В. Р. Б а р с е г я н

О ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЯМИ СТРУНЫ

Институт механики НАН Армении,
пр. Маршала Баграмяна, 24б, 0019 Ереван, Армения;
Ереванский государственный университет,
ул. Алека Манукяна, 1, 0025 Ереван, Армения; e-mail: barseghyan@sci.am

Abstract. The optimal control problem of oscillations of the string with the given initial finite conditions and non-separated values of the derivatives of deflection functions at the intermediate moments with the quality criteria given on the whole time interval is considered. The problem is solved by the method of separation of variables and the theory of optimal control of finite-dimensional systems with non-separated multipoint intermediate conditions. As an application of the proposed approach, an optimal control action is constructed for the string oscillations with the given nonlocal values of the velocities of string points at the two intermediate moments.

Keywords: string oscillation, optimal control of oscillations, intermediate moments, non-separated multipoint conditions, optimal control.

Введение. Большой класс физических процессов, связанных с колебательными системами, моделируется волновым уравнением [10, 11, 18]. При этом на практике часто возникают задачи управления, когда нужно сгенерировать заданные характеристики колебаний, удовлетворяющих промежуточным условиям. Внимание исследователей привлекли многоточечные краевые задачи управления, в которых наряду с классическими краевыми (начальное и конечное) условиями заданы также неразделенные (нелокальные) многоточечные промежуточные условия [1 – 9, 13, 14, 16]. Неразделенные многоточечные краевые задачи возникают, с одной стороны как математические модели реальных процессов, с другой стороны – для многих уравнений невозможна корректная постановка локальных краевых задач. Неразделенность многоточечных условий также, в частности, обусловлена невозможностью на практике проводить замеры измеряемых параметров состояния объекта мгновенно или в его отдельно взятых точках. 1.

Задачи управления и оптимального управления колебательных процессов, как внешними, так и граничными управляющими воздействиями при различных типах граничных условий, рассмотрены в работах [1, 3, 5 – 7, 9, 13 14, 16], в которых предложены различные методы решения.

В настоящей работе рассматривается задача оптимального управления для уравнения колебания струны с заданными начальными условиями и неразделенными значениями скоростей точек струны в промежуточных моментах времени с критерием качества, заданным на весь промежуток времени. Методом разделения переменных задача сводится к задаче оптимального управления со счетным числом обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными начальными, конечными и неразделенными многоточечными промежуточными условиями. С помощью методов теории оптимального управления конечномерными системами с многоточечными промежуточными условиями построено оптимальное управляющее воздействие.

В качестве приложения предложенного конструктивного подхода построено оптимальное управляющее воздействие для колебания струны с заданными неразделенными значениями скоростей точек струны в двух промежуточных моментах времени.

§1. Постановка задачи.

Рассмотрим однородную упругую натянутую струну длиной l, края которой закреплены. Пусть в вертикальной плоскости на струну действуют распределенные силы с плотностью $u(x, t)$, которая является управляющим воздействием.

Пусть состояние распределенной колебательной системы (малые поперечные колебания струны) описывается функцией $Q(x,t)$, $0 \le x \le l$, $0 < t < T$, которая подчиняется при $0 < x < l$ и $0 < t < T$ волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2} + u(x,t) \tag{1.1}$$

с однородными граничными условиями

$$Q(0,t) = 0\,; \;\; Q(l,t) = 0\,; \;\; 0 \le t \le T \tag{1.2}$$

и начальными и конечными условиями

$$Q(x,0) = \varphi_0(x)\,; \;\; \left.\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_0(x)\,; \;\; 0 \le x \le l\,; \tag{1.3}$$

$$Q(x,T) = \varphi_T(x) = \varphi_{m+1}(x)\,; \;\; \left.\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t}\right|_{t=T} = \psi_T(x) = \psi_{m+1}(x)\,, \quad 0 \le x \le l\,. \tag{1.4}$$

В уравнении (1.1) $a^2 = T_0/\rho$, где T_0 – натяжение струны; ρ – плотность однородной струны. Функция $Q(x,t)$, удовлетворяющая уравнению (1.1), дважды непрерывно дифференцируема вплоть до границы области.

Пусть в некоторые промежуточные моменты времени $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m < t_{m+1} = T$ на значения производных функции прогиба струны задано неразделенное (нелокальное) условие в виде

$$\sum_{k=1}^{m} e_k \left.\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t}\right|_{t=t_k} = \beta(x)\,, \tag{1.5}$$

где e_k – заданные величины $(k = 1,...,m)$; $\beta(x)$ – некоторая известная функция. Здесь $\varphi_0(x)$, $\psi_0(x)$, $\varphi_T(x)$, $\psi_T(x)$ и $\beta(x)$ – заданные гладкие функции, удовлетворяющие условиям согласования.

Предполагается, что система (1.1) при ограничениях (1.2) – (1.5) на промежутке времени $[0,T]$ является вполне управляемой [4, 15]. Это означает, что на промежутке времени $[0,T]$ можно выбрать управляющее воздействие $u(x,t)$, под воздействием которого функция прогиба струны $Q(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1.1) и заданным условиям (1.2) – (1.5).

Задачу оптимального управления колебаниями струны с заданными неразделенными значениями скоростей точек прогиба в промежуточные моменты времени t_k $(k = 1, \dots, m)$ можно сформулировать следующим образом: среди возможных управлений $u(x,t)$, $0 \le x \le l$, $0 \le t \le T$ требуется найти оптимальное управляющее воздействие $u^0(x,t)$, переводящее колебания струны (1.1) с граничными условиями (1.2) из заданного начального состояния (1.3) в заданное конечное состояние (1.4), обеспечивая удовлетворение неразделенных многоточечных промежуточных условий (1.5) и минимизирующее функционал

$$J[u]=\left[\int_0^T\int_0^l\big(u(x,t)\big)^2 dxdt\right]^{1/2}. \tag{1.6}$$

§2. Решение задачи.

Для построения решения поставленной задачи решение уравнения (1.1) с граничными условиями (1.2) ищем в виде

$$Q(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}Q_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x. \tag{2.1}$$

Представим функции $u(x,t)$ и $\beta(x)$ в виде рядов Фурье

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x;\quad \beta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\sin\frac{\pi n}{l}x. \tag{2.2}$$

Подставляя разложения (2.1), (2.2) в соотношения (1.1) – (1.5) и в силу ортогональности системы собственных функций следует, что коэффициенты Фурье $Q_n(t)$ удовлетворяют счетному числу систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\ddot{Q}_n(t)-\lambda_n^2Q_n(t)=u_n(t);\quad \lambda_n^2=\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2\quad n=1,2,... \tag{2.3}$$

и следующим начальным, неразделенным многоточечным промежуточным и конечным условиям:

$$Q_n(0)=\varphi_n^{(0)};\quad \dot{Q}_n(0)=\psi_n^{(0)}; \tag{2.4}$$

$$\sum_{k=1}^{m}e_k\dot{Q}_n(t_k)=\beta_n; \tag{2.5}$$

$$Q_n(T)=\varphi_n^{(T)}=\varphi_n^{(m+1)};\quad \dot{Q}_n(T)=\psi_n^{(T)}=\psi_n^{(m+1)}, \tag{2.6}$$

где через $Q_n(t)$, $\varphi_n^{(0)}$, $\psi_n^{(0)}$, $\varphi_n^{(m+1)}$, $\psi_n^{(m+1)}$, $u_n(t)$ и β_n обозначены коэффициенты Фурье, соответствующие функциям $Q(x,t)$, $\varphi_0(x)$, $\psi_0(x)$, $\varphi_{m+1}(x)$, $\psi_{m+1}(x)$, $u(x,t)$ и $\beta(x)$.

Общее решение уравнения (2.3) с начальными условиями (2.4) и его производная имеют вид

$$Q_n(t)=\varphi_n^{(0)}\cos\lambda_n t+\frac{1}{\lambda_n}\psi_n^{(0)}\sin\lambda_n t+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t u_n(\tau)\sin\lambda_n(t-\tau)d\tau;$$

$$\dot{Q}_n(t)=-\lambda_n\varphi_n^{(0)}\sin\lambda_n t+\psi_n^{(0)}\cos\lambda_n t+\int_0^t u_n(\tau)\cos\lambda_n(t-\tau)d\tau. \tag{2.7}$$

Теперь учитывая промежуточные неразделенные (2.5) и конечные (2.6) условия, используя подходы, приведенные в работах [4, 8], из уравнения (2.7), получаем, что функции $u_n(\tau)$ для каждого n должны удовлетворять следующей системе равенств:

$$\int_0^T u_n(\tau)\sin\lambda_n(T-\tau)d\tau=C_{1n}(T);\quad \int_0^T u_n(\tau)\cos\lambda_n(T-\tau)d\tau=C_{2n}(T); \tag{2.8}$$

$$\sum_{k=1}^{m}e_k\int_0^{t_k}u_n(\tau)\cos\lambda_n(t_k-\tau)d\tau=C_{2n}^{(m)}(t_1,...,t_m),$$

где

$$C_{1n}(T)=\lambda_n\varphi_n^{(m+1)}-\lambda_n\varphi_n^{(0)}\cos\lambda_nT-\psi_n^{(0)}\sin\lambda_nT;$$

$$C_{2n}(T)=\psi_n^{(m+1)}+\lambda_n\varphi_n^{(0)}\sin\lambda_nT-\psi_n^{(0)}\cos\lambda_nT; \tag{2.9}$$

$$C_{2n}^{(m)}=C_{2n}^{(m)}(t_1,...,t_m)=\beta_n-\sum_{k=1}^{m}e_k(-\lambda_n\varphi_n^{(0)}\sin\lambda_nt_k+\psi_n^{(0)}\cos\lambda_nt_k).$$

Введем следующие функции:

$$h_{1n}(\tau) = \sin\lambda_n(T-\tau)\ ;\quad h_{2n}(\tau) = \cos\lambda_n(T-\tau)\ ,\quad 0 \le \tau \le T\ ;$$

$$h_{2n}^{(m)}(\tau) = \sum_{k=1}^{m} e_k h_{2n}^{(k)}(\tau)\ ;\quad h_{2n}^{(k)}(\tau) = \begin{cases} \cos\lambda_n(t_k-\tau) & \text{при} \quad 0 \le \tau \le t_k; \\ 0 & \text{при} \quad t_k < \tau \le t_{m+1} = T \end{cases}. \qquad (2.10)$$

Тогда интегральные соотношения (2.8) при помощи функции (2.10) запишутся следующим образом

$$\int_0^T u_n(\tau)h_{1n}(\tau)d\tau = C_{1n}(T)\ ;$$

$$\int_0^T u_n(\tau)h_{2n}(\tau)d\tau = C_{2n}(T)\ ; \qquad (2.11)$$

$$\int_0^T u_n(\tau)h_{2n}^{(m)}(\tau)d\tau = C_{2n}^{(m)}\ ,\quad n = 1,\ 2,\ldots\ .$$

Учитывая разложение (2.2) и ортогональность системы собственных функций, минимизируемый функционал (1.6) запишется в виде:

$$\int_0^T\int_0^l [u(x,t)]^2\,dxdt = \frac{l}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T u_n^2(\tau)\,d\tau\ .$$

Но так как для каждого $n = 1, 2,\ldots$ $\int_0^T u_n^2(\tau)d\tau \ge 0$, следовательно, минимизация функционала (1.6) равносильна минимизации функционалов

$$\int_0^T u_n^2(\tau)\,d\tau \quad (n = 1,2,\ldots)\ . \qquad (2.12)$$

Таким образом, решение поставленной задачи оптимального управления (1.1) – (1.6) для каждого $n = 1, 2,\ldots$ сводится к нахождению такого оптимального управления $u_n^0(t)$ $t \in [0,T]$, которое удовлетворяет интегральным соотношениям (2.11) и доставляет минимум функционалу (2.12). Задачу оптимального управления при функционале (2.12) и с интегральными условиями (2.11) можно рассматривать как задачу условного экстремума из вариационного исчисления. Однако, как видно из обозначения (2.10), классические методы вариационного исчисления не применимы для исследования этой задачи.

Отметим, что условия (2.11) являются линейной операцией, порожденной функцией $u_n(t)$ на промежутке времени $[0,T]$, а функционал (2.12) является нормой линейного нормированного пространства. Следовательно, решение полученной задачи оптимального управления (2.11) – (2.12) целесообразно искать с помощью алгоритма решения проблемы моментов [4, 15].

Следуя [4, 15], для решения конечномерной проблемы моментов (2.11) – (2.12), нужно найти некоторые величины p_{1n}, p_{2n}, q_{2n}, $n = 1,2,\ldots$ связанные условиями

$$p_{1n}C_{1n}(T) + p_{2n}C_{2n}(T) + q_{2n}C_{2n}^{(m)} = 1\ , \qquad (2.13)$$

для которых

$$(\rho_n^0)^2 = \min_{(2.13)}\int_0^T h_n^2(t)dt\ , \qquad (2.14)$$

где

$$h_n(t) = p_{1n}h_{1n}(t) + p_{2n}h_{2n}(t) + q_{2n}h_{2n}^{(m)}(t)\ . \qquad (2.15)$$

Для определения величин $p_{1n}^0,\ p_{2n}^0,\ q_{2n}^0,\ n=1,2,\dots,$ минимизирующих (2.14) с условиями (2.13), применим метод неопределенных множителей Лагранжа. Введем функцию

$$f(p_{1n},p_{2n},q_{2n})=$$

$$=\int_0^T\left[p_{1n}h_{1n}(t)+p_{2n}h_{2n}(t)+q_{2n}h_{2n}^{(m)}(t)\right]^2dt+\gamma_n\left[p_{1n}C_{1n}(T)+p_{2n}C_{2n}(T)+q_{2n}C_{2n}^{(m)}-1\right],$$

где γ_n – неопределенный множитель Лагранжа. На основе этого метода, вычисляя производные по $p_{1n},\ p_{2n},\ q_{2n},\ n=1,2,\dots$ функции $f(p_{1n},p_{2n},q_{2n})$, и, приравнивая к нулю, получаем следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{gathered}
a_n^{(1)}p_{1n}+a_n^{(2)}p_{2n}+b_n^{(2)}q_{2n}=-\frac{\gamma_n}{2}C_{1n}(T);\\
a_n^{(2)}p_{1n}+b_n^{(1)}p_{2n}+c_n^{(2)}q_{2n}=-\frac{\gamma_n}{2}C_{2n}(T);\\
b_n^{(2)}p_{1n}+c_n^{(2)}p_{2n}+c_n^{(1)}q_{2n}=-\frac{\gamma_n}{2}C_{2n}^{(m)},\qquad n=1,2,\dots,
\end{gathered}\tag{2.16}$$

где приняты следующие обозначения:

$$\begin{gathered}
a_n^{(1)}=\int_0^T\left(h_{1n}(\tau)\right)^2d\tau;\quad a_n^{(2)}=\int_0^T h_{1n}(\tau)h_{2n}(\tau)d\tau;\\
b_n^{(1)}=\int_0^T\left(h_{2n}(\tau)\right)^2d\tau;\quad b_n^{(2)}=\int_0^T h_{1n}(\tau)h_{2n}^{(m)}(\tau)d\tau=\int_0^T h_{1n}(\tau)\left(\sum_{k=1}^m e_kh_{2n}^{(k)}(\tau)\right)d\tau;\\
c_n^{(1)}=\int_0^T\left(h_{2n}^{(m)}(\tau)\right)^2d\tau=\int_0^T\left(\sum_{k=1}^m e_kh_{2n}^{(k)}(\tau)\right)^2d\tau;\\
c_n^{(2)}=\int_0^T h_{2n}(\tau)h_{2n}^{(m)}(\tau)d\tau=\int_0^T h_{2n}(\tau)\left(\sum_{k=1}^m e_kh_{2n}^{(k)}(\tau)\right)d\tau.
\end{gathered}\tag{2.17}$$

Присоединяя к уравнениям (2.16) условие (2.13), получим замкнутую систему алгебраических уравнений относительно неизвестных величин $p_{1n},\ p_{2n},\ q_{2n},\ \gamma_n\ \ n=1,2,\dots$.

Введем следующие обозначения:

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}a_n^{(1)}&a_n^{(2)}&b_n^{(2)}\\a_n^{(2)}&b_n^{(1)}&c_n^{(2)}\\b_n^{(2)}&c_n^{(2)}&c_n^{(1)}\end{vmatrix};\quad \Delta_n(p_{1n})=\begin{vmatrix}C_{1n}(T)&a_n^{(2)}&b_n^{(2)}\\C_{2n}(T)&b_n^{(1)}&c_n^{(2)}\\C_{2n}^{(m)}&c_n^{(2)}&c_n^{(1)}\end{vmatrix};$$

$$\Delta_n(p_{2n})=\begin{vmatrix}a_n^{(1)}&C_{1n}(T)&b_n^{(2)}\\a_n^{(2)}&C_{2n}(T)&c_n^{(2)}\\b_n^{(2)}&C_{2n}^{(m)}&c_n^{(1)}\end{vmatrix};\quad \Delta_n(q_{2n})=\begin{vmatrix}a_n^{(1)}&a_n^{(2)}&C_{1n}(T)\\a_n^{(2)}&b_n^{(1)}&C_{2n}(T)\\b_n^{(2)}&c_n^{(2)}&C_{2n}^{(m)}\end{vmatrix}$$

и предположим, что $\Delta_n\neq 0$.

Тогда решение системы (2.16) с условием (2.13) можно представить в виде:

$$p_{1n}^0=\frac{\Delta_n(p_{1n})}{A_n};\quad p_{2n}^0=\frac{\Delta_n(p_{2n})}{A_n};\quad q_{2k}^0=\frac{\Delta_n(q_{2n})}{A_n};\quad \gamma_n=-2\frac{\Delta_n}{A_n},\qquad n=1,2,\dots.\tag{2.18}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$A_n = \Delta_n(p_{1n})C_{1n}(T) + \Delta_n(p_{2n})C_{2n}(T) + \Delta_n(q_{2n})C_{2n}^{(m)} .$$

Подставляя из (2.18) значения для $p_{1n}^0,\ p_{2n}^0,\ q_{2n}^0$ в (2.15), получим

$$h_n^0(t) = \frac{\tilde{h}_n^0(t)}{A_n},$$

где

$$\tilde{h}_n^0(t) = \Delta_n(p_{1n})h_{1n}(t) + \Delta_n(p_{2n})h_{2n}(t) + \Delta_n(q_{2n})h_{2n}^{(m)}(t) . \tag{2.19}$$

Имея оптимальную функцию $h_n^0(t)$ из (2.14), с учетом (2.19), получаем

$$(\rho_n^0)^2 = \frac{B_n}{A_n^2}, \text{ где } B_n = \int_0^T \left(\tilde{h}_n^0(t)\right)^2 dt .$$

Согласно [4, 15], искомое оптимальное управление $u_n^0(t)$ определяется выражением

$$u_n^0(t) = \frac{1}{(\rho_n^0)^2} h_n^0(t) = \frac{A_n}{B_n}\tilde{h}_n^0(t) . \tag{2.20}$$

Отметим, что согласно обозначениям (2.10) получаем

$$h_{2n}^{(m)}(t) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{m} e_k \cos\lambda_n(t_k - t), & 0 \le t \le t_1; \\ \sum\limits_{k=2}^{m} e_k \cos\lambda_n(t_k - t), & t_1 < t \le t_2; \\ \quad\cdots & \\ \sum\limits_{k=m-1}^{m} e_k \cos\lambda_n(t_k - t), & t_{m-2} < t \le t_{m-1}; \\ e_m \cos\lambda_n(t_m - t), & t_{m-1} < t \le t_m; \\ 0, & t_m < t \le t_{m+1} = T \end{cases} .$$

Подставляя значения функций $h_{1n}(t)$, $h_{2n}(t)$, $h_{2n}^{(m)}(t)$ в (2.19), получим

$$\tilde{h}_n^0(t) = \begin{cases} \Delta_n(p_{1n})h_{1n}(t) + \Delta_n(p_{2n})h_{2n}(t) + \Delta_n(q_{2n})\sum\limits_{k=1}^{m} e_k \cos\lambda_n(t_k - t), & 0 \le t \le t_1; \\ \Delta_n(p_{1n})h_{1n}(t) + \Delta_n(p_{2n})h_{2n}(t) + \Delta_n(q_{2n})\sum\limits_{k=2}^{m} e_k \cos\lambda_n(t_k - t), & t_1 < t \le t_2; \\ \quad\cdots & \\ \Delta_n(p_{1n})h_{1n}(t) + \Delta_n(p_{2n})h_{2n}(t) + \Delta_n(q_{2n})\sum\limits_{k=m-1}^{m} e_k \cos\lambda_n(t_k - t), & t_{m-2} < t \le t_{m-1}; \\ \Delta_n(p_{1n})h_{1n}(t) + \Delta_n(p_{2n})h_{2n}(t) + \Delta_n(q_{2n})e_m \cos\lambda_n(t_m - t), & t_{m-1} < t \le t_m; \\ \Delta_n(p_{1n})h_{1n}(t) + \Delta_n(p_{2n})h_{2n}(t), & t_m < t \le t_{m+1} = T \end{cases} . \tag{2.21}$$

Таким образом, имея явное выражение функции $\tilde{h}_n^0(t)$, из (2.20) получим оптимальную функцию $u_n^0(t)$ для каждого $n=1,2,\dots$. Далее, подставляя оптимальную функцию $u_n^0(t)$ в (2.7), получаем $Q_n^0(t)$ на промежутке времени $t\in[0,T]$. Следовательно, из формулы (2.1) и (2.2) получим оптимальную функцию $Q^0(x,t)$ прогиба струны и оптимальное управление $u^0(x,t)$. Таким образом, для оптимального управления будем иметь

$$u^0(x,t)=\begin{cases}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{B_n}\left[\Delta_n(p_{1n})h_{1n}(t)+\Delta_n(p_{2n})h_{2n}(t)+\Delta_n(q_{2n})\sum_{k=1}^{m}e_k\cos\lambda_n(t_k-t)\right]\sin\frac{\pi n}{l}x, & 0\le t\le t_1;\\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{B_n}\left[\Delta_n(p_{1n})h_{1n}(t)+\Delta_n(p_{2n})h_{2n}(t)+\Delta_n(q_{2n})\sum_{k=2}^{m}e_k\cos\lambda_n(t_k-t)\right]\sin\frac{\pi n}{l}x, & t_1<t\le t_2;\\ \dots & \\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{B_n}\left[\Delta_n(p_{1n})h_{1n}(t)+\Delta_n(p_{2n})h_{2n}(t)+\Delta_n(q_{2n})\sum_{k=m-1}^{m}e_k\cos\lambda_n(t_k-t)\right]\sin\frac{\pi n}{l}x, & t_{m-2}<t\le t_{m1};\\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{B_n}\left[\Delta_n(p_{1n})h_{1n}(t)+\Delta_n(p_{2n})h_{2n}(t)+\Delta_n(q_{2n})e_m\cos\lambda_n(t_m-t)\right]\sin\frac{\pi n}{l}x, & t_{m-1}<t\le t_m;\\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{B_n}\left[\Delta_n(p_{1n})h_{1n}(t)+\Delta_n(p_{2n})h_{2n}(t)\right]\sin\frac{\pi n}{l}x, & t_m<t\le t_{m+1}=T.\end{cases}$$

Из этого выражения видно, что оптимальное управляющее воздействие $u^0(x,t)$, решающее поставленную задачу, является кусочно-непрерывной функцией.

§3. Пример.

Предположим, что $m=2$ (т. е. $0<t_1<t_2<t_3=T$), тогда из формулы (2.21), с учетом обозначения (2.10) функции $\tilde{h}_n^0(t)$ запишутся в виде

при $0\le t\le t_1$

$$\tilde{h}_n^{(1)0}(t)=\Delta_n(p_{1n})\sin\lambda_n(T-t)+\Delta_n(p_{2n})\cos\lambda_n(T-t)+\Delta_n(q_{2n})\left[e_1\cos\lambda_n(t_1-t)+e_2\cos\lambda_n(t_2-t)\right];$$

при $t_1<t\le t_2$

$$\tilde{h}_n^{(2)0}(t)=\Delta_n(p_{1n})\sin\lambda_n(T-t)+\Delta_n(p_{2n})\cos\lambda_n(T-t)+\Delta_n(q_{2n})e_2\cos\lambda_n(t_2-t);$$

при $t_2<t\le T$

$$\tilde{h}_n^{(3)0}(t)=\Delta_n(p_{1n})\sin\lambda_n(T-t)+\Delta_n(p_{2n})\cos\lambda_n(T-t).$$

Из выражения (2.17), с учетом обозначений (2.10), получаем

$$a_n^{(1)}=\int_0^T\left(\sin\lambda_n(T-\tau)\right)^2d\tau=\frac{T}{2}-\frac{1}{4\lambda_n}\sin 2\lambda_nT;$$

$$b_n^{(1)}=\int_0^T\left(\cos\lambda_n(T-\tau)\right)^2d\tau=\frac{T}{2}+\frac{1}{4\lambda_n}\sin 2\lambda_nT;$$

$$a_n^{(2)}=\int_0^T\sin\lambda_n(T-\tau)\cos\lambda_n(T-\tau)d\tau=\frac{\sin^2\lambda_nT}{2\lambda_n};$$

$$b_n^{(2)} = e_1\int_0^{t_1} \sin\lambda_n(T-\tau)\cos\lambda_n(t_1-\tau)d\tau + e_2\int_0^{t_2} \sin\lambda_n(T-\tau)\cos\lambda_n(t_2-\tau)d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\left[e_1t_1\sin\lambda_n(T-t_1) + e_2t_2\sin\lambda_n(T-t_2)\right] + \frac{\sin\lambda_n T}{2\lambda_n}\left[e_1\sin\lambda_n t_1 + e_2\sin\lambda_n t_2\right];$$

$$c_n^{(1)} = e_1^2\int_0^{t_1}\left(\cos\lambda_n(t_1-\tau)\right)^2 d\tau + 2e_1e_2\int_0^{t_1}\cos\lambda_n(t_1-\tau)\cos\lambda_n(t_2-\tau)d\tau + e_2^2\int_0^{t_2}\left(\cos\lambda_n(t_2-\tau)\right)^2 d\tau =$$

$$= \frac{1}{4\lambda_n}\left[2\lambda_n\left(e_1^2t_1 + e_2^2t_2\right) + 4e_1e_2t_1\lambda_n\cos\lambda_n(t_1-t_2) + 4e_1e_2t_2\cos\lambda_n t_2\sin\lambda_n t_1 + e_1^2\sin 2\lambda_n t_1 + e_2^2\sin 2\lambda_n t_2\right];$$

$$c_n^{(2)} = e_1\int_0^{t_1}\cos\lambda_n(T-\tau)\cos\lambda_n(t_1-\tau)d\tau + e_2\int_0^{t_2}\cos\lambda_n(T-\tau)\cos\lambda_n(t_2-\tau)d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\lambda_n}\left\{\lambda_n\left[e_1t_1\cos\lambda_n(T-t_1) + e_2t_2\cos\lambda_n(T-t_2)\right] + \cos\lambda_n T\left(e_1\sin\lambda_n t_1 + e_2\sin\lambda_n t_2\right)\right\}.$$

Предполагая, что $t_1 = \frac{l}{a}$, $t_2 = 2\frac{l}{a}$, $T = 4\frac{l}{a}$, получим, что $t_1\lambda_n = \pi n$, $t_2\lambda_n = 2\pi n$, $T\lambda_n = 4\pi n$, $\lambda_n(T-t_1) = 3\pi n$, $\lambda_n(T-t_2) = 2\pi n$, $\lambda_n(t_1-t_2) = -\pi n$. Следовательно, из вышеприведенных выражений и формул (2.9) получим

$$a_n^{(1)} = b_n^{(1)} = \frac{2l}{a};\quad a_n^{(2)} = b_n^{(2)} = 0;\quad c_n^{(1)} = \frac{l}{2a}\left[e_1^2 + 2e_2^2 + 2(-1)^n e_1e_2\right];$$

$$c_n^{(2)} = \frac{l}{2a}\left[(-1)^n e_1 + 2e_2\right];\quad C_{1n}(T) = \lambda_n\left(\varphi_n^{(3)} - \varphi_n^{(0)}\right);$$

$$C_{2n}(T) = \psi_n^{(3)} - \psi_n^{(0)};\quad C_{2n}^{(m)} = \beta_n - \psi_n^{(0)}\left[(-1)^n e_1 + e_2\right].$$

Для определителей Δ_n, $\Delta_n(p_{1n})$, $\Delta_n(p_{2n})$, $\Delta_n(q_{1n})$, $\Delta_n(q_{2n})$ будем иметь следующие значения

$$\Delta_n = \frac{1}{2}\left(\frac{l}{a}\right)^3\left[2e_1^2 + \left((-1)^n e_1 + 2e_2\right)^2\right];$$

$$\Delta_n(p_{1n}) =$$

$$= \left(\frac{l}{2a}\right)^2 C_{1n}(T)\left[2e_1^2 + \left((-1)^n e_1 + 2e_2\right)^2\right] = \left(\frac{l}{2a}\right)^2 \lambda_n\left(\varphi_n^{(3)} - \varphi_n^{(0)}\right)\left[2e_1^2 + \left((-1)^n e_1 + 2e_2\right)^2\right];$$

$$\Delta_n(p_{2n}) = \left(\frac{l}{a}\right)^2\left\{C_{2n}(T)\left[e_1^2 + 2e_2^2 + 2(-1)^n e_1e_2\right] - C_{2n}^{(m)}\left[(-1)^n e_1 + 2e_2\right]\right\} =$$

$$= \left(\frac{l}{a}\right)^2\left\{\left(\psi_n^{(3)} - \psi_n^{(0)}\right)\left[e_1^2 + 2e_2^2 + 2(-1)^n e_1e_2\right] - \left[\beta_n - \psi_n^{(0)}\left((-1)^n e_1 + e_2\right)\right]\left[(-1)^n e_1 + 2e_2\right]\right\};$$

$$\Delta_n(q_{2n}) = -\left(\frac{l}{2a}\right)^3\left[2f_1^2 + \left((-1)^n f_1 + 2f_2\right)^2\right]\left\{C_{2n}(T)\left[(-1)^n e_1 + 2e_2\right] - 4C_{2n}^{(m)}\right\} =$$

$$= -\left(\frac{l}{2a}\right)^3\left[2f_1^2 + \left((-1)^n f_1 + 2f_2\right)^2\right]\left\{\left(\psi_n^{(3)} - \psi_n^{(0)}\right)\left((-1)^n e_1 + 2e_2\right) - 4\left[\beta_n - \psi_n^{(0)}\left((-1)^n e_1 + e_2\right)\right]\right\}.$$

Отметим, что $\Delta_n \neq 0$ при $e_1 \neq 0$ или $e_2 \neq 0$.

Имея эти выражения и вычисляя значения величин A_n и B_n, согласно формуле (2.20), будем иметь оптимальную функцию $u_n^0(t)$ $t \in [0, T]$.

Явные выражения функции оптимального управления $u^0(x,t)$ получим в виде:

при $0 \leq t \leq \dfrac{l}{a}$

$$u^0(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{B_n} \{\Delta_n(p_{1n}) \sin \lambda_n (T-t) + \Delta_n(p_{2n}) \cos \lambda_n (T-t) +$$

$$+\Delta_n(q_{2n}) [e_1 \cos \lambda_n (t_1 - t) + e_2 \cos \lambda_n (t_2 - t)]\} \sin \frac{\pi n}{l} x\ ;$$

при $\dfrac{l}{a} < t \leq 2\dfrac{l}{a}$

$$u^0(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{B_n} [\Delta_n(p_{1n}) \sin \lambda_n (T-t) + \Delta_n(p_{2n}) \cos \lambda_n (T-t) + \Delta_n(q_{2n}) e_2 \cos \lambda_n (t_2 - t)] \sin \frac{\pi n}{l} x\ ;$$

при $2\dfrac{l}{a} < t \leq 4\dfrac{l}{a}$

$$u^0(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{B_n} [\Delta_n(p_{1n}) \sin \lambda_n (T-t) + \Delta_n(p_{2n}) \cos \lambda_n (T-t)] \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Таким образом, имея явные выражения функций оптимального управления с помощью вышеприведенных формул можно найти соответствующее выражение функции прогиба струны.

Заключение.

Задача оптимального управления колебаниями струны с заданными неразделенными значениями производных функций прогиба в промежуточные моменты времени методом разделения переменных приведена к задаче оптимального управления со счетным числом обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными начальными, конечными и неразделенными многоточечными промежуточными условиями. Критерий качества задан на всем промежутке времени. Задача решена с использованием методов теории оптимального управления конечномерными системами с многоточечными промежуточными условиями. В качестве приложения предложенного подхода построено оптимальное управляющее воздействие для колебания струны с заданными неразделенными значениями производной функции прогиба точек струны в двух промежуточных моментах времени.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто задачу оптимального управління коливаннями струни із заданими початковими, скінченними умовами і нерозділеними значеннями похідних функцій прогину в проміжних моментах часу з критерієм якості, який заданий на весь проміжок часу. Задачу розв'язано з використанням методів розділення змінних і теорії оптимального управління скінченновимірними системами з нерозділеними багатоточковими проміжними умовами. Як приклад запропонованого підходу побудована дія оптимального коливання струни із заданими нелокальними значеннями швидкостей точок струни в двох проміжних моментах часу.

1. *Асанова А.Т., Иманчиев А.Е.* О разрешимости нелокальной краевой задачи для нагруженных гиперболических уравнений с многоточечными условиями // Вестник Карагандинского университета. Серия Математика. – 2016. – № 1(81). – С. 15 – 20.

2. *Ащепков Л.Т.* Оптимальное управление системой с промежуточными условиями // ПММ. – 1981. – **45,** №2. – С. 215 – 222.

3. *Бакирова Э.А., Кадирбаева Ж.М.* О разрешимости линейной многоточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений // Изв. НАН Республики Казахстан. Сер. физ.-мат. – 2016. – № 5. – С. 168 – 175.
4. *Барсегян В.Р.* Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. – М.: Наука, 2016. – 230 с.
5. *Барсегян В.Р.* Об оптимальном управлении колебаниями мембраны при фиксированных промежуточных состояниях // Уч. записки ЕГУ. – 1998. – №1 (188). – С. 24 – 29.
6. *Барсегян В.Р.* Об одной задаче граничного оптимального управления колебаниями струны с ограничениями в промежуточные моменты времени // Труды XI Межд. Четаевской конф. «Аналитическая механика, устойчивость и управление». Т. 3, Ч. I. Казань, 13 – 17 июня 2017 г. Казань: КНИТУ-КАИ, 2017. – С. 119 – 125.
7. *Барсегян В.Р.* О задаче граничного управления колебаниями струны с заданными состояниями в промежуточные моменты времени // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сб. докладов. Казань, 20 – 24 августа 2015. – С. 354 – 356.
8. *Барсегян В.Р., Барсегян Т.В.* Об одном подходе к решению задач управления динамических систем с неразделенными многоточечными промежуточными условиями // Автоматика и телемеханика. – 2015. – № 4. – С. 3 – 15.
9. *Барсегян В.Р., Саакян М.А.* Оптимальное управление колебаниями струны с заданными состояниями в промежуточные моменты времени // Изв. НАН РА. Механика. – 2008. – **61,** № 2. – С. 52 – 60.
10. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1975. – 586 с.
11. *Знаменская Л.Н.* Управление упругими колебаниями. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 176 с.
12. *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* Оптимизация граничных управлений колебаниями струны // Успехи матем. наук. – 2005. – **60**, № 6 (366). – С. 89 – 114.
13. *Корзюк В.И., Козловская И.С.* Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени. I. // Труды Ин-та мат. НАН Беларуси. – 2010. – **18**, № 2. – С. 22 – 35.
14. *Корзюк В.И., Козловская И.С.* Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени. II. // Труды Ин-та мат. НАН Беларуси. – 2011. – **19**, № 1. – С. 62 – 70.
15. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. – 476 с.
16. *Макаров А.А., Левкин Д.А.* Многоточечная краевая задача для псевдодифференциальных уравнений в полислое // Вiсник Харкiвського нац. ун-ту iм. В.Н. Каразiна. Серiя : Математика, прикл. матем. i механiка. – 2014. – № 1120, вип. 69. – С. 64 – 74.
17. *Манита Л.А.* Оптимальный особый режим и режим с учащающимися переключениями в задаче управления колебаниями струны с закрепленными концами // Прикл. матем. и механика. – 2010. – **74**, № 5. – С. 856 – 863.
18. *Сиразетдинов Т.К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1977. – 480 с.
19. *Barseghyan V.R., Movsisyan L.A.* Optimal Control of the Vibration of Elastic Systems Described by the Wave Equation // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N 2. – P. 234 – 240.

Поступила 04.03.2019 Утверждена в печать 03.03.2020