

Я. А. Жук^{1,2}, А. Х. Остос¹

ВЛИЯНИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО НАГРУЖЕНИЯ НА РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ДИССИПАТИВНЫЙ РАЗОГРЕВ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ

¹Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, просп. Глушкова, 4е, 01033, Киев, Украина; e-mail: y.zhuk@i.ua

²Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ, ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина;

Abstract. A statement of the problem on the forced resonant vibrations and dissipative heating of a hinged viscoelastic elastomeric plate under cyclic loading is given for the particular case of the membrane prestress forces application. An effect of the elastomer properties, level of press, and the heat transfer conditions on the amplitude-frequency and temperature-frequency characteristics of the forced vibrations, as well as the response of the material below the melting temperature, is studied in details.

Key words: resonance vibration, dissipative heating, viscoelastic material, prestressed rectangular plate.

Введение.

Конструкционные элементы типа балок, пластинок и оболочек из эластомерных материалов, обладающих рядом специфических свойств, находят широкое применение в качестве основных несущих либо функциональных составляющих конструкций современной техники [1, 2, 14, 17]. К основным особенностям механического поведения эластомеров при деформировании относятся: способность к обратимым деформациям, небольшие значения модулей при деформациях растяжения, сжатия, сдвига; наличие комплекса релаксационных свойств; способность изменять механические свойства во времени и под действием внешних факторов как механического, так и немеханического характера; значительные механические потери при циклических деформациях и т.д. В частности, гистерезис (внутреннее трение) для эластомеров проявляется в отставании по фазе деформации от нагрузки и необратимом рассеивании части механической энергии [9, 14 – 16, 19]. Наиболее ярко особенности поведения элементов конструкций из таких материалов проявляются при динамическом нагружении и его типичном случае – гармоническом приложении нагрузки. При этом часть механической энергии вследствие внутреннего трения переходит в тепло, и наблюдается явление саморазогрева или диссипативного разогрева [2, 4, 11].

Указанная особенность, а также низкая теплопроводность эластомеров, препятствующая быстрому отводу тепла, приводят к тому, что элементы конструкций находятся в неизотермических условиях при деформировании, в них генерируется температурное поле [7, 8, 11]. Диссипированная за период энергия обычно невелика, поэтому температуру можно считать медленно меняющейся функцией [4, 6]. При этом, как правило, пренебрегают колебаниями температуры в течение периода, которые имеют термоупругую или диссипативную природу. Имеющиеся экспериментальные данные [15, 16] свидетельствуют об их пренебрежимой малости в большинстве практически важных задач.

Характерной особенностью рассматриваемого процесса является то, что он состоит из четырех взаимосвязанных подпроцессов. Первый отвечает нестационарному

волновому процессу наложения бегущих отраженных волн, заканчивающемуся образованием определенной формы колебаний. Второй подпроцесс – затухающие биения на некоторой форме колебаний. Эта фаза заканчивается формированием режима квазистационарных колебаний. Третий подпроцесс, описываемый усредненными составляющими движения, связан с реакцией на усредненные составляющие внешних нагрузок или начальными деформациями. Последний подпроцесс – возрастание температуры виброразогрева в условиях квазистационарных колебаний. Каждый из указанных подпроцессов имеет свой характерный временной масштаб [6], соотношение между которыми позволяет развивать упрощенные теории описания связанного термомеханического, термоэлектромеханического, термомагнитомеханического поведения элементов конструкций. Детальные обзоры указанных подходов к решению задач механики связанных полей в материалах и элементах конструкций сделаны в работах [11 – 13].

Указанные подходы развиваются с применением теории амплитудных уравнений, характеризующих термомеханическое поведение вязкоупругих тел при циклическом деформировании, в двух интерпретациях. Первая из них основана на применении методов Галеркина и эквивалентной линеаризации к общим определяющим уравнениям, которые считаются применимыми к процессам с произвольными историями деформирования [2 – 4]. В рамках второй интерпретации амплитуды напряжений задаются в виде тензорных функций тензоров амплитуд деформаций, не связанных с каким-либо общим определяющим уравнением. Скалярные функции инвариантов амплитуд, температуры и частоты конкретизируются непосредственно из экспериментов при сложном деформированном (напряженном) состоянии с различным соотношением параметров нагружения. Ограничения на уравнения в этом случае накладываются исходя из требований симметрии среды и термодинамики необратимых процессов.

Кроме того, с использованием концепции комплексных амплитуд и модулей при гармонических колебаниях полная система линейной связанной термовязкоупругости формулируется в терминах комплексных амплитудных уравнений и дополняется комплексным аналогом уравнений движения [2 – 4]. Таким образом, задача колебаний и разогрева вязкоупругих тел имеет свою специфику, а ее важное практическое значение требует разработки самостоятельной амплитудной теории указанных процессов. Подробный обзор развитых теорий и их многочисленные применения содержится в работах [2 – 5, 9, 11, 13, 20].

В данной статье в рамках развитых теорий и методов расчета изучен дополнительный аспект, связанный с наиболее полным изучением факторов, способных повлиять на сложное связанное термомеханическое поведение эластомерных элементов конструкций при гармоническом нагружении. Наличие предварительного нагружения может, наряду с другими факторами, существенно повлиять на амплитудно- и температурно-частотные характеристики колебаний таких тел [18]. В частности, в данной работе изучается влияние приложенных предварительных мембранных усилий на резонансные колебания и диссипативный разогрев прямоугольной вязкоупругой пластины.

1. Постановка задачи. Основные уравнения.

Рассмотрим прямоугольную пластину толщины h и размерами a и b в плане. Поведение материала пластины считаем линейным вязкоупругим независимым от частоты, амплитуды и температуры. Пластина отнесена к прямоугольной декартовой системе координат x, y, z с началом нормальной координаты $z = 0$ на срединной плоскости пластины. Контур пластины задается отрезками прямых $x = 0, a$; $y = 0, b$. На пластину могут действовать предварительные мембранные растягивающие усилия в плоскости пластины: нормальные N_{xx}, N_{yy} и сдвиговые N_{xy} , с помощью которых моделируется наличие возникших при изготовлении или предварительно наведенных напряжений. Механические колебания пластины возбуждаются поверхностным давлением $q_z = q'_0(x, y) \cos \omega t - q''_0(x, y) \sin \omega t$, гармонически изменяющемся во времени

t с амплитудой $q_0(x, y) = (q_0'(x, y)^2 + q_0''(x, y)^2)^{1/2}$, распределенной по некоторому закону по поверхности пластины, и круговой частотой ω , близкой к резонансной.

Контур пластины считаем шарнирно опертым и теплоизолированным, а на лицевых поверхностях происходит конвективный теплообмен с внешней средой температуры T_C .

Для моделирования механического поведения рассматриваемой пластины относительно механических переменных по толщине принимаем гипотезы Кирхгофа – Лява [1]. Вязкоупругие свойства материалов описываются интегральными операторами линейной вязкоупругости [2 – 4], которые в случае гармонического деформирования материала сводятся к умножению комплексных величин $a \times b = (a' + ia'')(b' + ib'')$. Температуру виброразогрева балки принимаем постоянной по толщине пластины.

Применение вариационного принципа позволяет получить уравнение поперечных колебаний пластины в общем случае в виде [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = J_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = J_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + N(u, v, w) - kw + q(x, y, t) = J_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - J_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где u, v, w – перемещения точек пластины; N_{ij} и M_{ij} , $i, j = x, y$ – усредненные по толщине пластины усилия и моменты

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz; \quad \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz; \end{aligned} \quad (2)$$

$$N(u, v, w) = \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial w}{\partial y} \right),$$

k – жесткость основания (для случая пластины на упругом основании).

Моменты инерции J_0, J_1 и J_2 из (1) определяются по формулам

$$\begin{Bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} \rho dz = \rho \begin{Bmatrix} h \\ 0 \\ h^3/12 \end{Bmatrix}.$$

Заметим, что слагаемое с J_2 в правой части третьего уравнения из (1) следует удерживать, если необходимо учесть инерцию вращательных движений элементов пластины.

Поскольку считаются справедливыми гипотезы Кирхгофа – Лява, то мембранные и изгибные напряжения будут развязанными. Приложенные предварительные напряжения считаем постоянными ($N_{xx} = N_{xx}^0 = \text{const}$, $N_{yy} = N_{yy}^0 = \text{const}$, $N_{xy} = N_{xy}^0 = \text{const}$), тогда задача в плоскости пластины становится статически определимой, а первое и второе уравнения системы (1) удовлетворяются тождественно.

Классические кинематические соотношения теории пластин в предположении справедливости гипотез Кирхгофа – Лява записываются в виде [1, 18]

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^0 + z\varepsilon_{xx}^1; \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{yy}^0 + z\varepsilon_{yy}^1; \quad \gamma_{yy} = \gamma_{yy}^0 + z\gamma_{yy}^1;$$

$$\varepsilon_{xx}^0 = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_{yy}^0 = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \varepsilon_{xx}^1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_{yy}^1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \gamma_{xy}^1 = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (3)$$

где ε_{xx}^0 , ε_{yy}^0 и γ_{xy}^0 – мембранные деформации, а ε_{xx}^1 , ε_{yy}^1 и γ_{xy}^1 – изгибные деформации (кривизны и закручивание).

Физические соотношения, связывающие силовые и кинематические величины, в общем случае анизотропного материала, с учетом определений (2) приобретают известный вид [1]

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_{xx}^T \\ N_{yy}^T \\ N_{xy}^T \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{xy}^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} M_{xx}^T \\ M_{yy}^T \\ M_{xy}^T \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

где A_{ij} и D_{ij} , $i, j = \overline{1,3}$ – коэффициенты жесткости при растяжении и изгибе, соответственно; N_{ij}^T и M_{ij}^T , $i, j = x, y$ – усилия и моменты, обусловленные тепловой деформацией. В нашем случае считаем их малыми вследствие малости коэффициентов теплового расширения для эластомеров и пренебрегаем этими слагаемыми.

Для случая изотропного материала соотношения (4) перепишем в виде [1, 2]

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{xy}^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{Bmatrix}, \quad (5)$$

где

$$A = \frac{Eh}{1-\nu^2}; \quad D = \frac{Ah^2}{12} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (6)$$

Тут E и ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона, соответственно.

Подставляя (5) и (6) в третье уравнение системы (1), с учетом того, что в рассматриваемом случае в качестве предварительных выступают мембранные усилия, получаем уравнения движения в перемещениях

$$-D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + N(u, v, w) + q(x, y, t) = J_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

или

$$D \nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = N_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + q(x, y, t), \quad (7)$$

где $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$.

Таким образом, в случае независимых от температуры свойств материала в предположении постоянства температуры по толщине пластины механическая задача распадается на две: 1) задачу о плоском напряженном состоянии и 2) задачу о чистом изгибе. Задача о плоском напряженном состоянии и определяет предварительное напряженное состояние, на которое накладывается чистый изгиб, изменяющийся во времени по гармоническому закону.

Условия шарнирного опирания записываются в виде

$$w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x = 0, a; \quad w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ при } y = 0, b. \quad (8)$$

При гармоническом нагружении исследование стационарных колебаний возможно с привлечением концепции комплексных модулей и комплексных амплитуд [2 – 6]. В этом случае уравнение (7) можно переписать в виде

$$\tilde{D}\nabla^4 \tilde{w} + \rho h \omega^2 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial t^2} = N_{xx}^0 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x \partial y} + N_{yy}^0 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial y^2} + \tilde{q}(x, y), \quad (9)$$

где $\tilde{D} = D' + iD''$, $\tilde{w}(x, y) = w'(x, y) + iw''(x, y)$ и $\tilde{q}(x, y) = q'(x, y) + iq''(x, y)$ – комплексные изгибные жесткости, прогибы пластины и нагрузка; $i = \sqrt{-1}$. При этом граничные условия (8) будут иметь тот же вид с заменой действительной переменной w на комплексную \tilde{w} .

Закон изменения прогибов и нагрузки во времени определяется соответственно формулами

$$w(x, y, t) = w'(x, y) \cos \omega t - w''(x, y) \sin \omega t;$$

$$q(x, y, t) = q'(x, y) \cos \omega t + iq''(x, y) \sin \omega t.$$

Комплексное уравнение (9) эквивалентно системе двух действительных уравнений вида

$$D' \nabla^4 w' - D'' \nabla^4 w'' - \rho h \omega^2 w' = N_{xx}^0 \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w'}{\partial x \partial y} + N_{yy}^0 \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} + q';$$

$$D' \nabla^4 w'' + D'' \nabla^4 w' - \rho h \omega^2 w'' = N_{xx}^0 \frac{\partial^2 w''}{\partial x^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w''}{\partial x \partial y} + N_{yy}^0 \frac{\partial^2 w''}{\partial y^2} + q'',$$

при этом граничные условия (8) приобретают вид

$$w' = w'' = 0, \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w''}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x = 0, a;$$

$$w' = w'' = 0, \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w''}{\partial y^2} = 0 \text{ при } y = 0, b. \quad (11)$$

Стационарное температурное поле описывается усредненным за период колебаний и в плоскости поперечного сечения уравнением стационарной теплопроводности начальное и граничные условия записываются так:

$$\lambda h \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) - 2\alpha_s (T - T_c) + \langle \bar{W}_D \rangle = 0, \quad (12)$$

где T – температура; λ и α_s – коэффициенты теплопроводности и теплоотдачи с лицевых поверхностей пластины; ρ – плотность материала; T_c – температура окружающей среды; $\langle \bar{W}_D \rangle$ – усредненная по толщине пластины и за период колебаний диссипативная функция

$$\langle \bar{W}_D \rangle = \frac{\omega}{2} \left[\left(M_{xx}'' \varepsilon_{xx}^{1'} - M_{xx}' \varepsilon_{xx}^{1''} \right) + \left(M_{yy}'' \varepsilon_{yy}^{1'} - M_{yy}' \varepsilon_{yy}^{1''} \right) + \left(M_{xy}'' \gamma_{xy}^{1'} - M_{xy}' \gamma_{xy}^{1''} \right) \right], \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{M}_{xx} &= M'_{xx} + iM''_{xx} = -\tilde{D} \left[\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} + \tilde{\nu} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial y^2} \right]; \quad \tilde{M}_{yy} = M'_{yy} + iM''_{yy} = -\tilde{D} \left[\tilde{\nu} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial y^2} \right]; \\ \tilde{M}_{xy} &= M'_{xy} + iM''_{xy} = -\tilde{D}(1-\tilde{\nu}) \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x \partial y}.\end{aligned}\quad (14)$$

Здесь \tilde{M}_{ij} , $i, j = x, y$ – комплексные аналоги моментов из (2); $\tilde{\nu}$ – комплексный коэффициент Пуассона $\tilde{\nu} = \nu' - i\nu''$. Отметим, что в данной постановке используется вариант модели циклической вязкоупругости, которому соответствует действительный коэффициент Пуассона и комплексный коэффициент объемного расширения. Поэтому везде далее $\nu' = \nu$, $\nu'' = 0$.

В терминах температуры виброразогрева (приращения температуры) $\theta = T - T_C$ уравнение (12) примет вид

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - \frac{2\alpha_s}{\lambda h} \theta + \frac{\langle \bar{W}_D \rangle}{\lambda h} = 0. \quad (15)$$

Уравнение (15) следует дополнить граничными условиями на контуре пластины

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0, a; \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0, b. \quad (16)$$

Уравнения (10), (15) с выражением для диссипативной функции (13), дополненные механическими (11) и тепловыми (16) граничными условиями формируют постановку задачи о вынужденных колебаниях и диссипативном разогреве предварительно нагруженной прямоугольной пластины

2. Построение решения задачи.

Для решения задачи рассмотрим случай, когда предварительное нагружение пластины реализуется под действием только нормальных растягивающих нагрузок: $N_{xx}^0 = \text{const} \neq 0$, $N_{yy}^0 = \text{const} \neq 0$, $N_{xy}^0 = 0$.

Для шарнирного опирания решение задачи о стационарных колебаниях определяется в виде [1, 2]

$$w'(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} w'_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \quad w''(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} w''_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (17)$$

где w'_{mn} и w''_{mn} – неизвестные величины – комплексные амплитуды, определяющие собственную форму колебаний, соответствующую собственной частоте ω_{mn} . Формула для определения этой частоты при наличии предварительных растягивающих мембранных усилий известна [1, 2]

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{1}{\rho h} \left\{ D_0 \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2 + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 N_{xx}^0 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 N_{yy}^0 \right\}}. \quad (18)$$

Здесь D_0 – изгибная жесткость пластины в случае упругого поведения материала. Для вязкоупругого материала она определяется соотношением $D_0^2 = D'^2 + D''^2$.

В данной статье изучаются околорезонансные колебания $\omega \approx \omega_{mn}$ с частотами, близкими к соответствующей собственной частоте для моды колебаний с номером mn . В этом случае предполагается, что нагружение реализуется нагрузкой, распределенной по поверхности пластины по соответствующему этой частоте закону

$$q(x, y, t) = q_{mn}^0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \omega t - q_{mn}^0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \omega t,$$

причем в случае изменения поперечной нагрузки во времени по закону только синуса или косинуса это выражение упрощается очевидным образом.

Тогда реакция пластины будет определяться резонирующей модой mn , и суммы в выражении (17) можно опустить. Подставив полученное выражение в (10) и с учетом $N_{xy}^0 = 0$, получаем систему двух линейных алгебраических уравнений относительно w'_{mn} и w''_{mn} вида

$$\begin{aligned} w'_{mn} [D'A - ph\omega^2 + B] - w''_{mn} D'' A &= q'_{mn}; \\ w'_{mn} D'' A + w''_{mn} [D'A - ph\omega^2 + B] &= q''_{mn}, \end{aligned} \quad (19)$$

где $A = k_x^4 + 2k_x^2 k_y^2 + k_y^4$; $B = N_{xx}^0 k_x^2 + N_{yy}^0 k_y^2$; $k_x = m\pi x/a$; $k_y = n\pi x/b$.

Решение уравнения (18) определяется соотношениями

$$w'_{mn} = \Delta_1 / \Delta, \quad w''_{mn} = \Delta_2 / \Delta;$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= q'_{mn} [D'(k_x^4 + 2k_x^2 k_y^2 + k_y^4) - \rho h \omega^2 + (N_{xx}^0 k_x^2 + N_{yy}^0 k_y^2)] + q''_{mn} D''(k_x^4 + 2k_x^2 k_y^2 + k_y^4); \\ \Delta_2 &= q''_{mn} [D'(k_x^4 + 2k_x^2 k_y^2 + k_y^4) - \rho h \omega^2 + (N_{xx}^0 k_x^2 + N_{yy}^0 k_y^2)] - q'_{mn} D''(k_x^4 + 2k_x^2 k_y^2 + k_y^4); \end{aligned} \quad (20)$$

$$\Delta = [D'(k_x^4 + 2k_x^2 k_y^2 + k_y^4) - \rho h \omega^2 + (N_{xx}^0 k_x^2 + N_{yy}^0 k_y^2)]^2 + [D''(k_x^4 + 2k_x^2 k_y^2 + k_y^4)]^2.$$

Решение уравнения стационарной теплопроводности (15) ищем в виде

$$\theta(x, y) = \theta_0 + \theta_1 \cos 2k_x x + \theta_2 \cos 2k_y y + \theta_{12} \cos 2k_x x \cos 2k_y y, \quad (21)$$

при котором граничные условия удовлетворяются автоматически. Здесь θ_0 , θ_1 , θ_2 и θ_{12} – константы, которые подлежат определению.

Для решения задачи теплопроводности необходимо найти выражения для диссипативной функции через комплексные амплитуды перемещения. Из (14) находим

$$\begin{aligned} M'_{xx} &= -D' \left[\frac{\partial^2 w'_{mn}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w'_{mn}}{\partial y^2} \right] + D'' \left[\frac{\partial^2 w''_{mn}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w''_{mn}}{\partial y^2} \right]; \\ M''_{xx} &= -D'' \left[\frac{\partial^2 w'_{mn}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w'_{mn}}{\partial y^2} \right] - D' \left[\frac{\partial^2 w''_{mn}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w''_{mn}}{\partial y^2} \right]; \\ M'_{yy} &= -D' \left[\frac{\partial^2 w'_{mn}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w'_{mn}}{\partial x^2} \right] + D'' \left[\frac{\partial^2 w''_{mn}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w''_{mn}}{\partial x^2} \right]; \\ M''_{yy} &= -D'' \left[\frac{\partial^2 w'_{mn}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w'_{mn}}{\partial x^2} \right] - D' \left[\frac{\partial^2 w''_{mn}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w''_{mn}}{\partial x^2} \right]; \\ M'_{xy} &= -(1-\nu) \left(D' \frac{\partial^2 w'_{mn}}{\partial x \partial y} - D'' \frac{\partial^2 w''_{mn}}{\partial x \partial y} \right); \quad M''_{xy} = -(1-\nu) \left(D'' \frac{\partial^2 w'_{mn}}{\partial x \partial y} + D' \frac{\partial^2 w''_{mn}}{\partial x \partial y} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Подстановка (22) в (13) с учетом (3) после громоздких преобразований приводит к выражению для диссипативной функции в виде

$$\begin{aligned}
\langle \bar{W}_D \rangle = & \frac{\omega}{2} D'' \left\{ \left(\frac{\partial^2 w'_{mn}}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w''_{mn}}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w'_{mn}}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w''_{mn}}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\
& \left. + 2\nu \left[\frac{\partial^2 w'_{mn}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w'_{mn}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w''_{mn}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w''_{mn}}{\partial y^2} \right] + (1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w'_{mn}}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w''_{mn}}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\}. \quad (23)
\end{aligned}$$

Подстановка (20), (21) и (23) в уравнение стационарной теплопроводности (15) с последующим приравнением коэффициентов при соответствующих свободных членах, косинусах $\cos 2k_x x$, $\cos 2k_y y$ и их произведении $\cos 2k_x x \cos 2k_y y$ приводит к следующим выражениям для коэффициентов θ_0 , θ_1 , θ_2 и θ_{12} :

$$\begin{aligned}
\theta_0 &= \frac{\omega}{16} \frac{D''}{\alpha_s} |\tilde{w}_{mn}|^2 [k_x^4 + (1+\nu)k_x^2 k_y^2 + k_y^4]; \\
\theta_1 &= -\frac{\omega}{16} \frac{D'' |\tilde{w}_{mn}|^2}{(2k_x^2 \lambda h + \alpha_s)} [k_x^4 + 2\nu k_x^2 k_y^2 + k_y^4 - (1-\nu)k_x^2 k_y^2]; \\
\theta_2 &= -\frac{\omega}{16} \frac{D'' |\tilde{w}_{mn}|^2}{(2k_y^2 \lambda h + \alpha_s)} [k_x^4 + 2\nu k_x^2 k_y^2 + k_y^4 - (1-\nu)k_x^2 k_y^2]; \\
\theta_{12} &= \frac{\omega}{16} \frac{D'' |\tilde{w}_{mn}|^2}{(2[k_x^2 + k_y^2] \lambda h + \alpha_s)} [k_x^4 + (1+\nu)k_x^2 k_y^2 + k_y^4], \quad (24)
\end{aligned}$$

где $|\tilde{w}_{mn}|^2 = (w'_{mn})^2 + (w''_{mn})^2$ – квадрат амплитуды прогиба.

Подстановка коэффициентов (24) в формулу (21) позволяет определить температурное поле в пластине, колеблющейся на частоте, близкой, к частоте соответствующего резонанса.

3. Числовые результаты и их анализ.

Численные расчеты проведены для случая квадратной и прямоугольной эластомерных пластин. Квадратную пластину было выбрано с размерами $a = 0,1$ м, $b = 0,1$ м, $h = 0,005$ м. Полиэтилен обладает следующими комплексными характеристиками [16]: $E' = 8,0 \cdot 10^8$ Н/м², $E'' = 6,3 \cdot 10^6$ Н/м², $\text{tg } \theta = E'' / E' = 0,0079$. Физические свойства материала следующие: $\nu = 0,46$, $\rho = 953$ кг/м³, а коэффициенты теплоотдачи и теплопроводности равны $\alpha_s = 4$ Вт / (м² · °С) и $\lambda = 0,36$ Вт / (м · °С), соответственно.

Гармоническое нагружение пластины: исследовано с разными предварительными мембранными N_{xx} и поперечными N_{yy} нагрузками, при этом был введен коэффициент $K_f = N_{xx} / N_{yy}$.

При воздействии на пластину внешнего давления с амплитудой $q' = 600$ Н/м² (при этом $q'' = 0$) частота собственных колебаний по первой моде ($m = 1, n = 1$) получается $f_{11} = 472,2$ Гц. Так как исследования проводятся в околорезонансной области, то распределение прогиба и температуры строятся на основной частоте f_{11} , где $f_{mn} = \omega_{mn} / 2\pi$ – собственная частота, соответствующая первой форме колебаний.

Максимальный прогиб w_{max} достигается в центре пластины (точка $x = a/2$, $y = b/2$) и равен $1,8 \cdot 10^{-3}$ м. Максимальная температура разогрева пластины, θ_{max} , также достигается в этой же точке. Везде далее на рисунках приведены характери-

ки, вычисленные для точек максимальных значений амплитуд и температур для соответствующих мод колебаний.

На рис. 1 построены амплитудно- и температурно-частотные характеристики колебаний пластины в окрестности первой резонансной частоты для $K_f^{70} = 10$ при различных значениях внешнего давления. Здесь верхним индексом обозначено фиксированное значение предварительного усилия $N_{yy} = 70$ Н/м при переменном значении N_{xx} . На рис. 1 штрих-пунктирной, сплошной и штриховой линиями показаны АЧХ и ТЧХ для амплитуд внешней нагрузки $q' = 350, 500$ и 600 Н/м², соответственно.

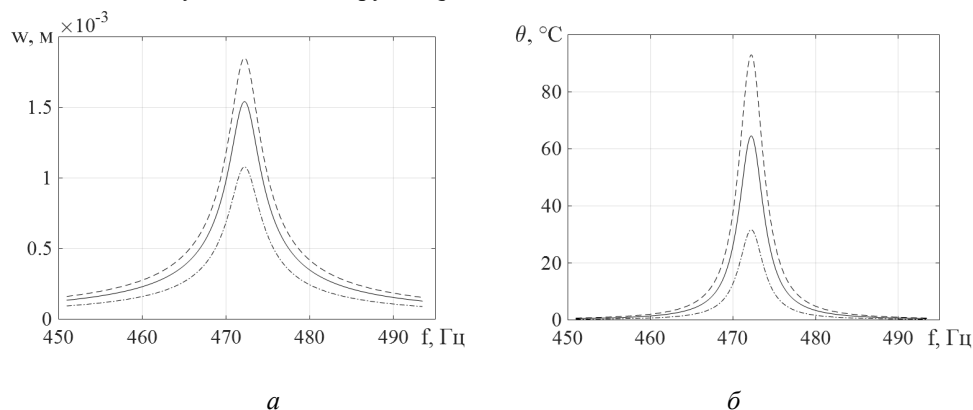


Рис. 1

Из рис. 1, *a* видно, что поведение АЧХ соответствует типичному поведению характеристик в случае линейного вязкоупругого материала и сопровождается увеличением амплитуды прогиба при возрастании амплитуды внешнего воздействия. Соответствующая этому случаю ТЧХ, представленная на рис. 1, *б*, иллюстрирует резкое возрастание температуры на резонансе, что при достижении критического значения параметра нагружения приводит к опасным уровням разогрева. Максимальная температура равна $\theta_{\max} = 92,97^\circ\text{C}$.

На рис. 2 приведены амплитудно- и температурно-частотные характеристики колебаний в точке максимальных прогибов и температур в окрестности первой резонансной частоты при амплитуде внешнего давления $q' = 600$ Н/м² для разных значений коэффициента K_f^{70} . На рис. 2 штрих-пунктирной, сплошной и штриховой линиями показаны АЧХ и ТЧХ для $K_f^{70} = 0, 40$ и 100 , соответственно.

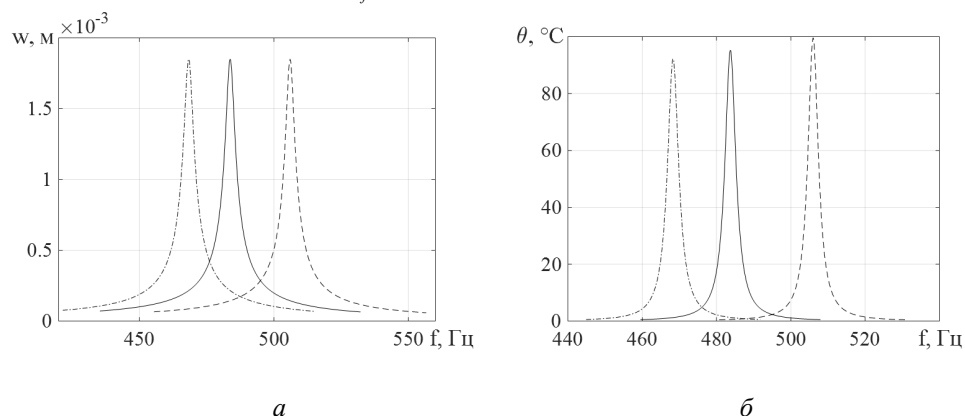


Рис. 2

Рис. 2, *a* иллюстрирует эффект сдвига резонансной частоты вправо (в область более высоких значений частоты) при увеличении предварительных растягивающих

нагрузок в пластине, что соответствует известному теоретическому и экспериментально подтверждаемому результату. Аналогичная картина наблюдается и для случая ТЧХ (рис. 2, б). Сдвиг области резонанса вправо сопровождается нарастанием температуры, что непосредственно следует из формул (24).

Для эластомера, выбранного в качестве материала пластины, температура плавления равна 120°C. Поэтому в данной работе в качестве критического значения температуры разогрева θ_{cr} выбрано значение 100°C, при котором наблюдается заметное размягчение материала.

На рис. 3 результаты расчета АЧХ и ТЧХ обобщены для значительного интервала изменения коэффициента K_f^{70} при внешнем давлении $q' = 600 \text{ Н/м}^2$, где величина K_f^{70} откладывается по третьей координате. Полученные графики качественно иллюстрируют сдвиг обеих характеристик в область более высоких частот.

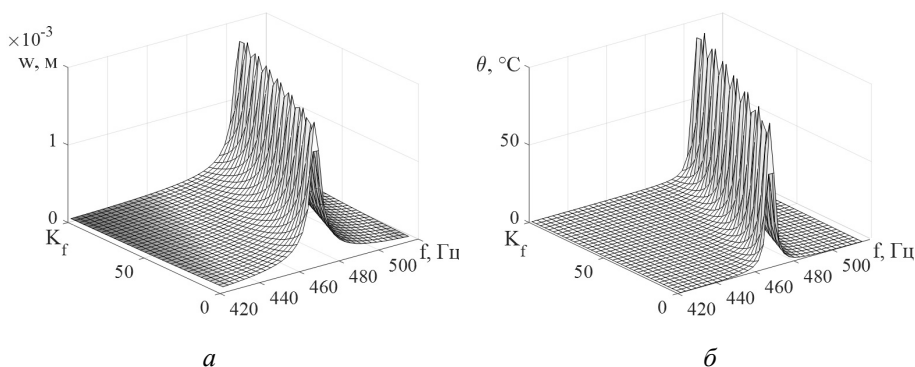


Рис. 3

На рис. 4 показана зависимость максимальной температуры разогрева пластины от внешнего давления при разных значениях коэффициента K_f^{70} , рассчитанные для постоянного значения частоты колебаний $f_{11} = 468,3 \text{ Гц}$, которая соответствует собственной частоте колебаний эластомерной пластины при $K_f^{70} = 0$, т.е. в случае отсутствия нормального предварительного напряжения $N_{xx} = 0$ при $N_{yy} = 70 \text{ Н/м}$. Здесь штрих-пунктирной, сплошной и штриховой линиями показаны ТЧХ для $K_f^{70} = 2, 5$ и 10 соответственно. Максимальная температура на этой частоте колебаний достигается при $K_f^{70} = 0$ (резонанс). В последствии, по мере увеличения K_f^{70} АЧХ и ТЧХ смещаются вправо, что приводит к уменьшению амплитуд прогибов и температур вследствие того, что указанное значение частоты оказывается на дорезонансной растущей ветви характеристики (режим фиксированной частоты).

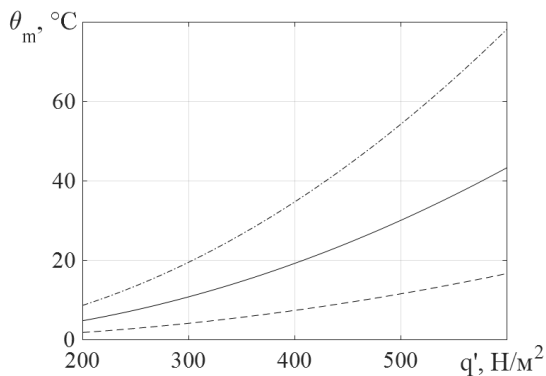


Рис. 4

Моделирование разогрева пластины для рассматриваемого режима фиксированной частоты проведено для широкого интервала значений амплитуд внешней нагрузки q' . Результаты расчета максимальной температуры показаны на рис. 5 штрих-пунктирной, сплошной и штриховой линиями амплитуд $q' = 1000, 800$ и 600 Н/м^2 соответственно. Критическая температура $\theta_{cr} = 100^\circ\text{C}$ показана сплошной горизонтальной линией.

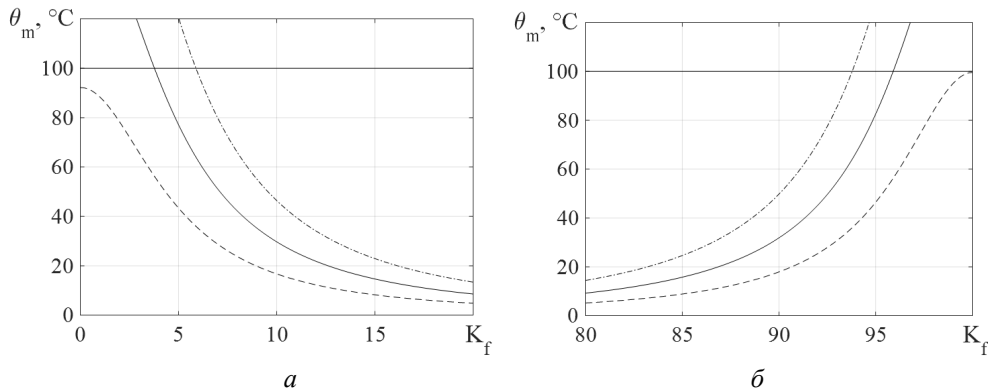


Рис. 5

На рис. 5, *a* показана зависимость максимальной температуры виброразогрева от коэффициента K_f^{70} на растущей ветке (на частоте $f_{11} = 468,3$ Гц), а на рис. 5, *б* – аналогичная зависимость для нисходящей ветви (для частоты $f_{11} = 505,9$ Гц). Анализ результатов показывает, что для растущей ветви максимальная температура разогрева уменьшается с ростом K_f^{70} вследствие смещения ТЧХ вправо от частоты линейного упругого резонанса. Увеличение амплитуды нагрузки приводит к повышению температуры. В общем, в такой ситуации наличие (либо приложение) предварительных напряжений имеет позитивный эффект на тепловую многоцикловую усталость материала, увеличивая период надежной работы конструкции. При достаточно высоких амплитудах нагружения в области малых значений K_f^{70} наблюдается разогрев выше критической температуры, что приводит к размягчению материала и разрушению конструкции. Для частот, лежащих на нисходящей ветви АЧХ для линейно упругого материала, ситуация противоположная (рис. 5, *б*). Увеличение K_f^{70} смещает АЧХ вправо, что приводит к увеличению амплитуды колебаний и температуры разогрева на данной частоте. В таком случае предварительные напряжения негативно влияют на усталостную прочность, рассчитываемую по тепловому критерию.

Исследованная стационарная задача гармонических колебаний квадратной пластины качественно имеет те же самые амплитудные характеристики на второй (и на всех последующих) моде колебаний ($m = 2, n = 1$ или $m = 1, n = 2$), но максимальные прогибы и максимальный разогрев достигается в точках $x = a/4, y = b/2$ и $x = a/4, y = b/2, x = 3a/4, y = b/2$.

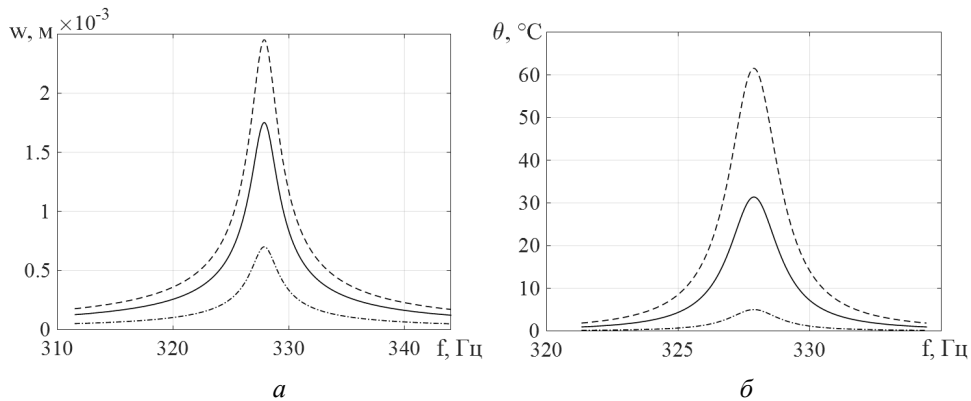


Рис. 6

Аналогичные расчеты были проведены и для пластины прямоугольной формы. Далее в качестве типичных представлены результаты для пластины с размерами: $a = 0,175$ м, $b = 0,1$ м, $h = 0,005$ м. Предварительные напряжения, как и ранее, задавались с помощью мембранных растягивающих нормальных усилий N_{xx} и N_{yy} , приложенных вдоль соответствующих осей.

На рис. 6 построены амплитудно- и температурно-частотные характеристики максимальных прогибов и температур на первой моде колебаний ($m = 1, n = 1$) в окрестности первой резонансной частоты для $K_f^{500} = 10$ (при $N_{yy} = 500$ Н/м) при различных значениях амплитуды внешнего давления. На рис. 6 штрих-пунктирной, сплошной и штриховой линиями показаны АЧХ и ТЧХ для амплитуд внешней нагрузки $q' = 100, 250$ и 350 Н/м², соответственно. Видно, что максимальный прогиб достигается при наибольшем значении $q' = 350$ Н/м² и равен $w_{\max} = 2,5 \cdot 10^{-3}$ м (рис. 6, а). При этом наблюдается максимальное значение температуры виброразогрева $\theta_{\max} = 61,5^\circ\text{C}$.

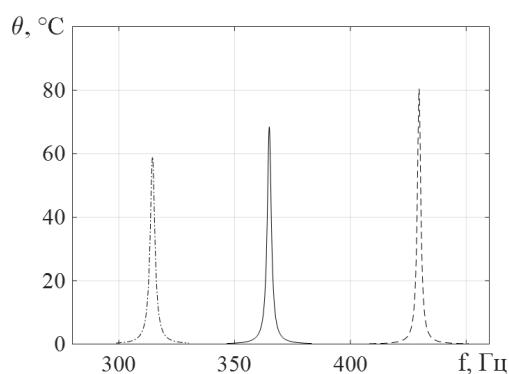


Рис. 7

Влияние коэффициента отношения нормальных мембранных усилий K_f на амплитудно- и температурно-частотные характеристики колебаний пластины представлено на рис. 7 для амплитуды давления $q' = 350$ Н/м². Здесь штрих-пунктирной, сплошной и штриховой линиями показаны АЧХ и ТЧХ для $K_f^{500} = 0, 40$ и 100 , соответственно. Наблюдается характерное для таких ситуаций возрастание как резонансной частоты, так и температуры виброразогрева при увеличении K_f .

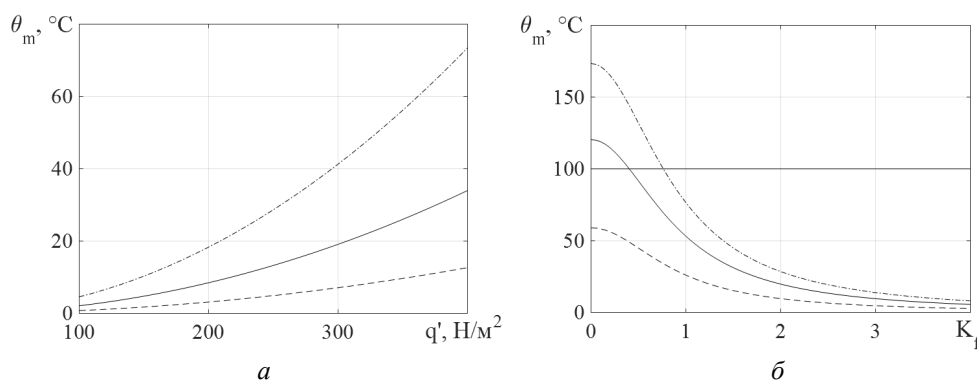


Рис. 8

На рис. 8, а показана зависимость максимальной температуры разогрева пластины от амплитуды внешней нагрузки при разных значениях коэффициента K_f^{500} для колебаний в режиме фиксированной частоты $f_{11} = 314,5$ Гц, которая соответствует основной собственной частоте колебаний пластины при $K_f^{500} = 0$.

На рис. 8, а штрих-пунктирной, сплошной и штриховой линиями показаны максимальные температуры для $K_f^{500} = 0, 2, 1$ и 2 , соответственно. Максимальная температура увеличивается при возрастании K_f (так, например, $\theta_{\max} = 73,4^\circ\text{C}$ при $K_f^{500} = 0,2$).

На рис. 8, б показана зависимость максимальной температуры от коэффициента K_f^{500} на растущей ветке ($f_{11} = 314,5$ Гц). На рис. 8, б штриховой, сплошной и штрихпунктирной линиями показана зависимость максимальной температуры виброразогрева для амплитуд внешней нагрузки $q' = 350, 500$ и 600 Н/м², соответственно. Видно, что увеличение предварительных напряжений приводит к уменьшению (для заданной частоты колебаний) температуры разогрева, в то время как увеличение амплитуды нагрузки ведет к нарастанию максимальной температуры. Для обеспечения работоспособности пластины следует выбирать такие режимы колебаний, при которых уровень разогрева не превышает критического значения θ_{cr} . Критические уровни предварительных напряжений и нагрузок определяются по точкам пересечения ТЧХ с линией $\theta_{cr} = 100^\circ\text{C}$.

Заключение.

В предположении справедливости гипотез Кирхгофа – Лява представлены постановка и решение задачи о вынужденных резонансных колебаниях и виброразогреве вязкоупругой эластомерной пластины с предварительными нормальными мембранными усилиями в случаях квадратной и прямоугольной пластины, шарнирно закрепленной по контуру. Для наиболее энергоемкой первой моды изгибных колебаний шарнирно опертой пластины исследовано влияние указанного предварительного состояния, а также уровня внешней распределенной нагрузки, свойств материала, условий теплообмена на частотные зависимости максимальной амплитуды прогиба и температуры диссипативного разогрева. Определены критические значения предварительных напряжений, при которых температура виброразогрева достигает значения, при котором материал пластины начинает размягчаться.

Научные исследования, результаты которых опубликованы в данной статье, выполнены за счет средств бюджетной программы «Поддержка приоритетных направлений научных исследований» (КПКВК 6541230).

Р Е З Ю М Е . Дано постановку задачі про вимушені резонансні коливання і дисипативний розігрів шарнірно опертої в'язкопружної еластомерної пластини, що знаходиться під дією попередніх мембранних навантажень. Розглянуто випадок квадратної та прямокутної пластин. Досліджено вплив властивостей еластомерів, попереднього навантаження та умов теплообміну на амплітудно- і температурно-частотні характеристики вимушених коливань пластини та досягнення критичних значень температури, при яких відбувається розм'якшення матеріалу.

1. Доннелл Л.Г. Балки, пластины и оболочки. – М.: Наука, 1982. – 568 с.
2. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. – К.: Наук. думка, 1986. – 222 с.
3. Карнаухов В.Г., Гуменюк Б.П. Термомеханика предварительно деформированных вязкоупругих тел. – К.: Наук. думка, 1990. – 304 с.
4. Карнаухов В.Г., Сенченко И.К., Гуменюк Б.П. Термомеханическое поведение вязкоупругих тел при гармоническом нагружении – К.: Наук. думка, 1985. – 288 с.
5. Карнаухов В.Г., Сенченко И.К., Червинко О.П. Влияние предварительного деформирования на резонансные колебания и диссипативный разогрев вязкоупругого цилиндра конечной длины // Прикл. механика. – 1997. – 33, № 1. – С. 39 – 42.
6. Потураев В.Н., Дырда В.И., Карнаухов В.Г. и др. Термомеханика эластомерных элементов конструкций при циклическом нагружении. – К.: Наук. думка, 1987. – 288 с.
7. Anderson V.W., Lazan B.J. Damping and fatigue properties of magnesium and magnese-copper alloys proposed as new high damping materials. – Minnesota: Internal rept., Aero Library. – 1957. – 243 p.
8. Behnke R., Kalishke M. Thermo-mechanically coupled investigation of steady state rolling tires by numerical simulation and experiment // Int. J. of Non-Linear Mechanics. – 2015. – 68. – С. 101 – 131.
9. Bulat A.F., Dyrda V.I., Karnaukhov V.G. Durability of Thermoviscoelastic Bodies Under Long-Term Cyclic Loading // Int. App. Mech. – 2019. – 55, N 5. – P. 495 – 503.

10. *Green A.E.* Large elastic deformations and non-linear continuum mechanics. – Oxford: Clarendon Press, 1960. – 455 p.
11. *Hashemi M., Zhuk Y.* The Influence of Strain Amplitude, Temperature and Frequency on Complex Shear Moduli of Polymer Materials under Kinematic Harmonic Loading // *Mechanics and Mechanical Engineering*. – 2017. – **21**, N 1. – P. 157 – 170.
12. *Hashemi M., Zhuk Y.A.* Thermomechanical Stability and Thermal Fatigue Failure of Nanocomposite Structural Elements under Static and Cyclic Loading. – Lambert Academic Publishing, 2018. – 208 p.
13. *Hashemi M., Zhuk Y.A.* The Influence of Temperature on the Cyclic Properties of the Transversely Isotropic Nanocomposite System Under Kinematic Harmonic Loading // *J. of Math. Scie.* – 2019. – **236**, N 2. – P. 185 – 198.
14. *Karnaukhov V.G., Kirichok I.F.* Forced Harmonic Vibrations and Dissipative Heating-up of Viscoelastic Thin-Walled Elements (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2000. – **36**, N 2. – P. 174 – 195.
15. *Karnaukhov V.G., Kirichok I.F., Kozlov V.I.* Electromechanical Vibrations and Dissipative Heating of Viscoelastic thin-walled Piezoelements (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2001. – **37**, N 2. – P. 182 – 212.
16. *Karnaukhov V.G., Kirichok I.F., Kozlov V.I.* Thermomechanics of Inelastic Thin-Wall Structural Members with Piezoelectric Sensors and Actuators under Harmonic Loading (Review) // *Int. App. Mech.* – 2017. – **53**, N 1. – P. 6 – 58.
17. *Lazan B.* Damping of Materials and Members in Structural Mechanics. – Oxford: Pergamon Press, 1968. – 318 p.
18. *Liu C.J., Zheng Z.L., Yang X.Y., Guo J.J.* Geometric Nonlinear Vibration Analysis for Pretensioned Rectangular Orthotropic Membrane // *Int. App. Mech.* – 2018. – **54**, N 1. – P. 104 – 119.
19. *Nashif A.D., Jones D.L., Henderson J.P.* Vibration Damping. – New York: Wiley-Interscience Publication. – 1985. – 448 p.
20. *Snowdon J.C.* Vibration and Shock in Damped Mechanical Systems. – New York: The Pennsylvania State University, 1968. – 486 p.

Поступила 14.05.2019

Утверждена в печать 03.03.2020