

А. П. Жук¹, Я. А. Жук^{1,2}

**ДЕЙСТВИЕ РАДИАЦИОННОЙ СИЛЫ НА ГИБКУЮ СФЕРИЧЕСКУЮ
ЧАСТИЦУ У СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ**

¹ *Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины,
ул. П. Нестерова, 3, 01057, Киев, Украина;*

² *Киев, Киевский национальный ун-т им. Т.Г.Шевченко,
просп. Глушкова, 4е, 01033, Киев, Украина; e-mail: zhuk@inmech.kiev.ua*

Abstract. An action of the acoustic radiation force on a spherical drop of ideal liquid placed in turn in a liquid near its free plane surface is studied for the case of the incident plane sound wave propagating perpendicularly to the liquid boundary. As a result, the liquid sphere is appeared to be located in the standing sound wave of pressure which has its displacement node at the free surface. As a result, the fluid-filled sphere is under the action of the standing wave of the sound pressure with the node at the free surface of a fluid. The acoustic radiation force is the measure of interaction between the acoustic wave and drop; it could be defined as time-averaged integral of the sound pressure over the drop surface. To determine the pressure, an approach is developed that envisages the application of the velocity field potential obtained as a solution of the linear diffraction problem. It is found that the frequencies of the incident wave exist which provide zero radiation force acting on the drop which is therefore immobile in this case.

Key words: radiation force, spherical drop of ideal liquid, plane boundary of the liquid, acoustic field parameters.

Введение.

Известно, что в стационарных звуковых полях наряду с переменным звуковым давлением возникают постоянные силы, определяемые радиационным давлением звука [2, 5]. Под радиационным давлением (давлением звука) подразумевается среднее по времени давление, действующее на препятствие в жидкости [12]. Появление радиационных сил в звуковом поле обусловлено изменением в некотором объеме у препятствия, переносимого волной среднего по времени импульса, что и определяет возникновение постоянной во времени составляющей звукового давления [5]. В результате на объем действует независимая от времени сила, которая называется радиационной (силой акустического излучения). При наличии препятствия в звуковом поле радиационная сила, действующая на него, создается не только падающей волной, но и рассеянной от препятствия. Для определения рассеянной волны необходимо решать задачу дифракции падающей волны на препятствии.

При определении давления в звуковом поле линейное приближение оказывается недостаточным, так как в этом случае силы, действующие на препятствие, являются периодическими функциями времени и в среднем по времени они равны нулю. Возникновение радиационного давления звука определяется эффектами второго порядка [5]. Поэтому при определении звукового давления в жидкости необходимо учитывать квадратичные слагаемые, которые обусловлены отклонением в окрестности препятствия профиля волны от гармонического закона изменения во времени [5]. Вычисление звукового давления в жидкости с учетом величин второго порядка малости можно

выполнить, используя потенциал поля скорости жидкости, определенный при решении линейной задачи дифракции первичной волны на препятствии [12].

При решении задачи определения радиационных сил, действующих в звуковом поле на препятствия, применим подход, предложенный в работах [14, 15], разделяющий процедуру решения на три основных этапа. Первый этап – решение линейной задачи дифракции первичной волны на препятствии (определение потенциалов отраженных волн). При этом взаимодействие первичной и отраженных волн не учитывается, поскольку решается линейная задача дифракции. Второй этап – определение с точностью до величины второго порядка малости на основе результатов, полученных при решении задачи на первом этапе, гидродинамических сил, действующих на препятствия (объекты) в жидкости. Третий этап – последующее осреднение по времени гидродинамических сил (вычисление радиационных сил).

В данной статье рассмотрена гибкая сферическая частица (капля жидкости, отличной от внешней), расположенная у границы внешней жидкости, которая представляет собой свободную поверхность, контактирующую с воздухом, и перпендикулярно к которой распространяется плоская звуковая волна. Случай твердой сферической частицы у свободной поверхности жидкости рассмотрен в работе [18]. В случае препятствия в виде жидкой сферы возбуждаемые падающей волной колебательные процессы в ней могут существенно влиять на характер рассеяния волны [10, 14]. Действие радиационных сил на твердые и жидкие частицы исследовано также в работах [8, 16, 17]. Публикации исследований, посвященных различным вопросам, связанным с действием радиационных сил на твердые и жидкие частицы, приведены в обзорах [7, 11].

Изучение постоянных во времени сил в акустическом поле представляет интерес для ряда теоретических и практических задач [2, 5, 6]. Определенный технологический интерес представляет изучение движения капель в акустическом поле под действием радиационных сил. Давление звукового излучения используется для создания акустической левитации: для «подвешивания» частиц в звуковом поле, фиксации их в определенных областях. Это явление находит применение в таких технологических процессах как, например, бестигельная варка стекла, литье из различных компонент, выращивание кристаллов. С другой стороны, постоянные силы, действующие на частицы в акустическом поле, способствуют процессам коагуляции и дегазации в несущих средах [6], акустической очистке загрязненных поверхностей и т. д.

§1. Постановка и решение задачи дифракции.

Предположим, что сжимаемая идеальная жидкость плотности ρ_0 , в которой звук распространяется со скоростью a_0 , заполняет полупространство. На расстоянии l от свободной поверхности поместим в жидкость неподвижную гибкую сферу радиуса R (капля идеальной жидкости, отличной от внешней). Пусть плотность жидкости капли ρ_1 и скорость звука в ней a_1 . Выберем прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$, центр O которой находится на поверхности жидкости, а ось Oz направлена перпендикулярно к поверхности в противоположную от сферической капли сторону. С каплей, центр которой находится на оси Oz , свяжем прямоугольную декартову $O_1x_1y_1z_1$ и сферическую $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$ системы координат (рис. 1).

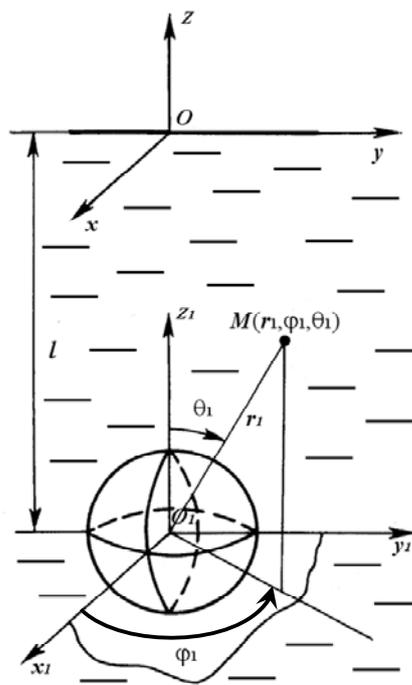


Рис. 1

Пусть в жидкости в положительном направлении оси Oz распространяется плоская звуковая волна, заданная потенциалом

$$\Phi_i = A \exp[i(kz - \omega t)], \quad (1.1)$$

где A – амплитуда; k – волновое число; ω – угловая частота.

Волновое поле в жидкости образуется в результате интерференции падающей (первичной) волны (1.1) и волн, отраженных от свободной поверхности жидкости и рассеянной от сферической капли. Поэтому с математической точки зрения определение потенциалов установившегося во времени волнового поля в жидкости сводится к решению многосвязной линейной задачи дифракции волны (1.1) на сферической капле и отражении волн от свободной поверхности жидкости, т.е. к определению решений линейного дифференциального уравнения

$$\Delta\Phi - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \quad (1.2)$$

удовлетворяющих граничным условиям на сферической капле и на свободной поверхности жидкости. В уравнении (1.2) Φ – потенциал поля скорости; a_0 – скорость звука в жидкости; Δ – дифференциальный оператор Лапласа.

При линейной постановке задачи определения потенциала Φ давление в жидкости и скорость в ней определяются, соответственно, следующими формулами:

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}; \quad v = \text{grad } \Phi. \quad (1.3)$$

При формулировке граничных условий на поверхности сферической капли не учитываем поверхностное натяжение и предполагаем, что амплитуда колебаний поверхности капли малая величина и поэтому можно считать $R = \text{const}$. В этом случае граничные условия на поверхности S капли представим в виде

$$v|_S = \bar{v}|_S; \quad p|_S = \bar{p}|_S, \quad (1.4)$$

а на свободной поверхности жидкости принимаем равным нулю давление

$$p|_{z=0} = 0. \quad (1.5)$$

Укажем также, что потенциал отраженной от сферической капли волны должен удовлетворять условиям излучения Зоммерфельда на бесконечности.

В формулах (1.4) чертой над символом обозначены величины, которые характеризуют состояние жидкости капли.

Заметим, что условие (1.5) задано на неподвижной поверхности $z = 0$, а не на свободной поверхности, которая колеблется. При таком задании граничного условия допускается ошибка, которая, однако, имеет тот же порядок, что и ошибка при линеаризации уравнения движения жидкости или уравнения непрерывности и поэтому такое задание граничного условия при решении линейной задачи дифракции также допускается [3].

При падении звуковой волны (1.1) на свободную поверхность внешней жидкости звуковые давления в падающей и отраженной волнах находятся в противофазе (отличаются на π радиан), тогда как скорости частиц жидкости в падающей и отраженной волнах находятся в фазе. В результате сложение находящихся в противофазе давлений в падающей и отраженной волнах приводит к нулевому давлению на свободной поверхности жидкости (узлу давления в образованной стоячей волне). Сложение находящихся в этом случае в фазе колебательных скоростей частиц на свободной поверхности внешней жидкости в падающей и отраженной волнах приводит к удвоению скорости частиц, образуя у поверхности пучность колебательной скорости. В связи с этим при падении волны (1.1) на граничную поверхность жидкости потенциал отраженной от нее волны (решение уравнения (1.2)) можно записать в таком виде:

$$\Phi_s = -A \exp[-i(kz + \omega t)]. \quad (1.6)$$

В дальнейшем сформулированная задача определения потенциала звукового поля в жидкости фактически сводится к задаче определения потенциала Φ_d звуковой волны, рассеянной от сферической капли при падении на нее волн (1.1) и (1.6) и потенциала Φ_{s1} волны, отраженной от свободной поверхности жидкости при падении на нее волны, определяемой потенциалом Φ_d . Для решения поставленной задачи используем подход, развитый в монографии [1] при исследовании задач дифракции упругих волн в многосвязных телах. При этом решения уравнения (1.2) построим методом разделения переменных в сферической системе координат $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$. В системе координат $O_1x_1y_1z_1$ потенциалы Φ_i и Φ_s будут иметь следующий вид:

$$\Phi_i^{(1)} = A \exp(-ikl) \exp[i(kz_1 - \omega t)]; \quad (1.7)$$

$$\Phi_s^{(1)} = -A \exp(ikl) [-i(kz_1 + \omega t)]. \quad (1.8)$$

Верхний индекс в (1.7) и (1.8) указывает, что потенциалы $\Phi_i^{(1)}$ и $\Phi_s^{(1)}$ представлены в системе координат $O_1x_1y_1z_1$, связанной с жидкой сферической частицей. В системе координат $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$ потенциалы (1.7) и (1.8) можно записать так:

$$\Phi_i^{(1)} = A \exp(-ikl) \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n j_n(kr_1) P_n(\cos \theta_1); \quad (1.9)$$

$$\Phi_s^{(1)} = -A \exp(ikl) \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) (-i)^n j_n(kr_1) P_n(\cos \theta_1), \quad (1.10)$$

где $j_n(kr_1)$ – сферическая функция Бесселя; $P_n(\cos \theta_1)$ – полиномы Лежандра.

Потенциал $\Phi_d^{(1)}$ волны, отраженной от сферической жидкой частицы (решение уравнения (1.2), удовлетворяющее условиям излучения на бесконечности), также представим обобщенным рядом Фурье по сферическим волновым функциям

$$\Phi_d^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(1)} h_n^{(1)}(kr_1) P_n(\cos \theta_1). \quad (1.11)$$

В (1.11) $h_n^{(1)}(kr_1)$ – сферическая функция Ганкеля 1-го рода.

Волновое поле в жидкой сфере опишем потенциалом Ψ , который представим в таком виде:

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n^{(1)} j_n(\bar{kr}_1) P_n(\cos \theta_1). \quad (1.12)$$

При падении на свободную поверхность жидкости волны, описываемой потенциалом (1.11), граничное условие (1.5) обуславливает появление отраженной волны. При определении потенциала $\Phi_{s1}^{(1)}$ этой волны воспользуемся методом мнимых изображений [3]. Мысленно заполним полупространство над свободной поверхностью жидкости аналогичной жидкостью и поместим в ней симметрично жидкой частице № 1 относительно плоскости $z=0$ другую мнимую сферическую частицу (частица № 2), подобную действительной № 1. В результате интерференции отраженных от жидких частиц № 1 и № 2 волн, описываемых потенциалами (1.1) и (1.6), в неограниченной среде образуется звуковое поле, симметричное относительно граничной плоскости $z=0$. При этом суммарное звуковое давление (1.3) в точках плоскости $z=0$, в соответствии с условием (1.5), должно быть равным нулю. В связи с этим потенциал $\Phi_{s1}^{(1)}$

волны, отраженной от свободной поверхности жидкости, будет равен потенциалу $\Phi_d^{(2)}$ волны, отраженной от жидкой частицы № 2.

Свяжем с мнимой жидкой частицей № 2 систему сферических координат $(r_2, \theta_2, \varphi_2)$. В этой системе координат волну, отраженную от мнимой жидкой частицы, также представим обобщенным рядом Фурье по сферическим волновым функциям

$$\Phi_d^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(2)} h_n^{(1)}(kr_2) P_n(\cos \theta_2). \quad (1.13)$$

В формулах (1.9 – 1.13) для упрощения их написания не приводится множитель $\exp(-i\omega t)$, индекс 2 указывает, что величины, отмеченные им, заданы в системе координат $(r_2, \theta_2, \varphi_2)$.

Звуковое давление p на поверхности $z = 0$ представим в следующем виде:

$$p = p_1(r_1 = l, \theta_1 = 0, \varphi_1 = 0) + p_2(r_2 = l, \theta_2 = \pi, \varphi_2 = 0). \quad (1.14)$$

В формуле (1.14) p_1 – давление в точках плоскости $z = 0$, создаваемое волной с потенциалом $\Phi_d^{(1)}$, а давление p_2 – волной с потенциалом $\Phi_d^{(2)}$.

Из уравнения (1.14), принимая во внимание граничное условие (1.5) для звукового давления на поверхности $z = 0$ и соотношение (1.3) для вычисления давления, определим зависимость между коэффициентами $A_n^{(1)}$ и $A_n^{(2)}$ в потенциале $\Phi_d^{(1)}$ отраженной волны от сферической жидкой частицы № 1 и в потенциале $\Phi_d^{(2)}$ отраженной волны от мнимой сферической жидкой частицы № 2. Эта зависимость определяется соотношением

$$A_n^{(2)} = (-1)^{n+1} A_n^{(1)}. \quad (1.15)$$

Учитывая (1.15), потенциал $\Phi_d^{(2)}$ представим в следующем виде:

$$\Phi_d^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} A_n^{(1)} h_n^{(1)}(kr_2) P_n(\cos \theta_2) \exp(-i\omega t). \quad (1.16)$$

Таким образом, потенциал Φ , который определяет звуковое поле во внешней жидкости, равен сумме потенциалов

$$\Phi = \Phi_i^{(1)} + \Phi_s^{(1)} + \Phi_d^{(1)} + \Phi_d^{(2)}. \quad (1.17)$$

Определение потенциала Φ , следовательно, сводится к вычислению коэффициентов $A_n^{(1)}$ в разложениях (1.11) и (1.16) потенциалов $\Phi_d^{(1)}$ и $\Phi_d^{(2)}$ в обобщенные ряды Фурье по сферическим волновым функциям.

Вычислим коэффициенты $A_n^{(1)}$, используя граничные условия (1.4) для радиальной компоненты скорости частиц внешней и внутренней жидкости на поверхности жидкой сферической частицы № 1 и непрерывность величины давления при переходе через поверхность этой частицы, которые запишем в таком виде:

$$v_{r_1}(r_1 = R, \theta_1, \varphi_1, t) = \bar{v}_{r_1}(r_1 = R, \theta_1, \varphi_1, t); \quad p(r_1, \theta_1, \varphi_1, t) = \bar{p}(r_1, \theta_1, \varphi_1, t), \quad (1.18)$$

где

$$v_{r_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial r_1}; \quad \bar{v}_{r_1} = \frac{\partial \Psi}{\partial r_1}; \quad p = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}; \quad \bar{p} = -\rho_1 \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (1.19)$$

Для вычисления скорости v_{r_1} и давления p на поверхности жидкой сферической частицы № 1 потенциал $\Phi_d^{(2)}$ необходимо записать в сферической системе координат $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$,

связанной с частицей № 1. Используя теоремы сложения для сферических волновых функций [1], запишем уравнение (1.16) в таком виде:

$$\Phi_d^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(2)} j_n(kr_1) P_n(\cos \theta_1) \exp(-i\omega t). \quad (1.20)$$

В формуле (1.20) введены следующие обозначения:

$$S_n^{(2)} = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{p+1} A_p^{(1)} Q_{0n0p}^{(1,2)}(2kl, \pi);$$

$$Q_{0p0n}^{(1,2)}(kR_{12}, \theta_{12}) = 2i^{p-n} \sum_{\sigma=|p-n|}^{p+n} i^{\sigma} b_{\sigma}^{(n0p0)} h_{\sigma}^{(1)}(kR_{12}) P_{\sigma}(\cos \theta_{12});$$

$$R_{12} = 2l; \theta_{12} = \pi; b_{\sigma}^{(p0n0)} = \sqrt{\frac{(2n+1)(2p+1)}{2(2\sigma+1)}} (pn00|\sigma 0)^2; \quad (1.21)$$

$$(pn00|\sigma 0) = (-1)^{\sigma+\frac{s}{2}} \frac{(s/2)!}{(s/2-n)!(s/2-p)!(s/2-\sigma)!} \times$$

$$\times \left[\frac{(2\sigma+s)!(s-2n)!(s-2p)!(s-2\sigma)!}{(s+1)!} \right],$$

если s четное; $(pn00|\sigma 0) = 0$, если s нечетное; $s = n + p + \sigma$.

Потенциал Φ звукового поля во внешней жидкости (1.17), определяемый суммой потенциалов (1.9) – (1.11) и (1.20), запишем в таком виде:

$$\Phi(r_1, \theta_1, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(2n+1) A b_n j_n(kr_1) + A_n^{(1)} h_n^{(1)}(kr_1) + S_n^{(2)} j_n(kr_1) \right] P_n(\cos \theta_1) \exp(-i\omega t), \quad (1.22)$$

где

$$b_n = -2i \sin\left(kl - n \frac{\pi}{2}\right).$$

Из граничных условий (1.18) на поверхности жидкой сферической частицы, принимая во внимание формулы (1.19) и (1.22), получаем бесконечную систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов $A_n^{(1)}$ в обобщенных рядах Фурье для потенциалов $\Phi_d^{(1)}$ и $\Phi_d^{(2)}$:

$$\frac{h_n^{(1)}(\alpha)}{j_n(\alpha)} A_n^{(1)} + S_n^{(2)} - \eta \frac{j_n(\xi\alpha)}{j_n(\alpha)} \bar{A}_n^{(1)} = -A(2n+1)b_n; \quad (1.23)$$

$$\frac{h_n^{(1)'}(\alpha)}{j_n'(\alpha)} A_n^{(1)} + S_n^{(2)} - \xi \frac{j_n'(\xi\alpha)}{j_n'(\alpha)} \bar{A}_n^{(1)} = -A(2n+1)b_n. \quad (1.24)$$

В уравнениях (1.23) и (1.24) введены обозначения:

$$\alpha = kR; \xi = a_0/a_1; \eta = \rho_1/\rho_0; \xi\alpha = \bar{k}R.$$

Система уравнений (1.23) и (1.24) имеет единственное решение $\{A_n^{(1)}\}$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$), которое находим методом ее редукции [4]. Определение потенциалов полей скорости

во внешней и во внутренней жидкости формально заканчивается вычислением коэффициентов $A_n^{(1)}$ усеченной системы алгебраических уравнений (1.23) и (1.24). Заданная степень точности обеспечивается сравнением результатов вычислений для последовательно возрастающего числа уравнений.

§2. Определение радиационной силы, действующей на сферическую жидкую частицу.

В звуковом поле на жидкую сферическую частицу действует гидродинамическая сила. Радиационная сила – постоянная во времени составляющая гидродинамической силы, которая вычисляется осреднением гидродинамической силы по времени.

Так как поле скорости жидкости симметрично относительно оси O_1z_1 , гидродинамическая сила направлена вдоль этой оси и равна интегралу

$$F_z = -\iint_S p R^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 d\theta_1 d\varphi_1 \quad (2.1)$$

по поверхности S жидкой сферической частицы от давления p , для вычисления которого используем соотношение [11]

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho_0 (\text{grad } \Phi)^2 + \frac{\rho_0}{2a_0^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2. \quad (2.2)$$

Давление в жидкости (2.2) вычисляется с точностью до величин второго порядка малости, представляющих произведения параметров волнового поля, поэтому необходимо использовать действительную часть потенциала (1.22), которую запишем в следующем виде:

$$\text{Re } \Phi(r_1, \theta_1, t) = \sum_{n=0}^{\infty} [K_n(kr_1) \sin \omega t + L_n(kr_1) \cos \omega t] P_n(\cos \theta_1). \quad (2.3)$$

В соотношении (2.3) введены следующие обозначения:

$$K_n(kr_1) = B_n^{(1)} y_n(kr_1) + \left[C_n^{(1)} - 2(2n+1) A \sin \left(kl - n \frac{\pi}{2} \right) + G_n^{(1)} \right] j_n(kr_1); \quad (2.4)$$

$$L_n(kr_1) = (B_n^{(1)} + D_n^{(1)}) j_n(kr_1) - C_n^{(1)} y_n(kr_1); \quad (2.5)$$

$$B_n^{(1)} = \text{Re } A_n^{(1)}; \quad C_n^{(1)} = \text{Im } A_n^{(1)}; \quad D_n^{(1)} = \text{Re } S_n^{(2)}; \quad G_n^{(1)} = \text{Im } S_n^{(2)}.$$

В дальнейшем при обозначении действительной части $\text{Re } \Phi$ потенциала Φ символ Re будем опускать.

Первое слагаемое в выражении (2.2) для давления p , которое синусоидально изменяется по времени, при осреднении гидродинамической силы (2.1) по периоду первичной волны вносит в величину радиационной силы вклад, равный нулю [12], поэтому при дальнейших вычислениях это слагаемое не учитываем. Второе слагаемое в выражении (2.2) представим в следующем виде:

$$-\frac{1}{2} \rho_0 (\text{grad } \Phi)^2 = -\frac{1}{2} \rho_0 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r_1} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{r_1^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1} \right)^2. \quad (2.6)$$

Определим вклад каждого из слагаемых в выражении для давления (2.6) в величину силы (2.1). Вклад первого слагаемого выражения (2.6) в величину силы F_z определяется интегралом

$$F_z^{(1)} = \pi \rho_0 R^2 \int_0^\pi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r_1} \right)^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 d\theta_1 \quad \text{при } r_1 = R. \quad (2.7)$$

Принимая во внимание формулу (2.3) для потенциала Φ после интегрирования (2.7) получим выражение

$$F_z^{(1)} = 4\pi\rho_0\alpha^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)} (M_n(\alpha)M_{n+1}(\alpha)\sin^2 \omega t + N_n(\alpha)N_{n+1}(\alpha)\cos^2 \omega t), \quad (2.8)$$

в котором $\alpha = kR$, а величины M_n и N_n заданы соотношениями

$$M_n(kr_1) = B_n^{(1)}y_n'(kr_1) + \left[C_n^{(1)} - 2(2n+1)A \sin\left(kl - n\frac{\pi}{2}\right) + G_n^{(1)} \right] j_n'(kr_1); \quad (2.9)$$

$$N_n(kr_1) = (B_n^{(1)} + D_n^{(1)})j_n'(kr_1) - C_n^{(1)}y_n'(kr_1). \quad (2.10)$$

В выражении (2.8) опущены слагаемые, которые при осреднении по времени обращаются в нуль.

После осреднения (2.8) по времени получаем вклад в величину радиационной силы, определяемый при учете первого слагаемого для давления в соотношении (2.6), т.е.

$$\langle F_z^{(1)} \rangle = 2\pi\rho_0\alpha^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)} [M_n(\alpha)M_{n+1}(\alpha) + N_n(\alpha)N_{n+1}(\alpha)]. \quad (2.11)$$

Вклад в величину гидродинамической силы (2.1), соответствующий второму слагаемому для звукового давления в жидкости (2.6), равен интегралу

$$F_z^{(2)} = \pi\rho_0 \int_0^{\pi} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta_1} \right)^2 \sin\theta_1 \cos\theta_1 d\theta_1, \quad (2.12)$$

после интегрирования которого получаем

$$F_z^{(2)} = 4\pi\rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} [K_n(\alpha)K_{n+1}(\alpha)\sin^2 \omega t + L_n(\alpha)L_{n+1}(\alpha)\cos^2 \omega t]. \quad (2.13)$$

В выражении (2.13) опущены слагаемые, которые при осреднении по времени обращаются в нуль. После осреднения (2.13) по времени получаем вклад в радиационную силу, определяемый при учете в (2.6) второго слагаемого для давления

$$\langle F_z^{(2)} \rangle = 2\pi\rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} [K_n(\alpha)K_{n+1}(\alpha) + L_n(\alpha)L_{n+1}(\alpha)]. \quad (2.14)$$

Вклад в величину гидродинамической силы, определяемый последним слагаемым выражения (2.2) для давления, равен интегралу

$$F_z^{(3)} = -\frac{\pi\rho_0 R^2}{a_0^2} \int_0^{\pi} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} \right)^2 \sin\theta_1 \cos\theta_1 d\theta_1, \quad (2.15)$$

после интегрирования которого получим

$$F_z^{(3)} = -2\pi\rho_0\alpha^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} [K_n(\alpha)K_{n+1}(\alpha)\cos^2 \omega t + L_n(\alpha)L_{n+1}(\alpha)\sin^2 \omega t]. \quad (2.16)$$

В (2.16) опущены слагаемые, которые при осреднении по времени обращаются в нуль. После осреднения (2.16) по времени получаем вклад в величину радиационной силы, определяемый последним слагаемым выражения (2.2) для давления в звуковой волне

$$\langle F_z^{(3)} \rangle = -2\pi\rho_0\alpha^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)} [K_n(\alpha)K_{n+1}(\alpha) + L_n(\alpha)L_{n+1}(\alpha)]. \quad (2.17)$$

Суммируя выражения (2.11), (2.14) и (2.17), получаем выражение для вычисления величины радиационной силы, действующей на жидкую сферическую каплю у границы свободной поверхности жидкости при падении перпендикулярно к ней звуковой волны, описываемой потенциалом (1.1)

$$\langle F_z \rangle = 2\pi\rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)} \left\{ [M_n(\alpha)M_{n+1}(\alpha) + N_n(\alpha)N_{n+1}(\alpha)]\alpha^2 + [K_n(\alpha)K_{n+1}(\alpha) + L_n(\alpha)L_{n+1}(\alpha)] [n(n+2) - \alpha^2] \right\}. \quad (2.18)$$

§3. Численное исследование радиационной силы. Анализ результатов.

Для численного исследования действия радиационной силы на сферическую жидкую каплю у свободной поверхности внешней жидкости (рис. 1) используем формулу (2.18). Величину и направление действия радиационной силы на сферическую каплю определим в зависимости от волнового числа k падающей волны (1.1), радиуса сферической капли R и ее расстояния l от свободной поверхности жидкости. В качестве внешней жидкости принимаем воду, у свободной поверхности которой находится одна из сферических капель бензина, карбона тетрахлорида, ртути или же твердая сферическая частица. Необходимые для расчетов свойства указанных жидкостей сферических капель приведены в таблице.

Жидкость	Плотность, кг/м ³	Скорость звука, м/с
Вода	1000	1500
Бензин	870	1298
Карбон тетрахлорид	1594	926
Ртуть	13593	1450

Амплитуду A звуковой волны (1.1) положим равной $0,9 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$, что соответствует умеренной мощности излучателя.

Результаты расчетов зависимости радиационной силы $\langle F_z \rangle$, действующей на сферическую жидкую каплю, от волнового числа первичной волны k (частоты ω), радиуса R капли и ее расстояния l от свободной поверхности внешней жидкости (воды) представлены на рис. 2, 3, 4.

На рис. 2 приведены результаты расчетов радиационной силы для сферической капли, соответственно, радиуса 1 см при условии, что капля находится на расстоянии $l = 20 \text{ см}$ от свободной поверхности жидкости. Сплошная кривая на графике характеризует действие радиационной силы в случае сферической капли бензина, а штриховая кривая – в случае сферической капли карбона тетрахлорида. Зависимость радиационной

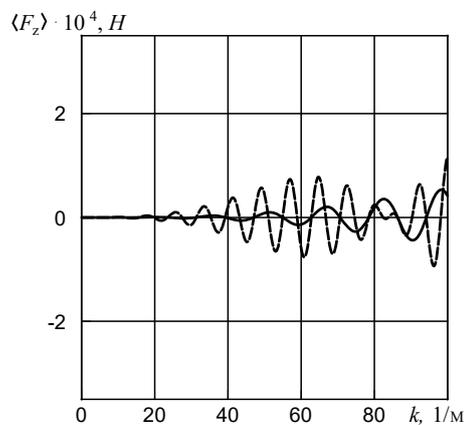


Рис. 2

силы от волнового числа k (угловой частоты ω) имеет немонотонный характер. Рассмотрим случай $k = 46,9 \text{ м}^{-1}$ (длина волны $\lambda = 13,4 \text{ см}$). Бензиновая капля находится в узле стоячей волны, образованной интерференцией первичной волны (1.9) и отраженной от свободной поверхности (1.10), в положении равновесия – радиационная сила не действует на каплю. При увеличении частоты ω (волнового числа k) радиационная сила действует на каплю в положительном направлении оси Oz . Следовательно, капля имеет тенденцию смещаться в пучность стоячей волны в направлении к свободной поверхности.

При уменьшении частоты ω (волнового числа k) радиационная сила действует в отрицательном направлении оси Oz . Следовательно, капля бензина имеет тенденцию смещаться в пучность стоячей волны в направлении от свободной поверхности.

В случае капли карбона тетрахлорида действие радиационной силы на каплю, которая расположена аналогично капле бензина, имеет такой же характер, как и в случае капли бензина.

На рис. 3 приведены результаты определения радиационной силы, действующей на сферическую каплю радиуса 2 см, которая находится на расстоянии $l = 20$ см от свободной поверхности жидкости. Аналогично рис. 2 сплошная кривая на графике характеризует действие радиационной силы в случае капли бензина, а штриховая – в случае капли карбона тетрахлорида. Рассмотрим также случай $k = 46,9 \text{ м}^{-1}$, при котором капля будет находиться в узле стоячей волны в положении равновесия. На каплю бензина при увеличении частоты (волнового числа) радиационная сила будет действовать в положительном направлении оси Oz . Следовательно, капля имеет тенденцию смещаться в пучность стоячей волны в направлении к свободной поверхности. При уменьшении частоты радиационная сила действует в отрицательном направлении оси Oz . В случае капли карбона тетрахлорида радиационная сила при увеличении частоты действует в отрицательном направлении оси Oz , а при уменьшении частоты – в положительном направлении. Следовательно, в случае капли карбона тетрахлорида изменение радиуса капли с 1 см на 2 см изменяет направление действия радиационной силы.

Сравнение полученных результатов, приведенных на рис. 2 и 3 показывает, что на величину и направление действия радиационной силы на жидкую каплю могут влиять не только параметры внешнего волнового поля, но и размер капли, свойства жидкости капли (плотность ρ_1 , скорость звука a_1), параметры волнового поля внутри капли (k).

На рис. 4 представлены результаты исследований действия радиационной силы на сферическую жидкую каплю размером $R = 1$ см, которая находится на расстоянии $l = 10$ см от свободной поверхности внешней жидкости (воды). Кривые на графике соответствуют: пунктирная кривая – твердой сфере, сплошная – бензиновой капле, штриховая – капле карбона тетрахлорида, штрихпунктирная – капле ртути.

Рассмотрим случай $k = 156,2 \text{ м}^{-1}$ (длина волны $\lambda = 4$ см). В этом случае каждая из капель в отдельности будет находиться в узле стоячей волны в положении равновесия. При увеличении частоты на каплю независимо от вида жидкости будет действовать радиационная сила в положительном направлении оси Oz , а при уменьшении частоты – в отрицательном направлении. При увеличении частоты (волнового числа) такое единообразие нарушается.

Максимальная величина радиационной силы, действующей на твердую сферическую частицу при соответствующих значениях волновых чисел, меньше максимальной величины радиационной силы, действующей на жидкую каплю такого же размера.

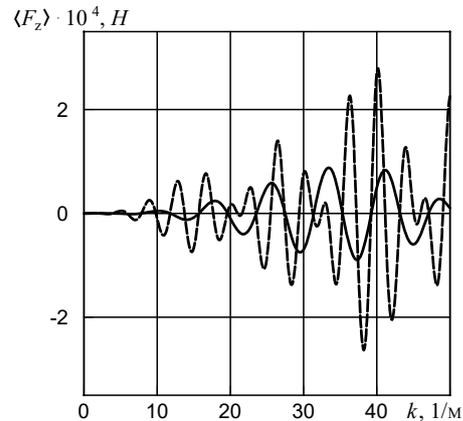


Рис. 3

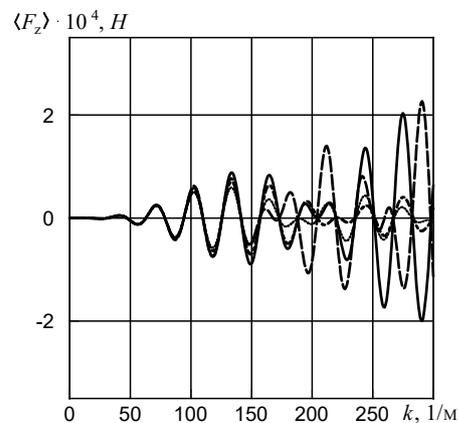


Рис. 4

Заключение.

В рамках принятого в данной работе приближения можно сделать заключение, что радиационная сила не является монотонной функцией частоты первичной волны. Характер действия радиационной силы на жидкую сферу зависит от многих факторов: частоты первичной волны, радиуса жидкой сферы, ее расстояния от свободной поверхности внешней жидкости, плотности жидкости сферической капли и скорости звука в ее жидкости. Существуют частоты первичной волны, при которых радиационная сила не действует на сферические капли.

Данное явление, обусловленное радиационными силами, может иметь большое значение при разработке технологических процессов, использующих акустические волны [6].

Научные исследования, результаты которых опубликованы в данной статье, выполнены за счет средств бюджетной программы «Поддержка приоритетных направлений научных исследований» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Досліджено дію радіаційної сили на сферичну краплю ідеальної рідини в околі вільної межі рідини при падінні перпендикулярно до поверхні рідини акустичної хвилі. В результаті рідинна сфера перебуває в полі стоячої хвилі звукового тиску з вузлом на вільній поверхні рідини. Мірою взаємодії є радіаційна сила: середня в часі величина інтеграла по поверхні сфери від тиску в зовнішній рідині, зумовленому акустичною хвилею. Застосовано підхід, який передбачає при визначенні тиску в рідині використання потенціалу поля швидкості, одержаного в результаті розв'язування лінійної задачі дифракції. Встановлено, що існують частоти первинної хвилі при яких радіаційна сила не діє на сферичні краплі, які, отже, будуть нерухомими.

1. Гузь А.Н., Головчан В.Т. Дифракция упругих волн в многосвязных телах. – Киев: Наук. думка, 1972. – 254 с.
2. Зарембо Л.К., Красильников В.А. Введение в нелинейную акустику. – Москва: Наука, 1966. – 520 с.
3. Исакович М.А. Общая акустика. – Москва: Наука, 1973. – 496 с.
4. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. – Москва – Ленинград: ГИТТЛ, 1949. – 695 с.
5. Красильников В.А., Крылов В.В. Введение в физическую акустику. – Москва: Наука, 1984. – 384 с.
6. Медников Е.П. Акустическая коагуляция и осаждение аэрозолей. – Москва: Изд-во АН СССР, 1963. – 263 с.
7. Guz A.N., Bagno A.M. Effect of Prestresses on Lamb Waves in a System Consisting of an Ideal Liquid Half-Space and in Elastic Layer // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 5. – P. 495 – 505.
8. Guz A.N., Zhuk A.P. Motion of Solid Particles in a Liquid under the Action of an Acoustic Field: the Mechanism of Radiation Pressure // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, N. 3. – P. 246 – 265.
9. Guz A.N., Zhuk A.P. Dynamics of a rigid cylinder near a plane boundary in the radiation field of an acoustic wave // J. of Fluids and Structures. – 2009. – **25**. – P. 1206 – 1212.
10. Guz A.N., Zhuk A.P. Effect of Acoustic Radiation in a Viscous Liquid on a Spherical Drop of Ideal Liquid // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 6. – P.605 – 614.
11. Guz A.N., Zhuk A.P., Bagno A.M. Dynamics of Elastic Bodies, Solid Particles and Fluids Particles in a Compressible Viscous Fluid (Review) // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 5. – P. 449 – 507.
12. King L.V. On the Acoustic Radiation Pressure on Sphere // Proc. Roy. Soc. Ser. A. – 1934. – **147**, N 861. – P. 246 – 265.
13. Rushchitsky J.J., Sinchilo S.V. Variant of the Nonlinear Wave Equations Describing Cylindrical Axisymmetrical Waves // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 4. – P. 393 – 398.
14. Zhuk A.P. Effect of Acoustic Radiation on a Spherical Drop of Liquid // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, N 7. – P. 726 – 733.
15. Zhuk A.P. Dynamics of a Spherical Particle Near a Flat Liquid Boundary under Acoustic Radiation Forces // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 11. – P. 1223 – 1232.
16. Zhuk A.P., Kubenko V.D., Zhuk Ya.A. Acoustic radiation force on a spherical particle in a fluid – filled cavity // J. Acoust. Soc. Am. – 2012. – **132**, N 4. – P. 2189 – 2197.
17. Zhuk A.P., Kubenko V.D., Zhuk Ya.A. Acoustic Radiation Acting on a Liquid Sphere in a Circular Cylinder Filled with a Fluid // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 5. – P. 501 – 511.
18. Zhuk A.P., Zhuk Ya.A. On the Acoustic Radiation Force Acting upon a Rigid Spherical Particle Near the Free Liquid Surface // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 5. – P. 544 – 551.

Поступила 14.05.2019

Утверждена в печать 09.07.2020