

С. Ю. Бабич<sup>1</sup>, Н. Н. Дихтярук<sup>2</sup>

ПЕРЕДАЧА НАГРУЗКИ ОТ БЕСКОНЕЧНОГО НЕОДНОРОДНОГО  
СТРИНГЕРА К ЗАЩЕMLЁННОЙ ОДНОЙ ГРАНЬЮ УПРУГОЙ ПОЛОСЕ  
С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

<sup>1</sup> *Институт механики им. С. П. Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: desc@jntech.kiev.ua*  
<sup>2</sup> *Хмельницкий национальный университет, ул. Институтская, 11,  
29016, Хмельницкий, Украина; e-mail: mega-dihtyaruk@ukr.net*

**Abstract.** Within the framework of the linearized theory of elasticity, the solution is obtained for the plane contact problem on the transfer of the horizontal load from the weakly inhomogeneous infinite in both directions stringer into the stripe with initial stresses. The study is carried out in the general case of the theory of large (finite) initial deformations and various versions of the theory of small initial deformations with an arbitrary form of the elastic potential. The solution of the problem on finding the normal and tangential contact stresses is reduced to the recurrent systems of integro-differential equations, solutions of which are constructed by the orders of a small parameter. The zeroth approximation is built by the integral Fourier transform. The contact stresses expressions are represented by the Fourier integrals.

**Key words:** contact problem, linearized theory of elasticity, elastic strip, initial (residual) tension, initial deformation.

**Введение.**

Одним из наиболее распространенных на практике способов передачи внешних усилий является контактное взаимодействие. В связи с этим исследование вопросов контактного взаимодействия (контактные задачи) твердых тел представляется весьма актуальной проблемой. Эта проблема актуальна как с точки зрения развития фундаментальных разработок по механике твердого деформируемого тела, так и с точки зрения приложений к различным отраслям современной техники. Особенно широкое применение теория контактных задач находит в машиностроении, так как передача усилий в узлах и механизмах машин сопровождается контактным взаимодействием деталей [14, 15, 19]. Методы, развиваемые в теории контактных задач, позволяют найти распределение давлений в местах контакта, изучить концентрацию напряжений и разработать критерии ее снижения. Одним из важных факторов при контактном взаимодействии (наряду с другими) является учёт начальных напряжений [1 – 3, 6, 8, 9]. Несмотря на существенное достижение в развитии контактных задач, вопрос учета начальных напряжений при контактном взаимодействии остался почти полностью неразработанным до последнего времени. Как известно, практически во всех элементах конструкции присутствуют начальные напряжения. Последние могут быть вызваны различного рода причинами. Например, технологическими операциями, проводимыми при изготовлении целого ряда материалов или сборкой конструкций. В земной коре начальные напряжения возникают вследствие действия геостатических и геодинамических сил в композитных материалах при технологических процессах их создания; в кровеносных сосудах живых организмов. Начальные напряжения необходимо учитывать при решениях задач о деформировании грунтов (особенно мёрзлых). Кро-

ме того, в упруго пластических телах также могут присутствовать внутренние остаточные напряжения после снятия нагрузок. Иногда целесообразно преднамеренно создавать начальные напряжения (остаточные и технологические) для компенсации тех напряжений, которые возникают в элементах конструкций в процессе работы, и повышают их прочностные характеристики. Таким образом, механика материалов и элементов конструкций, геофизика, сейсмология, механика горных пород, механика композитов, биомеханика, неразрушающие методы определения напряжений и ряд других – такой далеко не полный перечень научных направлений фундаментального и прикладного характера, в которых возникают проблемы, связанные с необходимостью исследования влияния начальных (или остаточных) напряжений или деформаций. Исходя из этого, следует отметить важность необходимости исследования влияния начальных напряжений на напряженно-деформированное состояние в области контакта. Учет начальных напряжений при расчете ответственных элементов конструкций, машин и сооружений позволяет при их создании более эффективно учесть прочностные ресурсы материалов путем правильной оценки запасов прочности и существенно снизить их материалоемкость, сохраняя нужные фундаментальные характеристики в целом. Очень часто с целью увеличения прочности конструкции возникает необходимость усиления некоторых несущих элементов конструкций упругими креплениями (стрингерами). Результаты исследований в этом направлении при наличии в конструкции начальных напряжений описаны в работах [2, 3, 17, 19]. Результаты данной работы отличаются от ранее известных тем, что здесь впервые рассматривается исследование контактного взаимодействия предварительно напряжённой полосы с бесконечным неоднородным стрингером.

### §1. Постановка задачи и исходные разрешающие уравнения.

Пусть упругая однородная полоса толщины  $t$  с начальными напряжениями закреплена гранью  $y_2 = -t$ , а на другой своей грани  $y_2 = 0$  усилена неоднородным бесконечным упругим стрингером малой толщины  $h$ . Усиленная таким образом бесконечная упругая полоса с начальными напряжениями подвергается воздействию вертикальных и горизонтальных сил интенсивностей  $p_0(y_1)$  и  $q_0(y_1)$ , соответственно (рис. 1).

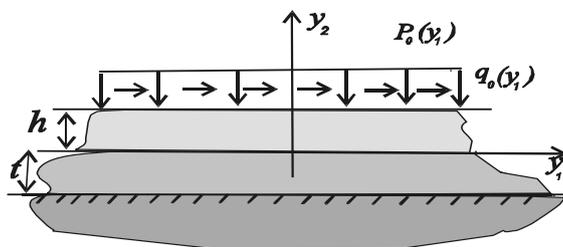


Рис. 1

Осевое напряжение по направлению оси  $Oy_1$  находим по формуле

$$\sigma_{y_1 y_1}(y_1) = E_1 \varepsilon_{y_1 y_1}(y_1); \quad (1.1)$$

$$\varepsilon_{y_1 y_1}(y_1) = \frac{du(y_1)}{dy_1}. \quad (1.2)$$

Здесь  $u(y_1)$  – горизонтальные перемещения точек упругого стрингера.

Используя условия равновесия упругого стрингера, имеем

$$\sigma_{y_1 y_1}(y_1) = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{y_1} [q(t) - q_0(t)] dt \quad (-\infty < y_1 < \infty). \quad (1.3)$$

Учитывая (1.1) – (1.3), находим

$$\frac{du(y_1)}{dy_1} = \frac{1}{E_1 h} \int_{-\infty}^{y_1} [q(t) - q_0(t)] dt \quad (-\infty < y_1 < \infty). \quad (1.4)$$

Из предположения, что стрингер в вертикальном направлении изгибается как обычная балка, примем

$$D \frac{d^4 v(y_1)}{dy_1^4} = p(y_1) - p_0(y_1) \quad (-\infty < y_1 < \infty). \quad (1.5)$$

Здесь  $v(y_1)$  – вертикальные перемещения точек стрингера;  $D$  – жесткость стрингера на изгиб;  $p_0(y_1)$ ,  $p(y_1)$  – интенсивность вертикальных сил.

На линии контакта стрингера с упругой полосой имеют место условия

$$u(y_1) = u_1(y_1); \quad v(y_1) = u_2(y_1), \quad \forall y_1 \in (-\infty < y_1 < \infty), \quad (1.6)$$

где  $u_1(y_1), u_2(y_1)$  – перемещения точек в упругой полосе с начальными напряжениями. Нужно определить закон распределения нормальных и тангенциальных контактных напряжений вдоль линии соединения стрингера с полосой.

Для определения неизвестных перемещений и напряжений по линии контакта стрингера с полосой предварительно решим вспомогательную задачу, а именно: найдём поле упругих перемещений и напряжений в предварительно напряжённой бесконечной полосе от действия приложенной к её свободной грани сосредоточенной силы  $P$ , направленной под произвольным углом  $\alpha_0$ . Используется при этом интегральное преобразование Фурье (рис. 2).

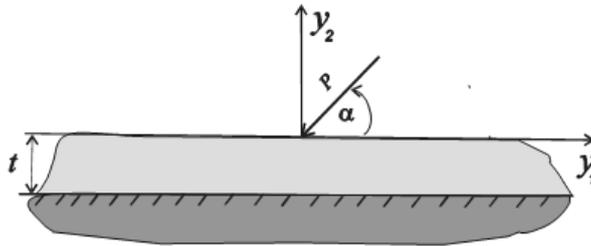


Рис. 2

Исследования проведены в рамках линеаризированной теории упругости при произвольной структуре упругого потенциала в общем виде для теории больших (конечных) и нескольких вариантов теории малых начальных деформаций. При переходе к различным вариантам теории малых начальных деформаций необходимо ввести упрощения, указанные в [1, 4, 5]. Следуя [1, 11, 13], для решения поставленной задачи используем решения для сжимаемых и несжимаемых тел в координатах деформированного начального состояния  $y_i = \lambda_i \chi_i$ . Тогда перемещения, которые определяют начальное состояние в случае однородных начальных напряжений, имеют вид

$$u_m^0 = \delta_{im} (\lambda_i - 1) x_i = \delta_{im} (\lambda_i - 1) \lambda_i^{-1} y_i. \quad (1.7)$$

Здесь  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2$ ) – удлинения, которые характеризуют начальное деформированное состояние;  $x_i$  – лагранжевы координаты;  $u_m^0$  – перемещения, которые определяют начальное состояние;  $\delta_{im}$  – компоненты метрического тензора деформаций. Рассматривается случай плоской деформации, когда  $s_0^{11} \neq 0$ ,  $s_0^{22} = 0$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$ ,  $\lambda_3 = 1$ ,

где  $s_0^{11}, s_0^{22}, \lambda_3$  – известные величины, которые зависят от начального напряженного состояния и вида упругого потенциала.

Запишем граничные условия задачи для верхней грани упругой полосы с начальными напряжениями от приложенной силы  $P$  под углом  $\alpha_0$ . Исходя из рис. 2, находим

$$\tilde{Q}_{22}(y_1, 0) = -P\delta(y_1)\sin\alpha_0; \quad \tilde{Q}_{11}(y_1, 0) = -P\delta(y_1)\cos\alpha_0; \quad (1.8)$$

$$u_1(y_1 - t) = 0; \quad u_2(y_1 - t) = 0 \quad (-\infty < y_1 < \infty), \quad (1.9)$$

где  $\delta(y_1)$  – дельта-функция Дирака.

В результате решения поставленной задачи функции влияния от действия нормальной силы (при  $\alpha_0 = \pi/2$ ) для равных корней ( $n_1 = n_2$ ) имеют вид

$$h_{11}(y_1) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty H_{11}(\alpha) \cos \alpha y_1 d\alpha; \quad h_{12}(y_1) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty H_{12}(\alpha) \sin \alpha y_1 d\alpha; \quad (1.10)$$

для неравных корней ( $n_1 \neq n_2$ )

$$h_{11}(y_1) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \tilde{H}_{11}(\alpha) \cos \alpha y_1 d\alpha; \quad h_{12}(y_1) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \tilde{H}_{12}(\alpha) \sin \alpha y_1 d\alpha. \quad (1.11)$$

Здесь  $h_{ij}(\alpha)$ ,  $i, j = 1, 2$  – функции влияния, которые характеризуют перемещения граничных точек грани  $y_2 = 0$  бесконечной упругой полосы с начальными напряжениями от единичной нормальной силы. Ядра  $H_{ij}(\alpha)$ ;  $\tilde{H}_{ij}(\alpha)$  имеют вид [3, 10, 18, 25]: для равных корней ( $n_1 = n_2$ )

$$H_{11}(\alpha) = H_1(\alpha, 0) = n_0 \left[ s_0 s h^2 \alpha \varphi_1 + s_1 s_0 s h^2 \alpha \varphi_1 - \alpha \varphi_1 \xi(\alpha) + (\alpha \varphi_1)^2 - \bar{s}_1 \xi(\alpha) + \varphi_1 \right] \Delta_1^{-1}(\alpha); \quad (1.12)$$

$$H_{12}(\alpha) = H_2(\alpha, 0) = i \frac{m_1 n_0}{\sqrt{n_1}} \left[ s_0 s \xi(\alpha) - s_0 (\alpha \varphi_1) - \bar{s}_1 s_1 \xi(\alpha) + s_1 (\alpha \varphi_1) \right] \Delta_1^{-1}(\alpha)$$

и для неравных корней ( $n_1 \neq n_2$ )

$$\tilde{H}_{11}(\alpha) = \tilde{H}_1(\alpha, 0) = n_0 \left[ -s_1 \operatorname{ch} 2\alpha \varphi_1 + s_0 \xi_1(\alpha) - s_1 s_0 (\alpha \varphi_1) \xi_1(\alpha) + s_0 (\alpha \varphi_1)^2 \operatorname{sh}^2 \alpha \varphi_1 - \right. \\ \left. - s_0 \operatorname{ch}^2 \alpha \varphi_1 + s_1 \xi_1(\alpha) + \alpha \varphi_1 \xi_4(\alpha) \right] \Delta_2^{-1}(\alpha); \quad (1.13)$$

$$\tilde{H}_{12}(\alpha) = \tilde{H}_2(\alpha, 0) = i \frac{n_0 m_1}{\sqrt{n_1}} \left[ s_0 s_1 \xi_3(\alpha) - s_0 (\alpha \varphi_1) \xi_1(\alpha) + s_1 (\alpha \varphi_1) \xi(\alpha) - s_1 \xi_1(\alpha) \right] \Delta_2^{-1}(\alpha).$$

Функции влияния от действия единичной тангенциальной силы (при  $\alpha_0 = 0$ ) для равных корней ( $n_1 = n_2$ ) такие:

$$h_{21}(y_1) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty H_{21}(\alpha) \sin \alpha y_1 d\alpha; \quad h_{22}(y_1) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty H_{22}(\alpha) \cos \alpha y_1 d\alpha. \quad (1.14)$$

Для неравных корней ( $n_1 \neq n_2$ ) можем записать

$$h_{21}(y_1) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \tilde{H}_{21}(\alpha) \sin \alpha y_1 d\alpha; \quad h_{22}(y_1) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \tilde{H}_{22}(\alpha) \cos \alpha y_1 d\alpha. \quad (1.15)$$

Ядра  $H_{ij}(\alpha)$  и  $\tilde{H}_{ij}(\alpha)$ , соответственно, имеют вид [3, 21, 22]:

для  $n_1 = n_2$

$$\begin{aligned} H_{21}(\alpha) &= m_0 \left[ -(s+1)(s_1 \xi(\alpha) - \alpha \varphi_1) + \text{ch}^2 \alpha \varphi_1 - s_1 \text{sh}^2 \alpha \varphi_1 - s \right] = \\ &= m_0 \left[ -(s+1)(s_1 \text{sh} \alpha \varphi_1 \text{ch} \alpha \varphi_{11} - \alpha \varphi_1) + \text{ch}^2 \alpha \varphi_1 - s_1 \text{sh}^2 \alpha \varphi_1 - s \right] \cdot \Delta_1^{-1}(\alpha); \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$H_{22}(\alpha) = i \frac{m_0 m_1}{\sqrt{n_1}} \left[ s \cdot s_1 \text{ch}^2 \alpha \varphi_{11} + (\alpha \varphi_1)^2 - \alpha \varphi_1 \xi(\alpha) - s_1^2 \text{sh}^2(\alpha \varphi_1) - s \cdot s_1 \right] \cdot \Delta_1^{-1}(\alpha);$$

для  $n_1 \neq n_2$

$$\tilde{H}_{21}(\alpha) = m_0 \left[ -ss_1(\alpha \varphi_1) \xi_2(\alpha) - s \xi_3(\alpha) + s(\alpha \varphi_1) \xi_2(\alpha) + \xi_3(\alpha) \right] \cdot \Delta_2^{-1}(\alpha);$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{22}(\alpha) &= i \frac{m_0 m_1}{\sqrt{n_1}} \left[ 1 - s_1 \text{ch}(2\alpha \varphi_2) + ss_1 \xi_1(\alpha) + s\alpha \varphi_1 \xi_4(\alpha) + ss_1(\alpha \varphi_1)^2 \text{sh}^2 \alpha \varphi_1 - \right. \\ &\quad \left. - ss_1 \text{ch}^2 \alpha \varphi_{21} - s_1^2(\alpha \varphi_1) \xi_4(\alpha) + \xi_3(\alpha) \right] \cdot \Delta_2^{-1}(\alpha). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Здесь  $n_1$  и  $n_2$  корни определяющего уравнения [1, 23, 24]. Величины, фигурирующие в формулах (1.12), (1.13), (1.15), (1.16), выражены через известные параметры начального напряжённого состояния [3, 4, 20].

## §2. Разрешающая система рекуррентных систем уравнений.

Используя принцип суперпозиции, перемещения точек упругой полосы с начальными напряжениями в направлении осей  $0y_1$  и  $0y_2$  от одновременного действия нормальных и тангенциальных напряжений для сжимаемых и несжимаемых тел в случае упругих потенциалов произвольной структуры, определяются формулами [3, 12]

$$\begin{aligned} u_1(y_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_{11}(|y_1 - \tau|) p(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} h_{12}(|y_1 - \tau|) q(\tau) d\tau; \\ u_2(y_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_{21}(|y_1 - \tau|) p(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} h_{22}(|y_1 - \tau|) q(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Следуя [3, 4], согласно принятых предположений и обозначений, задачу можно сформулировать в виде системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dy_1^2} \left[ D(y_1) \frac{d^2 u_2(y_1)}{dy_1^2} \right] &= p(y_1) - p_0(y_1) \quad (-\infty < y_1 < \infty); \\ E_1(y_1) h \frac{du_1(y_1)}{dy_1} &= \int_{-\infty}^{y_1} [q(\tau) - q_0(\tau)] d\tau, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $D(y_1) = IE_1(y_1)$  – жесткость стрингера на изгиб;  $I$  – параметр неоднородности жесткости.

Пусть материал стрингера обладает слабой неоднородностью, изменяющейся по закону

$$E_1(y_1) = E[1 + \delta f(y_1)] \quad (-\infty < y_1 < \infty), \quad (2.3)$$

где  $f(y_1)$  – некоторая известная функция;  $\delta$  – малый параметр.

Используя условия контакта (1.6) и представляя неизвестные контактные напряжения  $p_0(y_1)$ ,  $q_0(y_1)$  в виде ряда по степеням малого параметра, запишем

$$p_0(y_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k p^{(k)}(y_1); \quad q_0(y_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k q^{(k)}(y_1) \quad (-\infty < y_1 < \infty). \quad (2.4)$$

Из (2.2), используя (2.3), (2.4), а также формулу (2.1), получаем разрешающую систему рекуррентных систем интегро-дифференциальных уравнений

$$D_0 \frac{d^4 u_2^{(0)}(y_1)}{d(y_1)^4} = p^{(0)}(y_1) - p_0(y_1) \quad (-\infty < y_1 < \infty); \quad (2.5)$$

$$E_0 h \frac{d^2 u_1^{(0)}(y_1)}{d(y_1)^2} = q^{(0)}(y_1) - q_0(y_1);$$

$$D_0 \frac{d^4 u_2^{(k)}(y_1)}{d(y_1)^4} = p^{(k)}(y_1) - f_1^{(k-1)}(y_1) \quad (k = 1, 2, \dots); \quad (2.6)$$

$$E_0 h \frac{d^2 u_1^{(k)}(y_1)}{d(y_1)^2} = q^{(k)}(y_1) - f_2^{(k-1)}(y_1),$$

где

$$u_1(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{21}(y_1 - \tau) p^{(k)}(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} h_{22}(|y_1 - \tau|) q^{(k)}(\tau) d\tau \quad (-\infty < y_1 < \infty, k = 0, 1, \dots); \quad (2.7)$$

$$u_2(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{11}(|y_1 - \tau|) p^{(k)}(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} h_{12}(y_1 - \tau) q^{(k)}(\tau) d\tau;$$

$$f_1^{(k-1)}(y_1) = D_0 \frac{d^2}{d(y_1)^2} \left[ f(y_1) \frac{d^2 u_2^{(k-1)}(y_1)}{d(y_1)^2} \right] \quad (k = 1, 2, \dots);$$

$$f_2^{(k-1)}(y_1) = E_0 h \frac{d}{d(y_1)} \left[ f(y_1) \frac{d u_1^{(k-1)}(y_1)}{d(y_1)} \right]; \quad D_0 = E_0 I.$$

Здесь  $D_0$  – нулевой член разложения в ряд величины  $D(y_1)$ .

Система (2.5) описывает контактную задачу для однородного бесконечного стрингера [3, 7], каждая последующая система из (2.6) отличается от предыдущей лишь внешней нагрузкой. Следовательно, решение контактной задачи для предварительно напряжённой полосы, усиленной неоднородным бесконечным стрингером, сводится к решению ряда однородных контактных задач, отличающихся лишь сходными внешними нагрузками. Нулевое приближение решения, т.е. решение системы (2.5) с помощью преобразования Фурье, построено в [3] и принимает вид

$$p(y_1) = \frac{\mu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha^2 H_{21}^*(\alpha) \tilde{q}_0(\alpha) + H_{22}^*(\alpha) \tilde{p}_0(\alpha)] H^{-1}(\alpha) e^{-i\alpha y_1} d\alpha \quad (-\infty < y_1 < \infty); \quad (2.8)$$

$$q(y_1) = \frac{\mu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [H_{11}^*(\alpha) \tilde{q}_0(\alpha) - i H_{12}^*(\alpha) \tilde{p}_0(\alpha)] H^{-1}(\alpha) e^{-i\alpha y_1} d\alpha.$$

Здесь величины  $H^{-1}(\alpha)$ ,  $H_{ij}^*(\alpha)$  ( $i, j = 1, 2$ ) выражаются через известные функции  $H_{ij}(\alpha)$  и  $\tilde{H}_{ij}(\alpha)$  ( $i, j = 1, 2$ ), которые определяются согласно формулам для равных и неравных корней определяющего уравнения [1, 3, 4] в случае конкретной структуры упругих потенциалов; остальные приближения решений, которые являются влиянием неоднородности материала стрингера строятся аналогичным способом,  $\tilde{p}_0(\alpha)$  и  $\tilde{q}_0(\alpha)$  – трансформанты Фурье от функций контактных напряжений по линии контакта;  $\mu$  – коэффициент Ляме.

Таким образом,  $k$ -е приближение имеет вид

$$p^{(k)}(y_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P^{(k)}(s) e^{-isy_1} ds; \quad q^{(k)}(y_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q^{(k)}(s) e^{-isy_1} ds \quad (k = 1, 2, \dots),$$

где

$$P^{(k)}(s) = \frac{Ds^2 \left\{ \bar{f}_1^{(k-1)}(s) [E_0 h s^2 H_{22}(s) + 1] - E_0 h s^3 \bar{f}_2^{(k-1)}(s) H_{12}(s) \right\}}{L(s)} \quad (k = 1, 2, \dots); \quad (2.9)$$

$$Q^{(k)}(s) = \frac{-IE_0 h s \left\{ \bar{f}_2^{(k-1)}(s) [D_0 h s^4 H_{11}(s) + 1] + D_0 h s^3 \bar{f}_1^{(k-1)}(s) H_{12}(s) \right\}}{L(s)}$$

являются трансформантами Фурье контактных напряжений.

В (2.9)

$$L(s) = [D_0 s^4 H_{11}(s) - 1] [E_0 h s^2 H_{22}(s) + 1] + D_0 E_0 s^4 h H_{12}^2(s);$$

$$\bar{f}_j^{(k-1)}(s) = F[f_j^{(k-1)}(y_1)] \quad (j = 1, 2) \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Здесь  $F$  – оператор преобразования Фурье для указанной функции (функционал).

### §3. Решение систем разрешающих уравнений.

Применив к обеим частям системы (2.8) интегральное преобразование Фурье по переменной  $y_1$  и используя теорему о свёртке, найдём выражения для контактных напряжений в упругих полосах с начальными напряжениями. Нулевое приближение решения для случая равных и неравных корней разрешающего уравнения примет вид (2.8), если в этих формулах произвести замену для равных корней ( $n_1 = n_2$ )  $H_{ij}^*(\alpha)$  на  $H_{ij}(\alpha)$ , для неравных корней ( $n_1 \neq n_2$ )  $H_{ij}^*(\alpha)$  на  $\tilde{H}_{ij}(\alpha)$ , где ядра  $H_{ij}(\alpha)$  и  $\tilde{H}_{ij}(\alpha)$ , соответственно, имеют вид (1.17)

Рассмотрим числовые примеры для несжимаемых тел неогукковского материала (потенциал Трелоара) (рис. 3, 4).

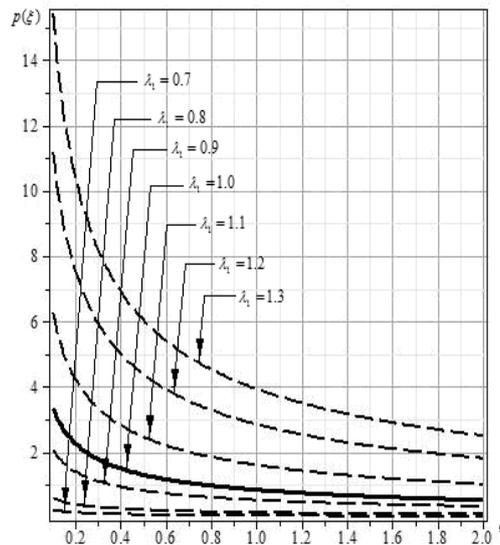


Рис. 3

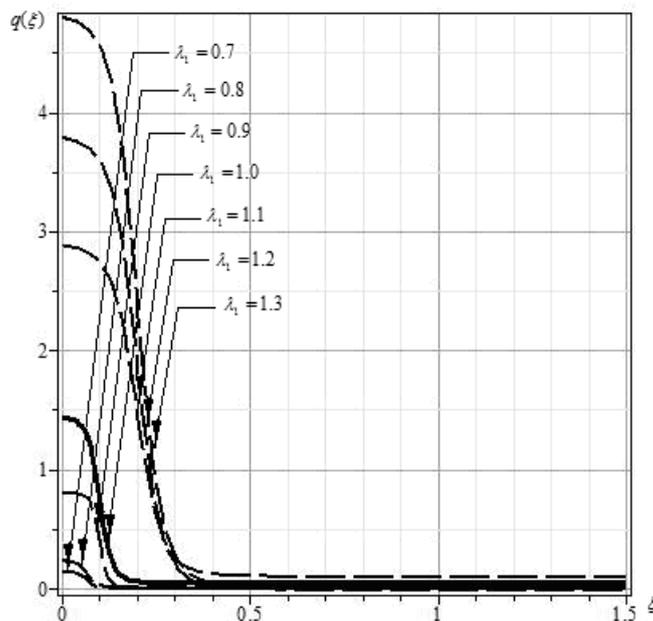


Рис. 4

Потенциал Трелоара $\lambda_1$	Уменьшение, %				Увеличение, %		
	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
$p(\xi) / p_0$	63,45	44,02	31,76	0	38,26	40,68	72,42
$q(\xi) / q_0$	54,06	51,76	36,52	0	47,88	53,33	60,72

В таблице  $p(\xi)$ ,  $q(\xi)$  – безразмерные контактные нормальные и тангенциальные напряжения. Значение  $\lambda_1 = 1$  (на графиках сплошная линия) соответствует классической теории упругости и совпадает с результатом работы [5];  $\lambda_1 = 0,7; 0,8; 0,9$  соответствует начальным напряжениям сжатия;  $\lambda_1 = 1,1; 1,2; 1,3$  соответствует начальным напряжениям растяжения;  $\xi$  – безразмерная координата начального напряжённого состояния в упругой полосе с начальными напряжениями.

Анализ графиков показывает: в случае сжатия ( $\lambda_1 < 1$ ) наличие начальных напряжений в упругой полосе приводит к значительному уменьшению контактных напряжений, в случае растяжения ( $\lambda_1 > 1$ ) – к их увеличению.

#### Заключение.

В работе в рамках линеаризованной теории упругости получено решение плоской задачи о передаче горизонтальной сосредоточенной нагрузки от слабо неоднородного бесконечного струнгера к закреплённой одной гранью упругой бесконечной полосе с начальными напряжениями. Исследования проведены в общем виде для теории больших начальных деформаций и нескольких вариантов теории малых начальных деформаций при произвольной структуре упругого потенциала. Решение задачи сведено относительно нормальных и тангенциальных контактных напряжений к разрешающей системе рекуррентных систем интегро-дифференциальных уравнений, решение для которых построено по степеням малого параметра. Нулевое приближение решения неоднородной задачи строится при помощи интегрального преобразования Фурье. В конечном итоге контактные напряжения представлены в виде интегра-

лов Фурье. Исследования, представленные в статье, дают возможность сделать ряд обобщающих выводов, относящихся к влиянию начальных напряжений на закон распределения контактных усилий под бесконечным стрингером, взаимодействующим с предварительно напряженной полосой.

1. В общем случае при равных и неравных корнях определяющего уравнения [1] для рассмотренного в рамках линеаризованной теории класса задач сформулирован общий метод их решения, дающий возможность получить решение поставленных задач, если известно решение аналогичных линейных (без начальных напряжений) задач.

2. Контактные напряжения на линии контакта с упругой накладкой существенно зависят от начальных напряжений. Влияние количественного характера начальные напряжения оказывают значительнее в высокоэластичных материалах по сравнению с более жесткими материалами. Качественное влияние имеет идентичный характер.

Научные исследования, результаты которых опубликованы в данной статье, выполнены за счет средств бюджетной программы «Поддержка приоритетных направлений научных исследований» (КПКВК 6541230).

**РЕЗЮМЕ.** В рамках линеаризованої теорії пружності отримано розв'язок плоскої контактної задачі про передачу горизонтального навантаження від слабо неоднорідного нескінченного в обох напрямках стрингера до заземленої на одному краї пружної смуги з початковими напруженнями. Дослідження проведено в загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій та різних варіантів теорії малих початкових деформацій для довільної структури пружного потенціалу. Розв'язок задачі про знаходження нормальних і тангенціальних контактних напружень зведено до розв'язуючої системи рекурентних систем інтегро-диференціальних рівнянь, розв'язки яких побудовано за степенями малого параметру. Нульове наближення розв'язку неоднорідної задачі будеться за допомогою інтегрального перетворення Фур'є. Контактні напруження представлено у вигляді інтегралів Фур'є.

1. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 468 с.
2. Гузь О.М., Бабич С.Ю., Рудницький В.Б. Контактна взаємодія пружних тіл з початковими напруженнями. – Київ.: Вища шк., 1995. – 305 с.
3. Діхтярук М.М. Визначення функції впливу для пружної смуги з початковими (залишковими) напруженнями // Праці. 4-го Міжн. симп. з трибофатики (ISTF), 23 – 27 вересня 2002 р. Тернопіль (Україна) / Відп. ред. В.Т.Трошенко. – Тернопіль: Терноп. держ. техн. ун-т ім. Івана Пулюя, 2002. – С. 426 – 431.
4. Діхтярук М.М. Періодична контактна задача для пружної смуги з початковими (залишковими) напруженнями // Доп. НАН України. – 2004. – № 3. – С. 46 – 49.
5. Саркисян В.С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. – Ереван: Изд. Ереван. ун-та, 1983. – 260 с.
6. Акopyan V.N., Mirzoyan S.A., Mkhitarian S.M. The Problem of the Contact between a Broken Stringer and an Elastic Infinite Strip Containing a Vertical Edge Crack // Int. Appl. Mech. – 2015. – 51, N 2. – P. 176 – 186.
7. Aleksandrov V.M. Optimal control of linear systems with interval constraints // Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. – 2015. – 55, N 5. – P. 758 – 775.
8. Babich S.Yu., Guz A.N., Rudnitsky V.B. Contact Problems for Prestressed Elastic Bodies and Rigid and Elastic Punches // Int. Appl. Mech. – 2004. – 40, N 7. – P. 744 – 765.
9. Babich S.Yu., Dikhtyaruk N.N., Degtyar S.V. Contact Problem for Two Identical Strips Reinforced by Periodically Arranged Fasteners with Initial Stresses // Int. Appl. Mech. – 2019. – 55, N 6. – P. 629 – 635.
10. Bepalova E.I. Finite Integral Transform Method in Static Problems for Inhomogeneous Plates // Int. Appl. Mech. – 2014. – 50, N 6. – P. 651 – 663.
11. Guz A.N. Establishing the Foundations of the Mechanics of Fracture of Materials Compressed along Cracks (Review) // Int. Appl. Mech. – 2014. – 50, N 1. – P. 1 – 57.

12. *Guz A.N.* Ultrasonic Nondestructive Method for Stress Analysis of Structural Members and Near-Surface Layers of Materials: Focus on Ukrainian Research (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2014. – **50**, N 3. – P. 231 – 252.
13. *Guz A.N.* Recognition of the Achievements of the S.P. Timoshenko Institute of Mechanics by the World's Scientific Community // *Int. Appl. Mech.* – 2015. – **51**, N 1. – P. 1 – 11.
14. *Guz A.N.* Nonclassical Problems of Fracture/Failure Mechanics: On the Occasion of the 50<sup>th</sup> Anniversary of Research (Review). II // *Int. Appl. Mech.* – 2019. – **55**, N 3. – P. 239 – 295.
15. *Guz A.N., Bagno A.M.* Influence of Prestresses on Quasi-Lamb Modes in Hydroelastic Waveguides // *Int. Appl. Mech.* – 2020. – **56**, N 1. – P. 1 – 12.
16. *Dikhtyaruk N.N.* Load transfer from the infinite stringer to the two jammed along one edge identical stripes with initial (residual) stresses // *Scie. J. Ternopil Nat. Techn. University.* – 2016 – **83**, N 3. – P. 51 – 61.
17. *Dikhtyaruk N.N.* Equilibrium of a Prestressed Strip Reinforced with Elastic Plates // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – **40**, N 3. – P. 290 – 296.
18. *Dikhtyaruk N.N., Kurinenko O.V., Poplavskaya E.A., Samaruk N.N.* Interaction between a Finite Stringer and Two Identical Prestressed Strips: Contact Problem // *Int. Appl. Mech.* – 2019. – **55**, N 1. – P. 79 – 85.
19. *Lugovoi P.Z., Meish V.F., Meish Yu.A., Orlenko S.P.* Dynamic Design of Compound Shell Structures of Revolution Under Nostationary Loads // *Int. Appl. Mech.* – 2020. – **56**, N 1. – P. 22 – 32.
20. *Moses O.P., Adewale A.O., Olusegun O.A.* Numerical Analysis of Thermo-Elastic Contact Problem of Disc Brakes for Vehicle on Gradient Surfaces // *World J. of Engineering and Technology.* – 2016. – **4**, N 1. – P. 51 – 58.
21. *Rudnitsky V.B., Dikhtyaruk N.N.* A Prestressed Elastic Strip with Elastic Reinforcements // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – **38**, N 11. – P. 1354 – 1360.
22. *Rudnitsky V.B., Dikhtyaruk N.N.* Interaction between an Infinite Stringer and Two Identical Prestressed Strips: Contact Problem // *Int. Appl. Mech.* – 2017. – **53**, N 2. – P. 149 – 155.
23. *Yaretskaya N.A.* Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses // *Int. Appl. Mech.* – 2014. – **50**, N 4. – P. 378 – 388.
24. *Yaretskaya N.A.* The impact of the initial (residual) stresses on the contact interaction of elastic cylindrical punch and an elastic layer // *Bulletin of NAS of Ukraine.* – 2014. – N 1. – P. 57 – 62.
25. *Yuan W.K., Long J.M., Ding Y., Wang G.F.* Micro/Nanocontact Between a Rigid Ellipsoid and an Elastic Substrate With Surface Tension // *J. App. Mech.* – 2017. – **84**, N 1. – P. 011 – 012.

Поступила 27.05.2019

Утверждена в печать 09.07.2020