

Я. Я. Рущицкий, В. Н. Юрчук

О ВЛИЯНИИ ТРЕТЬЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ПРИ АНАЛИЗЕ  
ЭВОЛЮЦИИ НЕЛИНЕЙНО УПРУГОЙ Р-ВОЛНЫ. ЧАСТЬ 2.

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: rushch@inmech.kiev.ua*

**Abstract.** The propagation of a nonlinear elastic longitudinal plane wave of displacement is analyzed theoretically and numerically within the framework of the Murnaghan model for a symmetrical initial profile in the form of Gauss's function and asymmetrical initial profile in the form of Whittaker's function. The basic novelty consists in that the evolution of waves is analyzed by the approximate methods by taking into account the first three approximations. The analysis of the harmonic wave is considered for the only comparison with the new results for Whittaker's wave. Some essential distinctions between the evolution of waves are shown. Common to these profiles is the distortion of the initial profile when the wave moves due to the nonlinear self-interaction of the wave. A bell-shaped (symmetrical profile) solitary wave retains symmetry when moving in a nonlinearly elastic body. For some initial sets of parameters, this wave initially does not change the bottom length and only shows the tendency to form two humps instead of one when taking into account the second conditional harmonic (the formation of two bell-shaped waves adjacent to each other and having half the bottom) as well as the sinking of the left hump and elevation of the right hump when taking into account the third harmonic. The asymmetrical profile in the form of Whittaker's function retains the length of the bottom and asymmetry in the case of the allowance for the second harmonic, but the value of the amplitude increases rapidly. When the third harmonic is taken into account, two asymmetrical humps are formed, which resemble the evolution of the symmetrical profile when the second harmonic is taken into account. Common to the evolution of symmetrical and asymmetrical profiles is the scenario of distortion of the initial profile of the wave - the formation of two symmetrical humps in the case of accounting for the second harmonic of Gauss's function and two asymmetrical humps in the case of accounting for the third harmonic of Whittaker's function. In the case of allowance for the third harmonic for symmetrical and asymmetrical profiles, the two humps become asymmetric but this asymmetry of profiles is different.

**Key words:** solitary nonlinear elastic P-wave; Murnaghan potential; approximate method; Gauss and Whittaker initial wave profiles; evolution; distortion.

**Введение.**

Данное исследование продолжает анализ, проведенный в [18] для одиночной плоской волны. Использована модель Мурнагана нелинейного упругого деформирования материала [2 – 4, 6, 7, 10].

Упругий потенциал Мурнагана квадратично и кубически нелинеен относительно компонентов тензора деформаций Коши – Грина

$$\begin{aligned} \varepsilon_{nm} &= (1/2)(u_{n,m} + u_{m,n} + u_{k,n}u_{k,m}); \\ W(\varepsilon_{ik}) &= (1/2)\lambda(\varepsilon_{mm})^2 + \mu(\varepsilon_{ik})^2 + (1/3)A\varepsilon_{ik}\varepsilon_{im}\varepsilon_{km} + B(\varepsilon_{ik})^2\varepsilon_{mm} + (1/3)C(\varepsilon_{mm})^3 \end{aligned} \quad (1)$$

( $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  – упругие постоянные модели Мурнагана).

Выбран вариант представления потенциала Мурнагана через градиенты смещений, где учтены лишь квадратично и кубически нелинейные составляющие [4, 8 – 10]

$$W = (1/2)\lambda(u_{m,m})^2 + (1/4)\mu(u_{i,k} + u_{k,i})^2 + (\mu + (1/4)A)u_{i,k}u_{m,i}u_{m,k} + (1/2)(\lambda + B)u_{m,m}(u_{i,k})^2 + (1/12)Au_{i,k}u_{k,m}u_{m,i} + (1/2)Bu_{i,k}u_{k,i}u_{m,m} + (1/3)C(u_{m,m})^3 \quad (2)$$

и рассмотрено движение, в котором смещения зависят лишь от одной пространственной координаты и времени  $u_k = u_k(x_1, t)$  (смещения в направлении оси  $Ox_1$  в декартовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$ ). В этом случае вид потенциала (2) упрощается

$$W = (1/2)\left[(\lambda + 2\mu)(u_{1,1})^2 + \mu\left[(u_{2,1})^2 + (u_{3,1})^2\right]\right] + \left[\mu + (1/2)\lambda + (1/3)A + B + (1/3)C\right](u_{1,1})^3 + (1/2)(\lambda + B)u_{1,1}\left[(u_{2,1})^2 + (u_{3,1})^2\right]. \quad (3)$$

Из (3) получаются нелинейные волновые уравнения для трех типов поляризованных плоских волн (P-, SH-, SV- волны). Простейшие нелинейные волновые уравнения являются квадратично нелинейными. В частности, движение P-волны описывается уравнением

$$\rho u_{1,tt} - (\lambda + 2\mu)u_{1,11} = N_1 u_{1,11}u_{1,1} + N_2 (u_{2,11}u_{2,1} + u_{3,11}u_{3,1}); \quad (4)$$

$$N_1 = [3(\lambda + 2\mu) + 2(A + 3B + C)]; \quad N_2 = \lambda + 2\mu + (1/2)A + B. \quad (5)$$

Далее анализ ограничен задачей, когда первоначально в материале возбуждается лишь P-волна [18] и основным нелинейным явлением является явление самогенерации волны. Тогда нелинейное уравнение (4) принимает вид

$$\rho u_{1,tt} - (\lambda + 2\mu)u_{1,11} = N_1 u_{1,11}u_{1,1} \rightarrow u_{1,tt} - (v_L)^2 u_{1,11} = (N_1/\rho)u_{1,11}u_{1,1}, \quad (6)$$

где  $v_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  – фазовая скорость P-волны в линейном приближении.

К настоящему моменту уравнения (6) анализировались приближенно в рамках трех методов – последовательных приближений, медленно изменяющихся амплитуд, ограничения на градиент смещения [1 – 4, 6, 10, 18]. Изучались волны с разными начальными профилями. Большинство результатов относится к анализу нелинейного поведения волн в рамках двух первых приближений. Для трех первых приближений изучены гармонические волны [10, 11 – 13] и волны колоколообразного профиля [18]. Оказалось, что особенности эволюции волны выявляются наиболее четко лишь при численном моделировании. Поскольку такая задача является многопараметрической и на результаты влияет существенно выбор материала, длины и амплитуды волны, то полученные сценарии эволюции волны отличаются довольно значительно. Поэтому любые новые числовые результаты, полученные для новых материалов или новых параметров волны, всегда дополняют общую картину эволюции.

В настоящем исследовании выбраны симметричный профиль в виде функции Гаусса и несимметричный профиль в виде функции Уиттекера с целью исследовать эволюцию волны с несимметричным профилем. Целью объединения анализа для двух профилей является сравнение сценариев симметричного и несимметричного профилей волны. Основным новшеством в представленном анализе одиночной волны является учет третьего приближения. Следует отметить, что третье приближение уже анализировалось ранее для иных материалов для симметричного колоколообразного профиля, где обнаружено, что решающим фактором для выявления достаточно видимого эффекта эволюции является расстояние, которое прошла волна.

### 1. Приближенный подход к анализу нелинейного волнового уравнения (6).

Как известно [10 – 13, 18], анализ эволюции одиночных волн методом последовательных приближений приводит к существенным математическим сложностям и поэтому далее будет применен метод ограничения на градиент смещения. Для этого удобно представить уравнение (6) в виде

$$u_{1,tt} - \left\{ (v_L)^2 + (N_1/\rho)u_{1,1} \right\} u_{1,11} = 0 \rightarrow u_{1,tt} - \{1 + \alpha u_{1,1}\} (v_L)^2 u_{1,11} = 0; \quad \alpha = [N_1/(\lambda + 2\mu)]. \quad (7)$$

Предполагается, что начальный профиль волны описывается достаточно гладкой функцией  $u(x_1, t = 0) = F(x_1)$  и волна имеет форму волны Даламбера

$$u(x_1, t) = F(x_1 - vt), \quad (8)$$

где скорость волны переменная и определяется выражением

$$v = \sqrt{1 + \alpha u_{1,1}} c_L. \quad (9)$$

Далее корень в (9) записывается в виде ряда

$$\sqrt{1 + \alpha u_{1,1}} = (1 + \alpha u_{1,1})^{1/2} = 1 + (1/2)\alpha u_{1,1} - (1/8)(\alpha u_{1,1})^2 + \dots$$

при ограничении

$$|\alpha u_{1,1}| \ll 1. \quad (10)$$

Ввиду малости величины  $\alpha u_{1,1}$  решение (8) может быть представлено приближенно в виде первых трех аппроксимаций

$$u_1(x_1, t) \cong F \left\{ a(x_1 - v_L t) - (1/2)t\alpha v_L u_{1,1} \left[ 1 - (1/4)\alpha v_L u_{1,1} \right] \right\}. \quad (11)$$

Поскольку ранее приближенное решение записывалось в виде первых двух аппроксимаций, то приближение (11) вносит элемент новизны в последующий анализ.

Следует заметить, что адекватность приближения (12) зависит от точности выполнения условия (10), которое включает ограничения на два параметра: зависящий от свойств материала параметр  $\alpha = 3 + 2(A + 3B + C)/(\lambda + 2\mu)$  и градиент перемещения  $u_{1,1}$ .

Если обозначить фазу волны с постоянной фазовой скоростью через  $\sigma = a(x_1 - c_L t)$  и ввести дополнительный малый параметр

$$|\delta| = \left| - (1/2)t\alpha v_L u_{1,1} \left[ 1 - (1/4)\alpha v_L u_{1,1} \right] \right| \ll 1, \quad (12)$$

то решение (12) можно представить в виде ряда Тейлора

$$u(x_1, t) \approx F(\sigma + \delta) \approx F(\sigma) + F'(\sigma)\delta + (1/2)F''(\sigma)\delta^2 + \dots. \quad (13)$$

Далее по причине малости  $\delta$  анализ ограничивается первыми тремя членами в (13). Поскольку малость  $|\alpha u_{1,1}|$  уже предположена в (10), то это (12) является условием на  $\alpha v_L t$ .

Далее из (13) получается выражение для градиента смещения

$$u_{1,1}(x_1, t) \approx F'_\sigma(\sigma + \delta) \cdot \sigma'_{x_1} = F'_\sigma(\sigma + \delta) \cdot \left( a - (1/2)t\alpha v_L u_{1,1} \left[ 1 - (1/2)t\alpha v_L \right] \right) \approx aF'_\sigma(\sigma),$$

которое позволяет записать решение (13) в виде

$$\begin{aligned} u_1(x_1, t) &\approx F(\sigma) - F'_{,1}(\sigma) a^2 \left\{ (1/2)t\alpha v_L F'_{,1}(\sigma) \left[ 1 - (1/4)\alpha a F'_{,1}(\sigma) \right] \right\} = \\ &= F(\sigma) - (1/2)\alpha a^2 v_L t \left[ F'_{,1}(\sigma) \right]^2 \left[ 1 - (1/4)\alpha a v_L F'_{,1}(\sigma) \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Приближенное представление решения (14) описывает нелинейные волновые эффекты, состоящие в первую очередь в возникновении второй и третьей гармоник в случае одиночной волны и увеличении амплитуды со временем распространения волны.

Далее рассматривается профиль в виде функции Гаусса  $F(x_1) = e^{-(ax_1)^2/2}$  (колоколообразная волна) и профиль в виде функции Уиттекера  $F(x_1) = W_{1/4;1/4}(ax_1)$ .

Для одиночной волны  $a$  определяет ширину подошвы волны. Этот параметр важен для оценки соотношения волны к модели малых или немалых градиентов смещений. Отношение максимальной амплитуды волны к длине ее подошвы позволяет сделать такую оценку.

## 2. Параметры материала и волны в последующем числовом моделировании.

Выберем два металлических композитных материала (матрица – алюминий, наполнитель – вольфрам) с такими механическими параметрами (система СИ) [2]:

Материал 51 (объемное содержание матрицы равно 0,8) –

$$\rho = 0,594 \cdot 10^{-4}; \quad \lambda = 5,59 \cdot 10^{-10}; \quad \mu = 3,26 \cdot 10^{-10};$$

$$A = -0,658 \cdot 10^{-11}; \quad B = -2,18 \cdot 10^{-11}; \quad C = -4,35 \cdot 10^{-11}; \quad c_L = 4,515 \cdot 10^3; \quad \alpha = -16,072.$$

Материал 52 (объемное содержание матрицы равно 0,6) –

$$\rho = 0,918 \cdot 10^{-4}; \quad \lambda = 11,6 \cdot 10^{-10}; \quad \mu = 0,721 \cdot 10^{-10};$$

$$A = -1,33 \cdot 10^{-11}; \quad B = -4,45 \cdot 10^{-11}; \quad C = -9,5 \cdot 10^{-11}; \quad c_L = 3,769 \cdot 10^3; \quad \alpha = -34,08.$$

Для одиночной волны с профилем в виде функции Гаусса или функции Уиттекера (которые являются функциями конечного веса) предполагается, что длиной подошвы волны  $L$  является интервал (расстояние), для которого площадь под графиком начального профиля волны вне этого интервала ничтожно мала. В представлении профиля в виде  $F(x_1) = e^{-(ax_1)^2/2}$  и  $F(x_1) = W_{1/4;1/4}(ax_1)$  параметр  $a$  определяет длину подошвы по формуле  $\sigma = (1/a)$ . Для исследуемых двух материалов и соответствующих волн начальная подошва выбрана таким образом: для симметричного профиля  $L = \{0,0375; 0,0187\}$ , а для несимметричного профиля  $L = \{0,0006; 0,0003\}$ .

Рассмотрено 16 вариантов первоначального задания параметров Р-волны (2 варианта материала, 2 варианта аналитического представления профиля, 2 варианта подошвы волны, 2 варианта начальной амплитуды).

## 3. Числовой анализ волны с профилем в виде функции Гаусса.

Начальный профиль волны  $F(x_1) = e^{-(ax_1)^2/2}$  имеет колоколообразную симметричную форму и формула (14) приобретает вид

$$u(x_1, t) = A^0 e^{-\sigma^2/2} - (1/2)\alpha v_L a^2 t (A^0)^2 \sigma^2 e^{-\sigma^2} - (1/8)\alpha^2 v_L a^3 t (A^0)^3 \sigma^3 e^{-3\sigma^2/2}. \quad (15)$$

Заметим, что приближенная формула для колоколообразной волны (15) включает как-бы три гармоники, поскольку для анализа профиля понятия первой, второй и третьей гармоник не вполне применимы и функции  $e^{-[a^2(x_1 - c_L t)^2/2]}$ ,  $e^{-a^2(x_1 - c_L t)^2}$ ,  $e^{-3[a^2(x_1 - c_L t)^2/2]}$  можно считать первой, второй и третьей гармониками весьма условно.

Следует заметить, что в волне (15) квадрат фазы волны  $\sigma = k_L x_1 - \omega t$  во втором слагаемом и куб в третьем слагаемом входят явно в выражение для амплитуды. Этот факт характерен для одиночных волн и не присутствует в нелинейном описании гармонической волны.

По формуле (15) построены двумерные графики с координатами «смещение  $u_1$  – пройденное волной расстояние  $x_1$ ». Всего 8 наборов (2 материала, 2 варианта длины волны, 2 варианта максимальной начальной амплитуды). Каждый набор включает 3 графика для материала М-51 и 4 графика для материала М-52. На рис. 1, а, 2, а и рис. 1, б, 2, б наложены два профиля, которые отвечают: первый – первой гармонике, второй – первой + второй гармоникам, где показано, что проявления нелинейности уже наблюдаемо при расстоянии 50 повторений подошвы волны. На рис. 1, в, 2, в и рис. 2, г показаны по два профиля: один соответствует первой + второй гармоникам и другой – первой + второй + третьей гармоникам. Рис. 2, г аналогичен рис. 2, в, однако соответствует большему расстоянию, пройденному волной. В этом случае наблюдает-

ся более развитая тенденция образования двух горбов на профиле. Рис. 1 и рис. 2 отличаются начальными амплитудами. Для рис. 2 взяты такие начальная амплитуда и расстояния, пройденные волной, чтобы нелинейность проявлялась существенно и искажение начального профиля было хорошо наблюдаемо визуально. В графиках для материала М-51 эволюции профиля видна на расстоянии в примерно 1000 повторений длины подошвы, тогда как для материала М-52 рассмотрены расстояния на порядок больше.

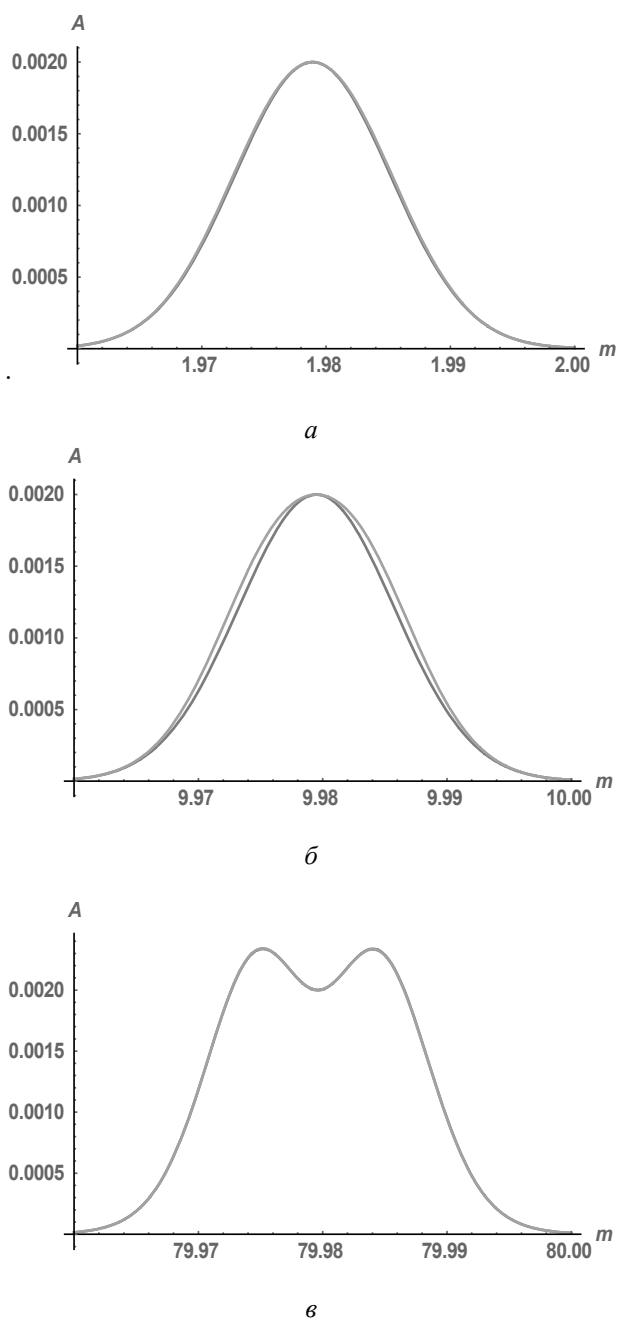
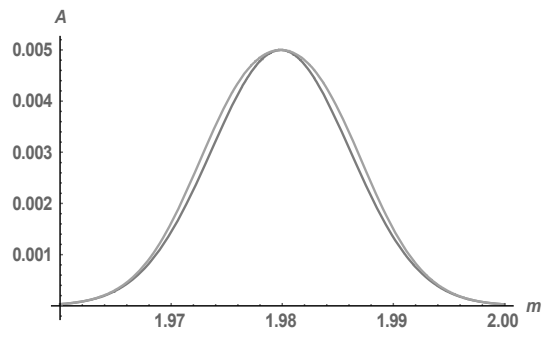
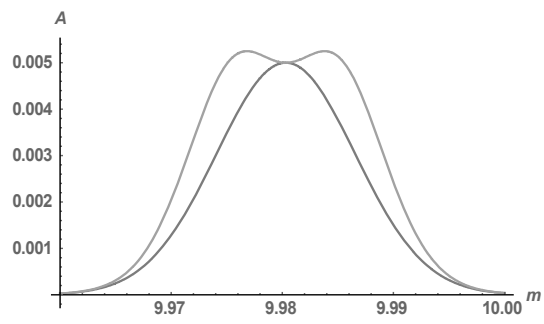


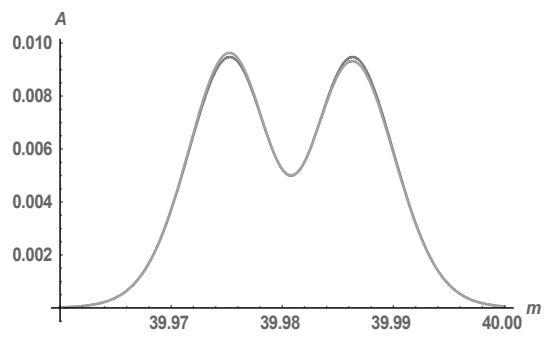
Рис. 1



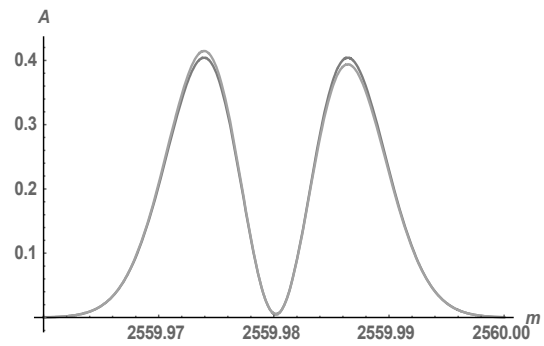
*a*



*b*



*c*



*d*

*Рис. 2*

Из графиков, представленных выше, следует, что эволюция начального симметричного профиля волны происходит несимметрично относительно пиков – из четырех склонов двух горбов внешние (первый и четвертый) более покатые. Максимальное значение амплитуды медленно увеличивается с тенденцией превращения одного горба в два (что можно видеть на рис. 1, а, 2, а и рис. 1, б, 2, б). На рис.1, в, 2, в и рис. 2, г приведены графиков для первого + второго и первого + второго + третьего приближений. Из этих графиков следует, что при учете третьего приближения пик первого горба увеличивается и уменьшается пик второго (левый пик растет и правый – падает). Центральная часть графика опускается к оси и не пересекает ее, разделяя и срачивая два горба. Это новое явление ранее описано в первой части 1 этой статьи.

Таким образом, учет нелинейности в анализе распространения одиночной волны с начальным симметричным профилем в виде функции Гаусса позволяет описать эволюцию этого профиля, которая сопровождается новыми волновыми эффектами.

#### 4. Числовой анализ волны с профилем в виде функции Уиттекера.

Пусть начальный профиль волны имеет вид функции Уиттекера с двумя одинаковыми индексами  $F(x_1) = W_{1/4;1/4}(ax_1)$ . Тогда формула (14) приобретает вид

$$u_1(x_1, t) = a^\circ W_{1/4;3/4}(ax_1) - (1/2)t\alpha c_L(a)^2 (a^\circ)^2 (W'_{1/4;1/4}(ax_1))^2 + (1/8)t(\alpha)^2 c_L(a)^3 (a^\circ)^3 (W'_{1/4;1/4}(ax_1))^3. \quad (16)$$

Поскольку для функции  $W_{\lambda,\mu}(z)$  производная вычисляется по формуле [5]

$$\frac{d}{dz}W_{\lambda,\mu}(z) = \left(\frac{\lambda}{z} - \frac{1}{2}\right)W_{\lambda,\mu}(z) - \frac{1}{z} \left[ \mu^2 - \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 \right] W_{\lambda-1,\mu}(z)$$

и первая производная для  $W_{1/4;1/4}(x)$  имеет вид  $(W_{1/4;1/4}(\sigma))' = \left(\frac{5}{4\sigma} - \frac{1}{2}\right)W_{1/4;1/4}(\sigma)$ , то решение (17) записывается в таком виде

$$u_1(x_1, t) = a^\circ W_{1/4;1/4}(\sigma) - (1/2)t\alpha c_L(a)^2 (a^\circ)^2 \left( \left(\frac{5}{4\sigma} - \frac{1}{2}\right)W_{1/4;1/4}(\sigma) \right)^2 + (1/8)t(\alpha)^2 c_L(a)^3 (a^\circ)^3 \left( \left(\frac{5}{4\sigma} - \frac{1}{2}\right)W_{1/4;1/4}(\sigma) \right)^3. \quad (17)$$

Из вида решения (17) следуют две особенности: оно описывает изменение начального профиля одиночной волны (вследствие прямой зависимости нелинейной составляющей от времени) и «расплывание» начального профиля (вследствие присутствия нелинейных составляющих).

По формуле (17) построены двумерные графики с координатами «смещение  $u_1$  – пройденное волной расстояние  $x_1$ ». Всего 8 наборов (2 материала, 2 варианта длины волны, 2 варианта максимальной начальной амплитуды). Каждый набор включает 3 графика с двумя профилями. На первом графике наложены два профиля, которые отвечают: первый – первой гармонике, второй – первой + второй гармоникам, а на втором и третьем графике наложены по два профиля, которые отвечают: второй - первой + второй гармоникам и третий – первой + второй + третьей гармоникам при разных пройденных расстояниях. Расстояния наложены один на другого с целью сравнения. Третий график аналогичен второму, только здесь пройденное расстояние волны более большое и поэтому наблюдается образование двух горбов. В каждом наборе эволюция профиля видна на расстоянии в примерно 1000 повторений длины подошвы, влияние нелинейности уже проявляется существенно и искажение начального профиля вполне наблюдаемо визуально.

На рис. 3 приведены графики одного набора, соответствующего таким значениям параметров: материал М-51,  $L = 0,0006$ ,  $a_0 = 5,5 \cdot 10^{-6}$ .

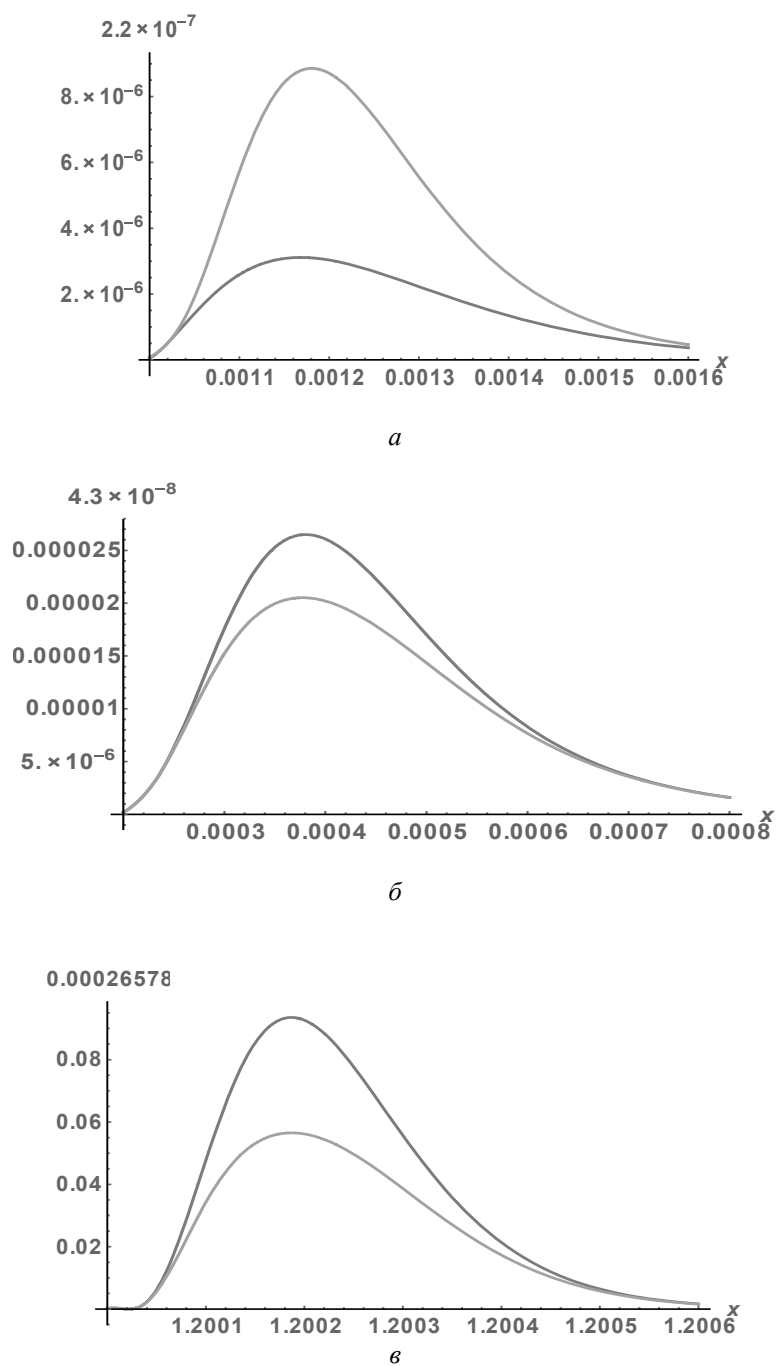
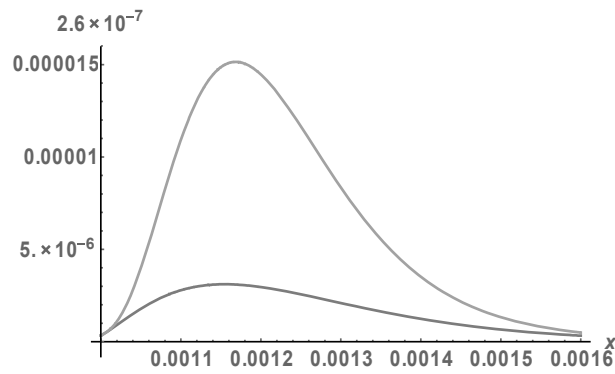


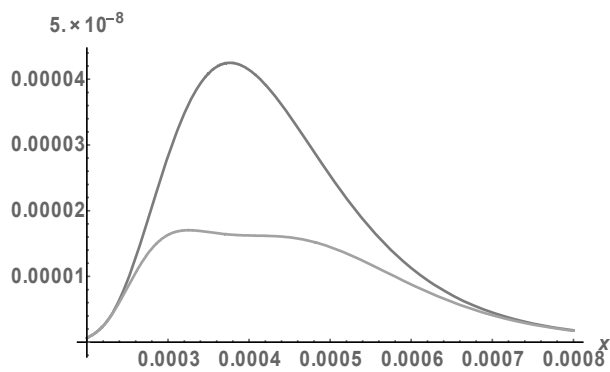
Рис. 3

На рис. 4 приведены графики одного набора, соответствующего таким значениям параметров: материал К52,  $L = 0,0006$ ,  $a_0 = 5,5 \cdot 10^{-6}$ .

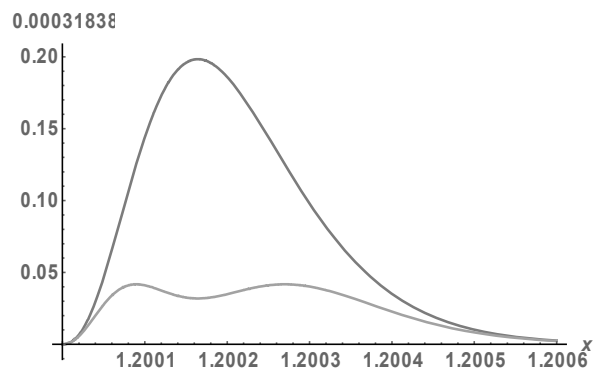




*a*



*б*



*в*

*Рис. 4*

Из представленных графиков следует, что эволюция начального несимметричного профиля волны происходит несимметрично. При этом максимальное значение амплитуды стремительно увеличивается (что можно видеть на первых рисунках). На втором и третьем рисунках приведены графики второй и третьей гармоники, где уже видна тенденция к образованию двух несимметричных горбов.

Таким образом, учет нелинейности в анализе распространения одиночной волны с начальным профилем в виде функции Уиттекера позволяет описать дисторсию профиля с такими особенностями как увеличение несимметрии профиля и образование двух горбов.

### Общие выводы.

Проведен анализ распространения нелинейной упругой продольной плоской волны смещения  $u(x_1, t)$  для симметричного начального профиля в виде функции Гаусса и несимметричного начального профиля в виде функции Уиттекера. Соответственно, профили описываются двумя различными функциями: функцией Гаусса  $e^{-x_1^2/2}$  и функцией Уиттекера  $W_{1/4,1/4}(ax_1)$ .

Общим для этих профилей является искажение начального профиля при движении волны вследствие нелинейного взаимодействия волны самой с собой. Однако искажение происходит для каждого вида по-своему.

Колоколообразная (симметричный профиль) одиночная волна сохраняет симметрию при своем движении в нелинейно упругой среде. Для ряда первоначальных наборов параметров эта волна первоначально не изменяет длину подошвы и только показывает тенденцию к образованию двух горбов вместо одного при учете второй условной гармоники (образованию двух колоколообразных волн, примыкающих друг к другу и уменьшающих вдвое подошвы) и западание левого и возвышения правого горба для третьей гармоники.

Несимметричный профиль в виде функции Уиттекера сохраняет длину подошвы и несимметричность при учете второго приближения (второй гармоники), но при этом значения амплитуды стремительно увеличивается. При дополнительном учете третьего приближения (третьей гармоники) образуется два несимметричных горба которые напоминают эволюцию симметричного профиля при учете второй гармоники.

Общим для эволюции симметричного и несимметричного профилей является сценарий искажения начального профиля волны - образования двух симметричных горбов для второй гармоники функции Гаусса и двух несимметричных горбов для третьей гармоники функции Уиттекера. Учет третьей гармоники для симметричного профиля делает два горба несимметричными и дает похожую картину для несимметричного профиля функции Уиттекера, только в этих двух профилей несимметричность разная.

Научные исследования, результаты которых опубликованы в данной статье, выполнены за счет средств бюджетной программы «Поддержка приоритетных направлений научных исследований» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Проаналізовано поширення нелінійно пружної поздовжньої плоскої хвилі зміщення для симетричного початкового профілю хвилі у вигляді функції Гауса та асиметричного початкового профілю у вигляді функції Уіттекера. Основна новизна полягає в тому, що еволюція хвиль аналізується наближеними методами з урахуванням перших трьох апроксимацій. Аналіз гармонічної хвилі розглядається тільки для порівняння з новими результатами для дзвіноподібної хвилі. Показано деякі суттєві відмінності між еволюцією хвиль. Спільним для цих профілів є спотворення початкового профілю внаслідок нелінійної взаємодії хвилі сама з собою. Дзвіноподібна (симетричний профіль) хвиля зберігає симетрію при русі в нелінійно пружному середовищі. Для ряду початкових наборів параметрів ця хвиля спочатку не змінює довжину підосви і показує тільки тенденцію до формування двох горбів замість одного при врахуванні другої умовної гармоніки (утворення двох дзвонів, що прилягають один до одного, і зменшення підосви навпіл) і до западання лівого і підвищення правого горбів у випадку врахування третьої гармоніки. Хвиля з асиметричним профілем у вигляді функції Уіттекера зберігає довжину підосви і асиметричність у випадку врахування другої гармоніки, але при цьому значення амплітуди хвилі швидко зростає. У випадку врахування третьої гармоніки утворюються два асиметричні горби, які нагадують еволюцію симетричного профілю при врахуванні другої гармоніки. Спільним для еволюції симетричного і асиметричного профілів є сценарій спотворення початкового профілю хвилі - формування двох симетричного горбів при врахуванні другої гармоніки в аналізі профіля Гаусса і двох асиметричних горбів при врахуванні третьої гармоніки в аналізі профіля Уіттекера. Врахування третьої гармоніки робить два горби асиметричними для симетричного та асиметричного профілів, тільки в цих двох профілях асиметричність є різною.

1. Руцицкий Я.Я., Юрчук В.Н. О влиянии третьего приближения при анализе эволюции нелинейно упругой Р-волны. Часть 1. // Прикл. механика. – 2020. – № 5. – С. 65 – 77.
2. Руцицкий Я.Я. Про наблизений аналіз еволюції поздовжньої хвилі, що поширюється в пружному середовищі // Доп. НАН України. – 2019. – N 8. – С. 46 – 58.
3. Руцицкий Я.Я., Цурнал С.І. Хвилі в матеріалах з мікроструктурою. – Київ: Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка, 1998. – 377 с.
4. Cattani C., Rushchitsky J. Wavelet and Wave Analysis as applied to Materials with Micro and Nanostructure. – Singapore - London: World Scientific, 2007. – 466 p.
5. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Table of Integrals, Series, and Products. 7<sup>th</sup> revised edition. Eds. Jeffrey A., Zwillinger D. – New York: Academic Press Inc., 2007. – 1200 p.
6. Guz A.N., Rushchitsky J.J. For the 100th Anniversary of the S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NASU: Books (Monographs and Textbooks) Published by the Institute // Int. Appl. Mech. – 2018. – 54, N 2. – P. 121 – 142.
7. Rushchitsky J.J. Elements of the Theory of Mixtures. – Kiev: Naukova Dumka, 1991. – 160 p.
8. Rushchitsky J.J. Theory of waves in materials. – Copenhagen: Ventus Publishing ApS, 2011. – 270 p.
9. Rushchitsky J.J. Certain Class of Nonlinear Hyperelastic Waves: Classical and Novel Models, Wave Equations, Wave Effects // Int. J. Appl. Math. and Mech. – 2013. – 9, N 12. – P. 600 – 643.
10. Rushchitsky J.J. Nonlinear Elastic Waves in Materials. – Heidelberg: Springer, 2014. – 455 p.
11. Rushchitsky J.J. On Constraints for Displacement Gradients in Elastic Materials // Int. Appl. Mech. – 2016. – 52, N 2. – P. 119 – 132.
12. Rushchitsky J.J. Plane nonlinear elastic waves: approximate approaches to analysis of evolution- plenary lecture // Abstracts of 19<sup>th</sup> int. conf. “Dynamical System Modeling and Stability Investigations – DSMSI 2019”, Ukraine, Taras Shevchenko Kyiv National University, May 22 – 24, 2019. – P. 221 – 223.
13. Rushchitsky J.J. Plane Nonlinear Elastic Waves: Approximate Approaches to Analysis of Evolution. Chapter in the book “Understanding Plane Waves” Ed. William A. Cooper – London: Nova Science Publishers, 2019. – 300 p. – P. 201 – 220.
14. Rushchitsky J.J., Cattani C., Sinchilo S.V. Physical Constants for One Type of Nonlinearly Elastic Fibrous Micro- and Nanocomposites with Hard and Soft Nonlinearities // Int. Appl. Mech. – 2005. – 41, N 12. – P. 1368 – 1377.
15. Rushchitsky J.J., Yurchuk V.M. One Approximate Method for Analyzing Solitary Waves in Nonlinearly Elastic Materials // Int. Appl. Mech. – 2016. – 52, N 3. – P. 282 – 290.
16. Rushchitsky J.J., Yurchuk V.M. Numerical Analysis of the Evolution of Plane Longitudinal Nonlinear Elastic Waves with Different Initial Profiles // Int. Appl. Mech. – 2017. – 53, N 1. – P. 104 – 110.
17. Rushchitsky J.J., Yurchuk V.M. Evolution of SV-Wave with Gaussian Profile // Int. Appl. Mech. – 2017. – 53, N 3. – P. 300 – 304.
18. Yurchuk V.N. Difference in the Evolution of Longitudinal and Transverse Bell-Shaped Plane Waves Propagating in Nonlinear Elastic Composite // Int. Appl. Mech. – 2019. – 55, N 1. – P. 55 – 57.

Поступила 30.10.2019

Утверждена в печать 09.07.2020