ее колебания можно пренебречь. Данное допущение приводит к существенному упрощению расчетной системы уравнений (22), в частности, учетом лишь 0-го члена в разложении (10) –  $A_{j,n}(t) = 0$  ( $n \geq 1$ ). При этом на основании (22) и (23) следует, что функция  $A_{0,0}(t)$  является решением интегрального уравнения Вольтерры II-го рода

$$\begin{aligned} A_{0,0}(t) + \int_0^t A_{0,0}(\tau) \left[ \frac{1}{R} + \frac{\beta}{\alpha^2} \cos\left(\frac{\sqrt{2(1+\nu)}}{\alpha}(t-\tau)\right) \right] d\tau = \\ = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{R}{\alpha^2} \int_0^t [\beta q_0(\tau) + 2V_0(\tau)] \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{2(1+\nu)}}{\alpha}(t-\tau)\right) d\tau. \end{aligned} \quad (24)$$

Уравнение (24) решается численно с привлечением классических подходов, в т.ч. рекуррентных соотношений. В частности, для дискретизации интегралов применялась квадратурная формула средних прямоугольников с шагом  $\Delta t = R/20$ .

Далее с использованием соотношений (7) и (9) – (11), т.е. без привлечения теорем сложения, можно вычислить гидродинамическое давление в произвольной точке акустической среды

$$\begin{aligned} p^L = \sum_{j=0}^J p_j^L = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{j=0}^J e^{-s(r_j-R)} \frac{1}{r_j} A_{j,0}^L(s) \Rightarrow \\ \Rightarrow p = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{j=0}^J \frac{1}{r_j} H(t-(r_j-R)) A_{j,0}(t-(r_j-R)). \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь  $r_j$  – расстояние от полюса  $j$ -го источника до исследуемой точки; число  $J$  удовлетворяет неравенствам  $r_j \leq T + R$  и  $r_{j+1} > T + R$ ,  $T$  – время исследования.

На рис. 2 представлены вычисленные на основании (25) давления в точках с координатами  $(H, -3l_2/4)$  и  $(3H, -3l_2/4)$  прямоугольной системы, центр которой совпадает с центром оболочки. На рис. 2, б эти результаты обозначены как  $r \approx H$  и  $r \approx 3H$ , соответственно. Кривая  $r = R$  иллюстрирует профиль давления непосред-



ственно на поверхности излучающей оболочки ( $p|_{r=R} = -\sqrt{\pi/2} \cdot A_{0,0}(t)/R$ ). При этом считалось, что ее колебания обусловлены действием конечного синусоидального электрического импульса –  $V = \sin(\omega t) \cdot H(T_V - t)$  (рис. 2, а). Здесь  $T_V = 5,75 \cdot (2\pi/\omega)$  – продолжительность действия электрического сигнала;  $\omega = \sqrt{2(1+\nu)}/\alpha$  – частота пульсирующих колебаний оболочки в вакууме. Конфигурация электрического нагружения оболочки и гидродинамическое давление в расчетных точках показаны на рис. 2.

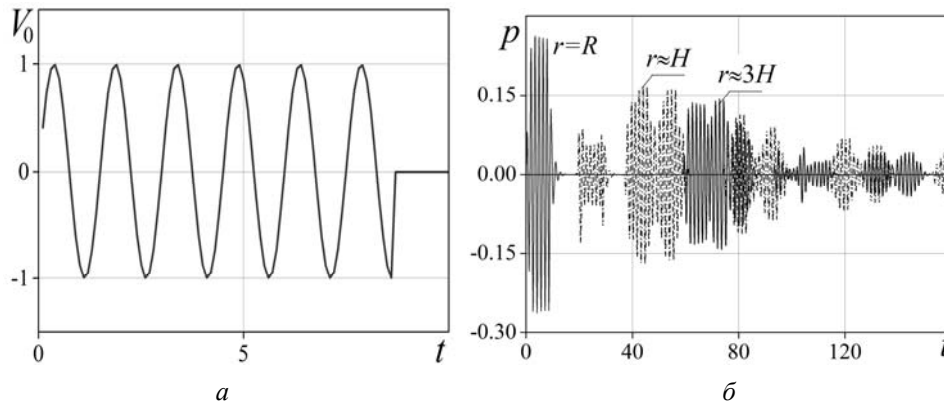


Рис. 2

Из представленных на рис. 2 графиков следует, что при приложении нагрузки синусоидального профиля с резонансной частотой амплитуда давления на поверхности оболочки линейно возрастает до определенного значения, однако после окончания действия электрической нагрузки колебания достаточно быстро затухают. Сформировавшийся профиль акустического импульса распространяется в среде со скоростью  $c_w$ , при этом амплитуда волны в соответствии с общеизвестными законами акустики снижается пропорционально расстоянию до расчетной точки. Наложение акустических импульсов от действительного источника и «мнимых» определяет достаточно сложные характеры изменения профилей давления в расчетных точках (рис. 2, б). Так, в точке  $(3H, -3l_2/4)$  такое наложение приводит к тому, что максимальное значение давления только на ~15% меньше, чем в точке  $(H, -3l_2/4)$ , которая приблизительно в 3 раза ближе к источнику (кривые  $r \approx H$  и  $r \approx 3H$ ).

#### Выводы.

В работе представлен метод численно-аналитического решения задачи о нестационарных колебаниях электроупругой сферической оболочки в акустическом слое постоянной толщины. Движение оболочки описывается уравнениями теории, основанной на обобщенных на случай электромеханики гипотезах Кирхгофа – Лява. Волновые процессы в жидкости моделируются соотношениями акустического приближения. Для плоских поверхностей слоя записаны импедансные граничные условия, позволяющие моделировать различные комбинации свойств этих поверхностей. С использованием метода «мнимых источников», принципа суперпозиций, метода разделения переменных и интегрального преобразования Лапласа по временной координате задача сведена к поэтапному по известным временным интервалам численному решению бесконечной системы интегральных уравнений Вольтерры II-го рода.

Численные эксперименты выполнены для случая, когда расстояние от центра оболочки до ближайшей границы акустической среды значительно превышает радиус оболочки. Сама расчетная модель при этом существенно упрощается. Полученные результаты показали, что при продолжительном акустическом сигнале возможны си-

туации, когда гидродинамическое давление в отдаленных точках получается сопоставимым по значению в точках, которые значительно ближе расположены к источнику возмущенного движения среды.

Полученные результаты могут быть использованы при решении аналогичных задач с другими видами граничных поверхностей акустической области и при решении прикладных задач, относящихся к классу обратных задач гидроэлектроупругости. В частности, задач идентификации положения источника возмущений в слое или конфигурации излучаемого им нестационарного акустического сигнала.

РЕЗЮМЕ. У роботі запропоновано аналітико-чисельний підхід до дослідження процесів у гідроелектропружній системі «сферична оболонка – акустичний шар». Збурений рух рідини та оболонки моделюються співвідношеннями акустичного наближення та теорії тонких електропружних оболонок. З використанням методу «уявних джерел», методу поділу змінних та інтегрального перетворення Лапласа по часовій координаті задача зведена до нескінченної системи інтегральних рівнянь Вольтерри із аргументами з запізненням, яка розв'язується чисельно із залученням методу редукції. Числові результати наведені для випадку збудження оболонки як точкового джерела електричним навантаженням у вигляді синусоїдального імпульсу.

1. *Бабаев А.Э.* Нестационарные волны в сплошных средах с системой отражающих поверхностей. – Киев: Наук, думка, 1990. – 176 с.
2. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений – Москва: Изд-во физ.-мат. лит-ры, 1963. – 1108 с.
3. *Дідковський В.С., Лейко О.Г., Савін В.Г.* Електроакустичні п'єзокерамічні перетворювачі (розрахунок, проектування, конструювання). – Кіровоград: «Імекс-ЛТД». – 2006. – 448 с.
4. *Ковальчук П.С., Янчевський І.В.* Управление колебаниями незамкнутой сферической оболочки из электроупругого материала // 36. наук. праць «Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій». – 2012. – Вип. 18. – С. 79 – 90.
5. *Савин В.Г., Збруцкий А.В., Моргунов И.О.* Нестационарная гидроэлектроупругость сферических пьезоэлектрических преобразователей. – Киев: НТУУ «КПИ», 2013. – 241 с.
6. *Шукуров А.М.* Нестационарные волновые процессы в упругих двусвязных областях, ограниченных сферическими поверхностями и плоскостью // Дисс. докт. физ.-мат. наук. МАИ (ГТУ). – Москва, 2004. – 225 с.
7. *Янчевський І.В.* Вісесиметричні коливання незамкненої електропружної сферичної оболонки при пружному закріпленні краю // 36. наук. ст. «Вісн. Запорізького нац. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки». – 2014. – № 2. – С. 36 – 43.
8. *Guz A.N., Kubenko V.D., Babaev A.E.* Dynamics of Shell Systems Interacting with a Liquid // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, N 3. – P. 260 – 301.
9. *Jbaily A., Yeung R.W.* Piezoelectric devices for ocean energy: A brief survey // J. of Ocean Engineering and Marine Energy. – 2015. – **1**. – P. 101 – 118.
10. *Kubenko V.D., Yanchevskiy I.V.* “Resonance” phenomenon of kinematic excitation by a spherical body in a semi-infinite cylindrical vessel filled with liquid // Acta Mechanica. – 2019. – **230**. – P. 1009 – 1025.
11. *Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I.* Integrals and series [in 5 v.]. Vol. 5: Inverse Laplace Transforms. – New York: Gordon and Breach Science Publ., 1992. – 595 p.
12. *Safaei M., Sodano H.A., Anton S.* A review of energy harvesting using piezoelectric materials: State-of-the-art a decade later (2008-2018) // Smart Materials and Structures. – 2019. – **28**. – P. 113001.
13. *Saliyev A.A., Tarlakovskii D.V., Shukurov A.M.* The propagation of non-stationary waves from a spherical cavity in an acoustic layer // J. of Appl. Mathematics and Mechanics. – 2008. – **72**. – P. 410 – 416.
14. *Yanchevskii I.V.* Nonstationary Vibrations of Electroelastic Cylindrical Shell in Acoustic Layer // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 4. – P. 431 – 442.

Поступила 04.03.2019

Утверждена в печать 09.07.2020