В. В. Михайленко[1], Т. В. Карнаухова[2]

ОБ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ КОЭФФИЦИЕНТА ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОЙ СВЯЗИ ПРИ КОЛЕБАНИЯХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ТЕЛ

[1] *Житомирский государственный университет им. Ивана Франко,*
ул. Б. Бердичевская, 40, 10002, Житомир, Украина;
e-mail : vasylmikhailenko@gmail.com;
[2] *Национальный технический университет Украины*
«Киевский политехнический институт им. Игоря Сикорского»,
пр. Победы, 37, 03056, Киев, Украина; e-mail :karn@inmech.kiev.ua

Abstract. A definition of the coefficient of electromechanical coupling (CEMC) for the case of oscillations of the inelastic piezoelectric bodies is given. The effect of energy dissipation is taken into account by introduction of the integral loss characteristic. The definition of CEMC corresponds to the proposed by A.F. Ulitko energetic CEMC, which is interpreted as the limiting case when losses are neglected.

Key words: piezoelectric element, electromechanical coupling coefficient, reduced loss factor, circumference of dimensionless conductivity.

Введение.

Одним из основных вопросов любой теории пьезоэлектрических тел является вопрос об оценке эффективности электромеханического преобразования энергии. Наиболее полную характеристику этого преобразования дают интегральные величины, называемые эффективными или динамическими коэффициентами электромеханической связи (КЭМС). Такие КЭМС зависят не только от свойств пьезоматериала, но и от геометрии пьезоэлемента, расположения электродов, частоты колебаний.

Испытание временем выдержали подходы к определению КЭМС, основанные на формуле У. Мэзона [1, 4, 5] и на разработанной в [3, 12] энергетической теории. В полном соответствии с последней находится, например, методика нахождения КЭМС из [6].

В связи с расширяющимся внедрением в технику полимерных и неупругих композиционных пьезоэлектриков особую актуальность приобретает развитие теорий КЭМС, учитывающих неупругое поведение пьезоматериала [2, 10 ,11].

В данной работе учет неупругого поведения пьезоматериала производится как путем непосредственного обобщения соотношений энергетической теории КЭМС для случая гармонических колебаний пьезоэлементов, так и путем независимого определения КЭМС с учетом потерь.

1. Энергетическая теория КЭМС: ЭКЭМС.

В работах [3, 12] в качестве характеристики преобразования энергии пьезоэлементом предложено использовать величину (далее энергетическая теория КЭМС: ЭКЭМС), которая полностью определяется полем деформаций и характером расположения электродов. Способы механического и электрического нагружения, приводящие к заданному деформированному состоянию, являются несущественными. Наиболее просто эта идея реализуется в случае, когда за независимые переменные принимать деформацию и напряженность электрического поля. Тогда кроме основной задачи электроупругости (для определения поля деформаций) необходимо решить две дополнительные задачи для электрического потенциала соответственно при разомкнутых и короткозамкнутых электродах (для определения внутренних энергий в объеме тела: U^p – при разомкнутых электродах; U^k – при короткозамкнутых электродах). Тогда квадрат ЭКЭМС k_u^2 определяется как:

$$k_u^2 = \frac{k^2}{1+k^2}; \quad k^2 = \frac{U^p - U^k}{U^k}. \tag{1}$$

Такая форма записи для k_u^2 будет удобной в дальнейшем.

Основополагающим в теории ЭКЭМС является предположение о мгновенном снятии электрической энергии с электродов без изменения деформированного состояния. Тогда разность $U^p - U^k$ можно интерпретировать как ту часть электрической энергии, запасенной в объеме тела, которая способна к снятию с электродов на данной деформации.

В общем случае величины U^p и U^k являются функциями времени. Если деформации представимы в виде $\varepsilon_{ij} = \hat{\varepsilon}_{ij}(\vec{x}) f(t)$, временной множитель $f(t)$, фигурирующий в соотношениях дополнительных задач для электрического потенциала как параметр, во второй формуле (1) сокращается и ЭКЭМС становится постоянной величиной.

Непосредственное использование соотношений (1) труднореализуемо (за исключением, разве что, одномерных задач электроупругости). В [2] методика определения ЭКЭМС несколько упрощается. Показано, что соотношения (1) равносильны следующим соотношениям:

$$k_u^2 = \frac{k^2}{1+k^2}; \quad k^2 = \frac{\left(Q - C_\varepsilon \Delta\varphi\right)^2 C_\varepsilon^{-1}}{2U - C_\varepsilon \left(\Delta\varphi\right)^2}, \tag{2}$$

где величины Q, $\Delta\varphi$, U обозначают, соответственно, электрический заряд электрода, электрическое напряжение на электродах, внутреннюю электромеханическую энергию в объеме пьезоэлемента из основной задачи электроупругости. В общем случае эти величины являются функциями времени и связаны с полевыми электромеханическими величинами соотношениями

$$U = \frac{1}{2}\int_V \left(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + E_k D_k\right) dV; \quad Q \cdot \Delta\varphi = \int_V E_k D_k dV. \tag{3}$$

Здесь ε_{ij}, σ_{ij} – механические деформации и напряжения; E_k, D_k – напряженность и индукция электрического поля; V – объем пьезоэлемента.

Величина C_ε имеет смысл электрической емкости и определяется путем решения обычной задачи электростатики при тех же диэлектрических свойствах (считаем их определяемыми для постоянной деформации) и расположении электродов, что и в основной задаче электроупругости.

Ниже будем называть C_ε емкостью при нулевых деформациях.

Преимущества использования соотношений (2) по сравнению с соотношениями (1) обсуждаются в [2].

В случае гармонических колебаний вида

$$p = \left\{\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}, E_k, D_k\right\} = p'(\vec{x})\cos\omega t; \ Q = Q'\cos\omega t; \ \Delta\varphi = \Delta\varphi'\cos\omega t$$

временной множитель $\cos\omega t$ в (2) сокращается, и все величины заменяются своими амплитудными аналогами:

$$k_u^2 = \frac{k^2}{1+k^2}; \quad k^2 = \frac{\left(Q' - C_\varepsilon \Delta\varphi'\right)^2 C_\varepsilon^{-1}}{2U_T - C_\varepsilon \left(\Delta\varphi'\right)^2}. \tag{4}$$

При этом величина

$$U_T = \frac{1}{2}\int_V \left(\sigma'_{ij}\varepsilon'_{ij} + E'_k D'_k\right) dV$$

имеет смысл удвоенной средней за период колебаний внутренней энергии.

Если диэлектрические свойства являются функциями частоты ω, емкость C_ε также зависит от частоты.

Ниже мы воспользуемся такой интерпретацией соотношений (4): они получаются путем усреднения за период колебаний числителя и знаменателя из второго соотношения (2).

Отметим, что второе соотношение (4) допускает равносильную запись:

$$k^2 = \frac{\left(Q' - C\Delta\varphi'\right)^2 C^{-1}}{2U_T - (Q')^2 / C}; \quad C = C_\varepsilon (1+k^2). \tag{5}$$

То же самое относится и ко второму соотношению (2).

2. Учет потерь.

Учет потерь пьезоматериала в случае линейных гармонических колебаний предполагает представление полевых электромеханических величин в виде

$$\begin{gathered} \varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij}\cos\omega t - \varepsilon''_{ij}\sin\omega t; \; \sigma_{ij} = \sigma'_{ij}\cos\omega t - \sigma''_{ij}\sin\omega t; \\ E_k = E'_k\cos\omega t - E''_k\sin\omega t; \; D_k = D'_k\cos\omega t - D''_k\sin\omega t. \end{gathered} \tag{6}$$

Ниже считаем эти колебания изотермическими.

Некоторые результаты по исследованию влияния температуры диссипативного разогрева на работу пьезоэлементов представлены в работах [7 – 9].

Для электрического заряда и электрического напряжения на электродах соответственно имеем

$$Q = Q'\cos\omega t - Q''\sin\omega t; \; \Delta\varphi = \Delta\varphi'\cos\omega t - \Delta\varphi''\sin\omega t. \tag{7}$$

Непосредственная реализация энергетического подхода к определению ЭКЭМС в виде соотношений (1) усложняется в случае учета потерь тем, что накапливаемая электромеханическая энергия, в отличие от энергии диссипации, даже в среднем за период колебаний определяется через электромеханические полевые величины неоднозначно [2].

Обобщению на случай учета потерь более приемлемы соотношения (2) и (4).

Формально можно воспользоваться во втором соотношении (2) представлениями (6) и (7) и усреднить за период колебаний числитель и знаменатель этого соотношения (подобно тому, как из второго соотношения (2) получается второе соотношение (4) при электроупругих процессах). Несмотря на то, что U из (3), как функция времени на историях (6), никакого отношения к накоплению энергии не имеет, величину

$$U_T = \frac{1}{2}\int_V \left(\sigma'_{ij}\varepsilon'_{ij} + \sigma''_{ij}\varepsilon''_{ij} + E'_k D'_k + E''_k D''_k\right) dV \tag{8}$$

можно рассматривать как приближенное значение удвоенной средней за период колебаний накапливаемой электромеханической энергии в полном объеме пьезоэлемента [2].

В результате имеем:

$$k_0^2 = \frac{\left(\left(Q' - C_\varepsilon\Delta\varphi'\right)^2 + \left(Q'' - C_\varepsilon\Delta\varphi''\right)^2\right)\cdot C_\varepsilon^{-1}}{2U_T - C_\varepsilon\cdot\left(\left(\Delta\varphi'\right)^2 + \left(\Delta\varphi''\right)^2\right)}. \tag{9}$$

В [2] непосредственному обобщению на случай учета потерь поддается второе соотношение (4). Путем интерпретации величин $C_\varepsilon\left(\Delta\varphi'\right)^2/2$ и $\left[\left(Q'-C_\varepsilon\Delta\varphi'\right)^2 C_\varepsilon^{-1}\right]/2$, как удвоенных средних за период колебаний энергий, соответственно, «свободного» и «связанного» зарядов электрода и замены их приближенными значениями (подобно использованию (8) в качестве удвоенной средней за период накапливаемой электромеханической энергии) получено следующее обобщение второго соотношения (4):

$$k_1^2 = \frac{\left|\tilde{Q}-\tilde{C}_\varepsilon\Delta\tilde{\varphi}\right|^2 C_\varepsilon^{-1}}{2U_T - C_\varepsilon\left|\Delta\tilde{\varphi}\right|^2}. \qquad (10)$$

Здесь

$$\tilde{Q} = Q' + iQ''\,;\ \Delta\tilde{\varphi} = \Delta\varphi' + i\Delta\varphi''\,;\quad \tilde{C}_\varepsilon = C_\varepsilon(1-i\delta_0)\,,\ i=\sqrt{-1}\,, \qquad (11)$$

соответственно, комплексные амплитуды электрического заряда электрода и электрического напряжения на электродах из основной задачи; комплексная емкость, которая определяется по решению дополнительной задачи электростатики с теми же комплексными диэлектрическими характеристиками и размещением электродов, что и в основной задаче (запись соотношения (10) предполагает, что $\delta_0^2 \ll 1$). Кроме того, U_T – удвоенная средняя за период накапливаемая электромеханическая энергия в полном объеме пьезоэлемента, приближенное значение которой дается соотношением (8).

Характеристику энергопреобразования (КЭМС) получаем, заменяя в правой части первого соотношения (4) k^2 на k_0^2 или k_1^2 из (9), (10). Поскольку k_0^2 – частный случай k_1^2 при $\delta_0 = 0$, ограничимся выражением

$$k_e^2 = \frac{k_1^2}{1+k_1^2}. \qquad (12)$$

Для величины k_e^2 характерна слабая реакция на потери пьезоматериала. Во всяком случае, на пьезоактивных формах колебаний k_e^2 с точностью до 2 – 3 знаков совпадает в расчетах с электроупругим ЭКЭМС k_u^2 [2].

Если потери пьезоматериала не учитывать и все величины с двумя штрихами в (10) приравнять нулю, положив также $\delta_0 = 0$ в (11), из соотношений (10), (12) получим соотношения (4).

3. Независимое определение КЭМС, учитывающее потери.

В данном пункте ограничимся случаем электрического возбуждения колебаний пьезоэлемента и не будем предполагать каких-либо обобщений энергетических электроупругих соотношений типа (1), (2) или (4).

Следуя [2], введем коэффициент затухания электромеханических колебаний ψ, как отношение энергии, диссипированной в полном объеме V пьезоэлемента за период колебаний, к удвоенной средней за период накапливаемой энергии в V, которую, как и раньше, обозначаем U_T, не предполагая при этом каких-либо ее приближений типа (8):

$$\psi = \frac{2\pi}{\omega} D_T / U_T. \qquad (13)$$

Здесь D_T – средняя за период колебаний скорость диссипации электромеханической энергии в V. В отличие от U_T, величина D_T полностью электромеханически детерминирована [2] и определяется точным соотношением

$$D_T = \frac{\omega}{2}\int_V \left(\sigma''_{ij}\varepsilon'_{ij} - \sigma'_{ij}\varepsilon''_{ij} + E''_k D'_k - E'_k D''_k\right) dV .$$

В последующем удобнее использовать величину

$$\delta = \frac{\psi}{2\pi} = \frac{D_T}{\omega U_T}, \tag{14}$$

которую назовем приведенным коэффициентом потерь.

Введем также комплексную проводимость

$$\tilde{Y} = Y' + iY'' = i\omega\tilde{Q} / \Delta\tilde{\varphi} . \tag{15}$$

Если учесть, что скорость диссипации D_T равна подводимой активной электрической мощности

$$D_T = \frac{1}{2} Y' \left|\Delta\tilde{\varphi}\right|^2 ,$$

формулу (14) можно переписать в виде

$$Y' = \frac{2U_T\omega}{\left|\Delta\tilde{\varphi}\right|^2}\cdot\delta$$

или, используя электрическую емкость C_ε, в безразмерном виде

$$\frac{Y'}{C_\varepsilon\omega} = \frac{2U_T}{C_\varepsilon\left|\Delta\tilde{\varphi}\right|^2}\cdot\delta . \tag{16}$$

Поэтому

$$\frac{Y'}{C_\varepsilon\omega} > \delta .$$

Равенство $Y'/(C_\varepsilon\omega) = \delta$ имеет место в идеализированном случае, когда деформации равны нулю (задача электростатики). В этом случае величина δ из (14) вырождается в δ_0 из третьего соотношения (11).

Если в декартовой системе координат xOy взять точки $(\delta, 1)$ и $\left(Y'/(C_\varepsilon\omega),\, Y''/(C_\varepsilon\omega)\right)$, то ими однозначно определится окружность, проходящая через эти точки, и центр которой лежит на прямой $y = 1$. Назовем ее окружностью обезразмеренной проводимости. Пусть d – диаметр этой окружности (величина d не имеет размерности). Тогда

$$\left(\frac{Y'}{C_\varepsilon\omega} - \delta - \frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{Y''}{C_\varepsilon\omega} - 1\right)^2 = \frac{d^2}{4} . \tag{17}$$

В общем случае для каждой частоты ω окружность безразмерной проводимости – своя.

Определим величину k_2^2, как произведение диаметра этой окружности на приведенный коэффициент потерь:

$$k_2^2 = d\cdot\delta . \tag{18}$$

Тогда

$$\left(\frac{Y'}{C_\varepsilon\omega} - \delta - \frac{k_2^2}{2\delta}\right)^2 + \left(\frac{Y''}{C_\varepsilon\omega} - 1\right)^2 = \left(\frac{k_2^2}{2\delta}\right)^2 . \tag{19}$$

Путем тождественных преобразований с учетом (15), (16) сводим последнее равенство к виду

$$k_2^2 = \frac{\left|\tilde{Q} - C_\varepsilon\left(1 - i\delta\right)\Delta\tilde{\varphi}\right|^2 C_\varepsilon^{-1}}{2U_T - C_\varepsilon\left|\Delta\tilde{\varphi}\right|^2}. \tag{20}$$

Соотношение (20) допускает равносильную запись

$$k_2^2 = \frac{\left|\tilde{Q}\left(1+\delta^2\right) - C\left(1 - i\delta\right)\Delta\tilde{\varphi}\right|^2 C^{-1}}{\left(2U_T - \left|\tilde{Q}\right|^2 / C\right)\left(1+\delta^2\right)}; \quad C = C_\varepsilon\left(1 + k_2^2 + \delta^2\right), \tag{21}$$

подобную электроупругим соотношениям (4), (5).

Величина k_2^2 из (20) отличается от k_1^2 из (10) только мнимой частью комплексной емкости $\tilde{C}_\varepsilon$, поскольку, вообще говоря, $\delta_0 \neq \delta$.

Для оценки влияния указанного отличия проведем тождественные преобразования соотношения (10), по сути, обратные тем, которые привели нас к (20). В результате получаем

$$\left(\frac{Y'}{C_\varepsilon\omega} - \delta_0 - \frac{k_1^2}{2\delta}\right)^2 + \left(\frac{Y''}{C_\varepsilon\omega} - 1\right)^2 = \left(\frac{k_1^2}{2\delta}\right)^2\left(1 + \frac{4\delta\left(\delta_0 - \delta\right)}{k_1^2}\right). \tag{22}$$

Далее воспользуемся тождеством

$$\delta_0 + \frac{k_1^2}{2\delta} = \delta + \frac{k_1^2}{2\delta}\left(1 + \frac{2\delta\left(\delta_0 - \delta\right)}{k_1^2}\right)$$

и ограничениями

$$\delta_0^2 << 1; \quad \delta^2 << 1; \quad k_1^2 > 2\delta. \tag{23}$$

Заметим, что величины δ, δ_0 имеют порядок тангенсов углов потерь (диэлектрических – в случае δ_0). Ограничение на пьезоактивность в виде последнего неравенства (23) позволяет записать

$$\left(\frac{2\delta\left(\delta_0 - \delta\right)}{k_1^2}\right)^2 < \left(\delta_0 - \delta\right)^2 << 1.$$

В результате из (22) получаем соотношение (17), в котором

$$d = \frac{k_1^2}{\delta}\left(1 + \frac{2\delta\left(\delta_0 - \delta\right)}{k_1^2}\right), \tag{24}$$

а в результате сравнения (24) и (18) – соотношение

$$k_2^2 = k_1^2\left(1 + \frac{2\delta\left(\delta_0 - \delta\right)}{k_1^2}\right). \tag{25}$$

Для пьезокерамических элементов, например, δ, δ_0 – величины порядка $10^{-2} \div 10^{-3}$. На пьезоактивных формах колебаний k_1^2 может более чем на порядок превышать предел неравенства (23). Поэтому, если определить КЭМС k_g^2 как

$$k_g^2 = \frac{k_2^2}{1 + k_2^2} = \frac{d\delta}{1 + d\delta} = \frac{d}{d + Q_{em}}; \quad Q_{em} = \frac{1}{\delta}, \tag{26}$$

то для него останется в силе сказанное выше о величине k_e^2 из (12), в частности, о ее практическом совпадении на пьезоактивных формах колебаний с электроупругим ЭКЭМС.

Обозначением величины k_g^2 подчеркивается ее формальное «геометрическое» определение, основанное на понятии окружности обезразмеренной проводимости.

Приведенный коэффициент потерь δ – это характеристика пьезоэлемента в целом, а не только пьезоматериала. Поэтому величину Q_{em} из (26) естественно назвать общей электромеханической добротностью пьезоэлемента.

4. Некоторые интерпретации ЭКЭМС.

Приближенное равенство (25), полученное при ограничениях (23), дает представление о близости величин k_1^2 и k_2^2. Способ определения величины k_2^2 позволяет оценить ее близость к электроупругой величине k^2 из (4).

Для этого перейдем в (17) к комплексному сопротивлению

$$\tilde{R} = R' + iR'' ; \quad \tilde{R} = 1/\tilde{Y} .$$

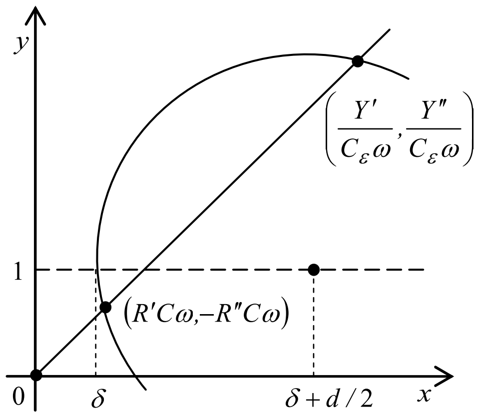
В результате тождественных преобразований получим:

$$\left(R'C\omega - \delta - \frac{d}{2} \right)^2 + \left(R''C\omega + 1 \right)^2 = \frac{d^2}{4}, \tag{27}$$

где величина C, имеющая смысл электрической емкости, – такая же, как и в (21):

$$C = C_\varepsilon \left(1 + d\delta + \delta^2 \right) = C_\varepsilon \left(1 + k_2^2 + \delta^2 \right). \tag{28}$$

Из (17) и (27) заключаем, что точка с координатами $\left(R'C\omega, -R''C\omega \right)$ лежит на окружности обезразмеренной проводимости и вместе с точкой $\left(Y'/C_\varepsilon\omega, Y''/C_\varepsilon\omega \right)$ образует секущую, проходящую через начало координат. Сказанное демонстрируется схематическим рисунком.



Для произведения обезразмеренных амплитуд проводимости и сопротивления согласно (28) получаем

$$\frac{\left|\tilde{Y}\right|}{C_\varepsilon\omega} \cdot \left|\tilde{R}\right| C\omega = \frac{C}{C_\varepsilon} = 1 + k_2^2 + \delta^2 \tag{29}$$

(для обычного конденсатора окружность вырождается в точку $\left(\delta_0, 1 \right)$ и аналогичное произведение равно $1 + \delta_0^2$).

Если потерями пренебречь, то, сравнивая (4), (5) и (20), (21), произведение амплитуд (или отношение емкостей C / C_ε) (29) естественно положить равным $1+k^2$. Как и для обычного конденсатора, считаем, что величина (29) превышает значение, соответствующее отсутствию потерь, но не более чем на δ^2.

В результате получаем

$$k^2 - k_2^2 < \delta^2 ; \quad k_2^2 \le k^2 . \tag{30}$$

Неравенства (30) не только демонстрируют близость величин k_2^2 и k^2 для реального δ, но и позволяют рассматривать k^2 как предельное значение k_2^2, если теоретически предположить, что $\delta \to 0$.

Поскольку из (30) следует

$$k_g^2 \le k_u^2 ; \quad k_u^2 - k_g^2 < \delta^2 \tag{31}$$

[см. (4), (26)], ЭКЭМС можно интерпретировать как предельное значение КЭМС k_g^2 в предположении уменьшения потерь. Тем самым формально введенная величина k_g^2 приобретает реальное энергетическое содержание своего предела.

Следующая интерпретация ЭКЭМС состоит в том, что в случае малых потерь величину

$$k^2 = \frac{k_u^2}{1-k_u^2}$$

можно рассматривать как коэффициент обратной пропорциональности между d и δ и использовать приближенное соотношение для комплексной проводимости:

$$\left(\frac{Y'}{C_\varepsilon \omega} - \delta - \frac{k^2}{2\delta}\right)^2 + \left(\frac{Y''}{C_\varepsilon \omega} - 1\right)^2 = \left(\frac{k^2}{2\delta}\right)^2 . \tag{32}$$

Заменяя в (19) k_2^2 на k^2, допускаем относительную погрешность, не превышающую величины δ^2 / k_2^2. На пьезоактивных частотах колебаний пьезокерамических элементов, например, это меньше, а то и значительно меньше относительной погрешности, с которой комплексную проводимость удается определить экспериментально [8].

В окрестности пьезоактивной резонансной частоты пьезокерамического элемента следует пользоваться упрощенным соотношением

$$\left(\frac{Y'}{C_\varepsilon \omega} - \frac{k^2}{2\delta}\right)^2 + \left(\frac{Y''}{C_\varepsilon \omega} - 1\right)^2 = \left(\frac{k^2}{2\delta}\right)^2 . \tag{33}$$

Если, кроме того, считать величины C_ε, k^2 и δ независящими от частоты (достаточно даже считать независящим от частоты отношение k^2 / δ; в этом случае окружность обезразмеренной проводимости одинакова для всех частот из рассматриваемой окрестности) и пренебречь частотным изменением величины $C_\varepsilon \omega$, взяв ее равной $C_\varepsilon \omega_p$, где ω_p – резонансная частота, придем к классическому понятию круговой диаграммы комплексной проводимости [8] и соответствующему выражению некоторых параметров эквивалентной электрической схемы (ЭЭС) пьезоэлемента через интегральные характеристики, в частности, ЭКЭМС.

В окрестности антирезонансной частоты следует использовать не общее соотношение (32) для комплексной проводимости, а упрощенный вариант соотношения (27) для комплексного сопротивления

$$\left(R'C\omega-\frac{k^2}{2\delta}\right)^2+\left(R''C\omega+1\right)^2=\left(\frac{k^2}{2\delta}\right)^2. \qquad (34)$$

До сих пор емкости C_ε и C носили чисто теоретический характер. Соотношения (33), (34) переводят эти емкости в разряд реальных параметров, поскольку допускают их определение по результатам измерений комплексной проводимости (комплексного сопротивления) на трех произвольных частотах из рассматриваемого частотного диапазона. Единственное условие – это постоянство самой емкости и отношения k^2/δ в этом диапазоне.

В связи с этим обратимся к еще одной интерпретации ЭКЭМС.

Соотношение (28) преобразуем к виду

$$k_g^2=\frac{k_2^2}{1+k_2^2}=\frac{C-C_\varepsilon\left(1+\delta^2\right)}{C\left(1-\frac{C_\varepsilon}{C}\delta^2\right)}$$

или, предполагая, что $\delta^2 << 1$, к виду

$$k_g^2=\frac{C-C_\varepsilon}{C}.$$

Введем новые обозначения

$$C_0=C_\varepsilon;\quad C_1=C-C_\varepsilon \qquad (35)$$

и заменим в соответствии (31) k_g^2 на k_u^2. В результате получим:

$$k_u^2=\frac{C_1}{C_0+C_1}. \qquad (36)$$

Конечно, (36) можно формально получить из (5) или (21). Но тогда невыясненными оказались бы способы экспериментального определения емкостей C_ε и C_1.

Статическую и динамическую емкости ЭЭС пьезоэлемента также обозначают соответственно C_0 и C_1. У. Мэзон связал эти емкости с резонансной ω_p и антирезонансной ω_a частотами пьезоэлемента соотношением [1, 4, 5]

$$\frac{C_1}{C_0+C_1}=\frac{\omega_a^2-\omega_p^2}{\omega_a^2}=k_m^2. \qquad (37)$$

Величину k_m^2 называют КЭМС Мэзона.

В теории ЭЭС три величины из соотношения (37), а именно ω_p, ω_a, C_0 определяются с помощью экспериментов, а четвертая (C_1) вычисляется из этого соотношения.

В нашем случае все четыре величины ω_p, ω_a, C_0, C_1 поддаются экспериментальному определению [две последние – с учетом (35)].

Заключение.

Основные результаты работы состоят в следующем:

1. Введение понятия окружности обезразмеренной проводимости позволило дать независимое определение КЭМС (26), учитывающее потери. Это определение приведено в соответствие с ЭКЭМС, который интерпретируется как предельный случай, когда потерями пренебрегают. Существенным здесь является использование интегральной характеристики потерь, позволяющей моделировать ситуацию «потери уменьшаются».

2. Показано, что ЭКЭМС с его энергетическим содержанием можно в случае электрического нагружения наделить простотой и наглядностью, свойственными КЭМС Мезона, а именно, выразить через две, поддающиеся экспериментальному определению величины (емкости). В таком выражении через емкости формула для ЭКЭМС (36) совпадает по виду с представлением КЭМС Мэзона (37) через статическую и динамическую емкости ЭЭС пьезоэлемента.

3. Соотношения (36) и (37) позволяют дать чисто экспериментальный ответ на вопрос о связи ЭКЭМС и КЭМС Мэзона на резонансных частотах колебаний реальных пьезоэлементов.

РЕЗЮМЕ. Дано означення коефіцієнта електромеханічного зв’язку (КЕМЗ) для випадку коливань непружних п’єзоелектричних тіл. Вплив дисипації енергії враховується уведенням інтегральної характеристики втрат. Означення КЕМЗ приведено у відповідність з енергетичним КЕМЗ А.Ф. Улітка, який інтерпретується як граничний випадок, коли втратами нехтується.

1. *Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г.* Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях / Физическая акустика, Т. 1, ч. А. / Под ред. У. Мэзона. – М.: Мир, 1968. – С. 204 – 326.
2. *Карнаухов В.Г., Михайленко В.В.* Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. – Житомир: ЖГТУ, 2005. – 248 с.
3. *Механика* связанных полей в элементах конструкций / Под общей ред. А.Н.Гузя в 5-ти томах. Т. 5. Электроупругость /Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. – К.: Наук. думка, 1989. – 280 с.
4. *Пьезокерамические* преобразователи. Справочник / Под ред. С.И.Пугачева. – Л.: Судостроение, 1984. – 256 с.
5. *Berlincourt D.* Piezoelectric Crystals and Ceramics. Ultrasonic Transducer Materials / Ed. O. Mattiat. – New York: Plenum Press, 1971. – **2**. – P. 63 – 123.
6. *Boucher D., Lagiez M., Maerfeld C.* Computation of the vibrational modes for piezoelectric array transducers using a mixed finite element – perturbation method // IEEE Trans. Sonics and Ultrasonics. – 1981. – **28**, N 5. – P. 318 – 330.
7. *Karnaukhov V.G., Kozlov V.I., Karnaukhova T.V.* Forced Vibrations and Dissipative Heating of Hinged Flexible Viscoelastic Rectangular Plates with Actuators under Shear Deformation // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 1. – P. 85 – 93.
8. *Karnaukhov V.G., Kozlov V.I., Karnaukhova T.V.* Influence of Anisotropy and Transverse-Shear Strains on the Performance of Piezoelectric Sensors and Actuators // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 3. – P. 331 – 338.
9. *Karnaukhov V.G., Kozlov V.I., Karnaukhova T.V.* Critical Electric Load on a Hinged Thermoviscoelastic Rectangular Plate with Piezoelectric Sensors and Actuators // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 6. – P. 596 – 600.
10. *Karnaukhov V.G., Mikhailenko V.V.* Nonlinear Single-Frequency Vibrations and Dissipative Heating of Inelastic Piezoelectric Bodies // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, N 5. – P. 521 – 547.
11. *Piezoelectric* and Acoustic Materials for Transducer Applications / Eds. A.Safari, E.K. Akdogan. – New York: Springer, 2008. – 481 p.
12. *Ulitko A.F.* Theory of Electromechanical Energy Conversion in Nonuniformly Deformable Piezoceramics // Int. Appl. Mech. – 1977. – **13**, N 10. – P. 1055 – 1062.

Поступила 27.08.2018 Утверждена в печать 05.11.2019