

О. Н. Петрищев<sup>1</sup>, М. И. Романюк<sup>2</sup>

**ВОЗБУЖДЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННО РАЗВИТЫХ ВОЛН ЛЭМБА СИСТЕМОЙ ОБЪЕМНЫХ И ПОВЕРХНОСТНЫХ НАГРУЗОК (ЧАСТЬ 2)**

<sup>1</sup> Государственное предприятие

«Киевский научно-исследовательский институт гидроприборов»,  
ул. Василия Сурикова, 3, 01035, Киев, Украина; e-mail: petrishchev@ukr.net

<sup>2</sup> Национальный технический университет Украины

«Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского»,  
просп. Победы, 37, 03056, Киев, Украина; e-mail: romanyuk\_rita@ukr.net

**Abstract.** A problem of excitation of spatially developed Lamb waves by a system of volume and surface loads is formulated and completely analytically solved. With the application of the direct and inverse integral Hankel transform, the relations are obtained for determining the amplitude factors of the radially propagating non-axisymmetric Lamb waves, that are excited by a system of volume and surface loads in an arbitrary region of an isotropic elastic layer. The relations are obtained for calculating the components of the displacement vector of material particles of the elastic layer in the far field.

**Keywords:** Lamb waves, integral Hankel transform, amplitude factors, displacement vector of material particles, mathematical modeling.

**Введение.**

Исследование закономерностей процесса возбуждения радиально распространяющихся волн Лэмба мотивируется достаточно широким перечнем обстоятельств.

Во-первых, это проблема эффективной генерации волн Лэмба с наперед обусловленными характеристиками в заданном диапазоне частот. Позитивное решение этой проблемы является необходимым и достаточным условием для существенного повышения уровня достоверности и надежности результатов ультразвуковых дефектологических исследований листового металлопроката. Помимо этого, появляются предпосылки для рационального конструирования ультразвуковых преобразователей, которые обладают необходимой эффективностью в режиме излучения и чувствительностью в режиме приема упругих волн.

Во-вторых, понимание закономерностей возбуждения волн Лэмба внешними силами, распределенными в некотором объеме упругого слоя, дает возможность адекватно интерпретировать результаты мониторинга шумов акустической эмиссии и регистрации отраженных от различного рода структурных неоднородностей ультразвуковых сигналов.

В-третьих, понимание качественных и количественных характеристик процесса возбуждения волн Лэмба формируют теоретическую основу алгоритмов обработки результатов экспериментальных исследований физико-механических параметров материалов с помощью ультразвуковых методов неразрушающего контроля.

Вообще говоря, изучение закономерностей процесса возбуждения волн Лэмба создает предпосылки для решения весьма актуальной в ультразвуковой технике проблемы влияния измерительного прибора (ультразвукового тракта), на параметры регистрируемых сигналов, т.е. на результаты измерений.

**Расчет амплитудных множителей радиально распространяющихся волн Лэмба, что формируются в дальнем поле системой объемных и поверхностных нагрузок.**

Ранее было показано, что характеристики ультразвуковых гармонических волн, которые существуют за пределами области нагружения, и которые возбуждаются контактным или бесконтактным (электромагнитным) способом, могут быть получены в результате решения следующей неоднородной граничной задачи, которая в терминах амплитуд гармонически изменяющихся во времени по закону  $e^{i\omega t}$  характеристик физических полей записывается в следующем виде:

$$(\lambda + 2G) \text{grad div } \bar{\mathbf{u}} - \text{Grot rot } \bar{\mathbf{u}} + \rho_0 \omega^2 \bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{f}}^* = 0 \forall x_k \in V; \quad (1)$$

$$n_i (2G \varepsilon_{ij} + \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} - \sigma_{ij}^*) = 0 \forall x_k \in S, \quad (2)$$

где  $\lambda$  и  $G$  – константы Ламе;  $\bar{\mathbf{u}}$  – вектор смещения материальных частиц;  $\rho_0$  – плотность материала упругого слоя;  $\omega$  – частота смены знака внешних нагрузок  $\bar{\mathbf{f}}^*$  и  $\sigma_{ij}^*$ ;  $n_i$  –  $i$ -й компонент вектора внешней нормали к поверхности  $S$ , которая ограничивает исследуемый объем  $V$  упругого слоя;  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты тензора бесконечно малых деформаций, причем  $\varepsilon_{kk}$  – линейный инвариант тензора деформаций;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера. В качестве объемных нагрузок выступают либо силы Лоренца, либо (в случае ферромагнитных металлов) линейные комбинации градиентов вектора напряженности переменного магнитного поля, которое создается сторонними токами. Поверхностные плотности внешних сил формируются компонентами тензора Максвелла или, в случае ферромагнетиков, компонентами вектора напряженности переменного магнитного поля. Общее решение граничной задачи (1) – (2) при  $\bar{\mathbf{f}}^* = 0$  и  $\sigma_{ij}^* \neq 0$  будет моделировать контактный способ возбуждения ультразвуковых волн.

Таким образом, граничная задача (1) – (2) является универсальной математической моделью процесса возбуждения ультразвуковых волн внешними силами, которые изменяются во времени по гармоническому закону  $e^{i\omega t}$ .

Для эффективного решения задачи (1) – (2) необходимо иметь в своем распоряжении соотношения, которые описывают свободные колебания материальных частиц упругого слоя (нормальные волны), т.е. собственные функции (общие решения) задачи (1) – (2) при  $\bar{\mathbf{f}}^* = 0$  и  $\sigma_{ij}^* = 0$ . Однородная граничная задача при весьма общих предположениях относительно пространственного распределения волнового поля смещений материальных частиц решена в работе [5]. Если ввести цилиндрическую систему координат, начало которой располагается в срединной плоскости изотропной пластины, то, следуя результатам работы [5], можем записать следующие соотношения для расчета компонентов вектора смещения материальных частиц:

$$\begin{aligned} u_{\rho}^{(Am)}(\rho, \phi, z) &= \frac{1}{2} U_{\rho}^A(z, \gamma_m) \sum_{n=0}^{\infty} B_n^*(\gamma_m) [H_{n-1}^{(2)}(\gamma_m \rho) - H_{n+1}^{(2)}(\gamma_m \rho)] \begin{pmatrix} -\sin(n\phi) \\ \cos(n\phi) \end{pmatrix}; \\ u_{\phi}^{(Am)}(\rho, \phi, z) &= -\frac{1}{2} U_{\rho}^A(z, \gamma_m) \sum_{n=0}^{\infty} B_n^*(\gamma_m) [H_{n-1}^{(2)}(\gamma_m \rho) + H_{n+1}^{(2)}(\gamma_m \rho)] \begin{pmatrix} \cos(n\phi) \\ \sin(n\phi) \end{pmatrix}; \\ u_z^{(Am)}(\rho, \phi, z) &= U_z^A(z, \gamma_m) \sum_{n=0}^{\infty} B_n^*(\gamma_m) H_n^{(2)}(\gamma_m \rho) \begin{pmatrix} -\sin(n\phi) \\ \cos(n\phi) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $m$  – номер нормальной волны, антисимметричной (символ  $A$ ) относительно срединной плоскости  $z = 0$  пластины;  $U_{\rho}^A(z, \gamma_m)(\beta = \rho, z)$  – собственные функции одно-

родной граничной задачи (1) – (2), они же моды, причем

$$\begin{aligned} U_\rho^A(z, \gamma_m) &= \gamma_m \left[ \sin \alpha_m z + \frac{2\alpha_m \beta_m \cos \alpha_m h}{(\gamma_m^2 - \beta_m^2) \cos \beta_m h} \sin \beta_m z \right]; \\ U_z^A(z, \gamma_m) &= \alpha_m \left[ \cos \alpha_m z - \frac{2\gamma_m^2 \cos \alpha_m h}{(\gamma_m^2 - \beta_m^2) \cos \beta_m h} \cos \beta_m z \right], \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\alpha_m$ ,  $\beta_m$  и  $\gamma_m$  – волновые числа, которые удовлетворяют трансцендентному уравнению

$$\Delta_A(\gamma_m) = 4\gamma_m^2 \alpha_m \beta_m \sin \beta_m h \cos \alpha_m h + (\gamma_m^2 - \beta_m^2)^2 \cos \beta_m h \sin \alpha_m h = 0, \quad (5)$$

где  $h$  – половина толщины упругого слоя.

Волновые числа  $\alpha_m$ ,  $\beta_m$  и  $\gamma_m$  имеют смысл проекций волновых векторов невзаимодействующих волн сжатия-растяжения и сдвига на аксиальную и радиальную оси цилиндрической системы координат, т.е.  $\alpha_m^2 + \gamma_m^2 = k_t^2$  и  $\beta_m^2 + \gamma_m^2 = k_s^2$ , где  $k_t^2 = \omega^2 \rho_0 / (\lambda + 2G)$  и  $k_s^2 = \omega^2 \rho_0 / G$ ;  $H_v^{(2)}(\gamma_m \rho)$  – функции Ханкеля второго рода. Выбор функций Ханкеля обусловлен принятой зависимостью от времени  $e^{i\omega t}$ . Константа  $B_n^*(\gamma_m)$  имеет смысл амплитудного множителя  $m$ -ой антисимметричной волны Лэмба и определяется в результате решения граничной задачи (1) – (2).

Корни уравнения (5), которое имеет смысл условия существования антисимметричной волны Лэмба на данной частоте  $\omega$ , т.е. волновые числа  $\gamma_m$ , полностью определяют основные кинематические характеристики нормальной волны.

Для симметричных относительно срединной плоскости пластины (символ  $S$ ) волн Лэмба имеем расчетные соотношения следующего вида:

$$\begin{aligned} u_\rho^{(Sm)}(\rho, \phi, z) &= \frac{1}{2} U_\rho^S(z, \gamma_m) \sum_{n=0}^{\infty} A_n^*(\gamma_m) \left[ H_{n-1}^{(2)}(\gamma_m \rho) - H_{n+1}^{(2)}(\gamma_m \rho) \right] \begin{pmatrix} -\sin(n\phi) \\ \cos(n\phi) \end{pmatrix}; \\ u_\phi^{(Sm)}(\rho, \phi, z) &= -\frac{1}{2} U_\rho^S(z, \gamma_m) \sum_{n=0}^{\infty} A_n^*(\gamma_m) \left[ H_{n-1}^{(2)}(\gamma_m \rho) + H_{n+1}^{(2)}(\gamma_m \rho) \right] \begin{pmatrix} \cos(n\phi) \\ \sin(n\phi) \end{pmatrix}; \\ u_z^{(Sm)}(\rho, \phi, z) &= U_z^S(z, \gamma_m) \sum_{n=0}^{\infty} A_n^*(\gamma_m) H_n^{(2)}(\gamma_m \rho) \begin{pmatrix} -\sin(n\phi) \\ \cos(n\phi) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} U_\rho^S(z, \gamma_m) &= \gamma_m \left[ \cos \alpha_m z + \frac{2\alpha_m \beta_m \sin \alpha_m h}{(\gamma_m^2 - \beta_m^2) \sin \beta_m h} \cos \beta_m z \right]; \\ U_z^S(z, \gamma_m) &= -\alpha_m \left[ \sin \alpha_m z - \frac{2\gamma_m^2 \sin \alpha_m h}{(\gamma_m^2 - \beta_m^2) \sin \beta_m h} \sin \beta_m z \right], \end{aligned} \quad (7)$$

где  $A_n^*(\gamma_m)$  – амплитудный множитель, определяемый в результате решения граничной задачи (1) – (2); волновые числа  $\alpha_m$ ,  $\beta_m$  и  $\gamma_m$  удовлетворяют трансцендентному уравнению

$$\Delta_S(\gamma_m) = (\gamma_m^2 - \beta_m^2)^2 \sin \beta_m h \cos \alpha_m h + 4\gamma_m^2 \alpha_m \beta_m \cos \beta_m h \sin \alpha_m h = 0. \quad (8)$$

Граничная задача (1) – (2) в цилиндрической системе координат  $(\rho, \phi, z)$  записывается следующим образом:

$$R[U_\rho^{(n)}(\rho, z)] + R[U_\phi^{(n)}(\rho, z)] + R[U_z^{(n)}(\rho, z)] = f_\rho^{(n)}(\rho, z)/G; \quad (9)$$

$$T[U_\rho^{(n)}(\rho, z)] + T[U_\phi^{(n)}(\rho, z)] + T[U_z^{(n)}(\rho, z)] = f_\phi^{(n)}(\rho, z)/G; \quad (10)$$

$$Z[U_\rho^{(n)}(\rho, z)] + Z[U_\phi^{(n)}(\rho, z)] + Z[U_z^{(n)}(\rho, z)] = f_z^{(n)}(\rho, z)/G; \quad (11)$$

$$\left( \frac{\partial U_\rho^{(n)}(\rho, z)}{\partial z} - \frac{\partial U_z^{(n)}(\rho, z)}{\partial \rho} \right) \Big|_{z=\pm h} = \sigma_{z\rho}^{(n)}(\rho, \pm h)/G; \quad (12)$$

$$\left( \frac{\partial U_\phi^{(n)}(\rho, z)}{\partial z} - \frac{n}{\rho} U_z^{(n)}(\rho, z) \right) \Big|_{z=\pm h} = \sigma_{z\phi}^{(n)}(\rho, \pm h)/G; \quad (13)$$

$$\left[ \frac{k_s^2}{k_\ell^2} \frac{\partial U_z^{(n)}(\rho, z)}{\partial z} + \left( \frac{k_s^2}{k_\ell^2} - 2 \right) \left( \frac{\partial U_\rho^{(n)}(\rho, z)}{\partial \rho} + \frac{U_\rho^{(n)}(\rho, z)}{\rho} + \frac{n}{\rho} U_\phi^{(n)}(\rho, z) \right) \right] \Big|_{z=\pm h} = \sigma_{zz}^{(n)}(\rho, \pm h)/G. \quad (14)$$

При записи соотношений (9) – (14) приняты следующие обозначения:

$$U_{\left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ z \end{smallmatrix} \right\}}^{(n)}(\rho, z) = \frac{1}{q\pi} \int_0^{2\pi} u_{\left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ z \end{smallmatrix} \right\}}(\rho, \phi, z) \begin{pmatrix} -\sin(n\phi) \\ \cos(n\phi) \end{pmatrix} d\phi; \quad q = \begin{cases} 2 & \text{при } n = 0; \\ 1 & \forall n \geq 1; \end{cases}$$

$$U_\phi^{(n)}(\rho, z) = \frac{1}{q\pi} \int_0^{2\pi} u_\phi(\rho, \phi, z) \begin{pmatrix} \cos(n\phi) \\ \sin(n\phi) \end{pmatrix} d\phi;$$

$$\left\{ \begin{matrix} f_{\left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ z \end{smallmatrix} \right\}}^{(n)}(\rho, z) \\ \sigma_{\left\{ \begin{smallmatrix} z\rho \\ zz \end{smallmatrix} \right\}}^{(n)}(\rho, \pm h) \end{matrix} \right\} = \frac{1}{q\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \begin{matrix} f_{\left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ z \end{smallmatrix} \right\}}^*(\rho, \phi, z) \\ \sigma_{\left\{ \begin{smallmatrix} z\rho \\ zz \end{smallmatrix} \right\}}^*(\rho, \phi, \pm h) \end{matrix} \right\} \begin{pmatrix} -\sin(n\phi) \\ \cos(n\phi) \end{pmatrix} d\phi;$$

$$\left\{ \begin{matrix} f_\phi^{(n)}(\rho, z) \\ \sigma_{z\phi}^{(n)}(\rho, \pm h) \end{matrix} \right\} = \frac{1}{q\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \begin{matrix} f_\phi^*(\rho, \phi, z) \\ \sigma_{z\phi}^*(\rho, \phi, \pm h) \end{matrix} \right\} \begin{pmatrix} \cos(n\phi) \\ \sin(n\phi) \end{pmatrix} d\phi;$$

$$R[U_\rho^{(n)}(\rho, z)] = \frac{k_s^2}{k_\ell^2} \left( \frac{\partial^2 U_\rho^{(n)}(\rho, z)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U_\rho^{(n)}(\rho, z)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} U_\rho^{(n)}(\rho, z) \right) - \frac{n^2}{\rho^2} U_\rho^{(n)}(\rho, z) + \frac{\partial^2 U_\rho^{(n)}(\rho, z)}{\partial z^2} + k_s^2 U_\rho^{(n)}(\rho, z);$$

$$R[U_\phi^{(n)}(\rho, z)] = \frac{k_s^2}{k_\ell^2} \left( -\frac{n}{\rho^2} U_\phi^{(n)}(\rho, z) + \frac{n}{\rho} \frac{\partial U_\phi^{(n)}(\rho, z)}{\partial \rho} \right) -$$

$$\begin{aligned}
& -\left(\frac{n}{\rho^2}U_\phi^{(n)}(\rho, z) + \frac{n}{\rho}\frac{\partial U_\phi^{(n)}(\rho, z)}{\partial \rho}\right); \\
R[U_z^{(n)}(\rho, z)] &= \left(\frac{k_s^2}{k_\ell^2} - 1\right)\frac{\partial^2 U_z^{(n)}(\rho, z)}{\partial \rho \partial z}; \\
T[U_\rho^{(n)}(\rho, z)] &= -\left(\frac{k_s^2}{k_\ell^2} + 1\right)\left(\frac{n}{\rho}\frac{\partial U_\rho^{(n)}(\rho, z)}{\partial \rho} + \frac{n}{\rho^2}U_\rho^{(n)}(\rho, z)\right) + \frac{2n}{\rho}\frac{\partial U_\rho^{(n)}(\rho, z)}{\partial \rho}; \\
T[U_\phi^{(n)}(\rho, z)] &= \frac{\partial^2 U_\phi^{(n)}(\rho, z)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U_\phi^{(n)}(\rho, z)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2}U_\phi^{(n)}(\rho, z) + \\
& + \frac{\partial^2 U_\phi^{(n)}(\rho, z)}{\partial z^2} - \frac{k_s^2}{k_\ell^2}\frac{n^2}{\rho^2}U_\phi^{(n)}(\rho, z) + k_s^2 U_\phi^{(n)}(\rho, z); \\
T[U_z^{(n)}(\rho, z)] &= -\left(\frac{k_s^2}{k_\ell^2} - 1\right)\frac{n}{\rho}\frac{\partial U_z^{(n)}(\rho, z)}{\partial z}; \\
Z[U_\rho^{(n)}(\rho, z)] &= \left(\frac{k_s^2}{k_\ell^2} - 1\right)\left(\frac{\partial^2 U_\rho^{(n)}(\rho, z)}{\partial \rho \partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U_\rho^{(n)}(\rho, z)}{\partial z}\right); \\
Z[U_\phi^{(n)}(\rho, z)] &= \left(\frac{k_s^2}{k_\ell^2} - 1\right)\frac{n}{\rho}\frac{\partial U_\phi^{(n)}(\rho, z)}{\partial z}; \\
Z[U_z^{(n)}(\rho, z)] &= \frac{\partial^2 U_z^{(n)}(\rho, z)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U_z^{(n)}(\rho, z)}{\partial \rho} - \frac{n^2}{\rho^2}U_z^{(n)}(\rho, z) + \\
& + \frac{k_s^2}{k_\ell^2}\frac{\partial^2 U_z^{(n)}(\rho, z)}{\partial z^2} + k_s^2 U_z^{(n)}(\rho, z).
\end{aligned}$$

Очевидно, что окружные гармоники  $U_\beta^{(n)}(\rho, z)$  ( $\beta = \rho, \phi, z$ ) компонентов вектора смещения материальных частиц упругого слоя удовлетворяют условиям физической реализуемости источника волнового поля, т.е. предельным условиям следующего вида:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \left\{ U_\beta^{(n)}(\rho, z), \frac{\partial U_\beta^{(n)}(\rho, z)}{\partial \rho}, \frac{\partial U_\beta^{(n)}(\rho, z)}{\partial z} \right\} = 0. \quad (15)$$

Условие (15) имеет вполне очевидный физический смысл – источник конечной мощности генерирует поле смещений материальных частиц и деформаций малых объемов упругого слоя, которые обращаются в нуль на бесконечности.

Условие (15) позволяет применить для решения системы уравнений (9) – (11) интегральное преобразование Ханкеля [1].

Рассмотрим вначале уравнение (11).

Применительно к этому уравнению введем прямое интегральное преобразование Ханкеля для аксиального компонента  $U_z^{(n)}(\rho, z)$  следующим соотношением:

$$U_z^{(n)}(\lambda, z) = \int_0^\infty \rho U_z^{(n)}(\rho, z) J_n(\lambda \rho) d\rho, \quad (16)$$

где  $U_z^{(n)}(\lambda, z)$  – интегральный образ  $n$ -ой окружной гармоники аксиального компонента вектора смещения материальных частиц изотропного упругого слоя;  $\lambda$  – параметр интегрального преобразования, числовое значение которого подлежит определению в ходе дальнейшего решения задачи;  $J_n(\lambda \rho)$  – функция Бесселя  $n$ -го порядка. Прямому преобразованию Ханкеля (16) соответствует обратное, которое позволяет восстановить оригинал функции  $U_z^{(n)}(\rho, z)$  по её интегральному образу  $U_z^{(n)}(\lambda, z)$ . Это преобразование имеет вид

$$U_z^{(n)}(\rho, z) = \int_0^\infty \lambda U_z^{(n)}(\lambda, z) J_n(\lambda \rho) d\lambda. \quad (17)$$

Воздействуя интегральным преобразованием (16) на фрагменты уравнения (11), получаем после применения стандартной процедуры интегрирования по частям с использованием условий (15) следующий результат:

$$Z[U_z^{(n)}(\lambda, z)] = \int_0^\infty \rho Z[U_z^{(n)}(\rho, z)] J_n(\lambda \rho) d\rho = \frac{k_s^2}{k_\ell^2} \frac{\partial^2 U_z^{(n)}(\lambda, z)}{\partial z^2} + \beta^2 U_z^{(n)}(\lambda, z); \quad (18)$$

$$\begin{aligned} Z[U_\rho^{(n)}(\lambda, z)] &= \int_0^\infty \rho Z[U_\rho^{(n)}(\rho, z)] J_n(\lambda \rho) d\rho = \\ &= -\lambda \left( \frac{k_s^2}{k_\ell^2} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty \rho U_\rho^{(n)}(\rho, z) [J_{n-1}(\lambda \rho) - J_{n+1}(\lambda \rho)] d\rho \right\}; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} Z[U_\phi^{(n)}(\lambda, z)] &= \int_0^\infty \rho Z[U_\phi^{(n)}(\rho, z)] J_n(\lambda \rho) d\rho = \\ &= \lambda \left( \frac{k_s^2}{k_\ell^2} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty \rho U_\phi^{(n)}(\rho, z) [J_{n-1}(\lambda \rho) + J_{n+1}(\lambda \rho)] d\rho \right\}, \end{aligned} \quad (20)$$

где  $\beta^2 = k_s^2 - \lambda^2$ .

Принимая во внимание конструкцию выражений (19) и (20), введем следующие обозначения:

$$U_\rho^{(n)}(\lambda, z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \rho U_\rho^{(n)}(\rho, z) [J_{n-1}(\lambda \rho) - J_{n+1}(\lambda \rho)] d\rho; \quad (21)$$

$$U_\phi^{(n)}(\lambda, z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \rho U_\phi^{(n)}(\rho, z) [J_{n-1}(\lambda \rho) + J_{n+1}(\lambda \rho)] d\rho. \quad (22)$$

Прямым интегральным преобразованиям Ханкеля (21) и (22) должны соответствовать обратные преобразования, которые записываются в следующем виде:

$$U_\rho^{(n)}(\rho, z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \lambda U_\rho^{(n)}(\lambda, z) [J_{n-1}(\lambda \rho) - J_{n+1}(\lambda \rho)] d\lambda; \quad (23)$$

$$U_\phi^{(n)}(\rho, z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \lambda U_\phi^{(n)}(\lambda, z) [J_{n-1}(\lambda \rho) + J_{n+1}(\lambda \rho)] d\lambda. \quad (24)$$

С учетом определений (21) и (22) трансформированное уравнение (11) можно записать как

$$\lambda \left( \frac{k_s^2}{k_\ell^2} - 1 \right) \frac{\partial U_0^{(n)}(\lambda, z)}{\partial z} + \frac{k_s^2}{k_\ell^2} \frac{\partial^2 U_z^{(n)}(\lambda, z)}{\partial z^2} + \beta^2 U_z^{(n)}(\lambda, z) = \frac{1}{G} f_z^{(n)}(\lambda, z), \quad (25)$$

$$\text{где } U_0^{(n)}(\lambda, z) = U_\phi^{(n)}(\lambda, z) - U_\rho^{(n)}(\lambda, z); \quad f_z^{(n)}(\lambda, z) = \int_0^\infty \rho f_z^{(n)}(\rho, z) J_n(\lambda \rho) d\rho.$$

Воздействуя на левую и правую части уравнений (9) и (10) интегральными преобразованиями Ханкеля (21) и (22) соответственно, получаем следующие результаты:

$$R[U_\rho^{(n)}(\lambda, z)] + R[U_\phi^{(n)}(\lambda, z)] + R[U_z^{(n)}(\lambda, z)] = f_\rho^{(n)}(\lambda, z)/G; \quad (26)$$

$$T[U_\rho^{(n)}(\lambda, z)] + T[U_\phi^{(n)}(\lambda, z)] + T[U_z^{(n)}(\lambda, z)] = f_\phi^{(n)}(\lambda, z)/G, \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} R[U_\rho^{(n)}(\lambda, z)] &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \rho R[U_\rho^{(n)}(\rho, z)] [J_{n-1}(\lambda \rho) - J_{n+1}(\lambda \rho)] d\rho = \\ &= -\frac{k_s^2}{k_\ell^2} \lambda^2 U_\rho^{(n)}(\lambda, z) + k_s^2 U_\rho^{(n)}(\lambda, z) + \frac{\partial^2 U_\rho^{(n)}(\lambda, z)}{\partial z^2} - \\ &\quad - \frac{n^2}{2} \int_0^\infty \frac{1}{\rho} U_\rho^{(n)}(\rho, z) [J_{n-1}(\lambda \rho) - J_{n+1}(\lambda \rho)] d\rho + \\ &\quad + \frac{k_s^2}{2k_\ell^2} \int_0^\infty \frac{1}{\rho} U_\rho^{(n)}(\rho, z) [(n^2 - 2n)J_{n-1}(\lambda \rho) - (n^2 + 2n)J_{n+1}(\lambda \rho)] d\rho; \\ R[U_\phi^{(n)}(\lambda, z)] &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \rho R[U_\phi^{(n)}(\rho, z)] [J_{n-1}(\lambda \rho) - J_{n+1}(\lambda \rho)] d\rho = \\ &= \left( \frac{k_s^2}{k_\ell^2} - 1 \right) \lambda^2 \frac{1}{2} \int_0^\infty \rho \frac{2nJ_n(\lambda \rho)}{\lambda \rho} U_\phi^{(n)}(\rho, z) d\rho - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{U_\phi^{(n)}(\rho, z)}{\rho} \left[ \left( \frac{k_s^2}{k_\ell^2} n^2 - n^2 + 2n \right) J_{n-1}(\lambda \rho) + \left( \frac{k_s^2}{k_\ell^2} n^2 - n^2 - 2n \right) J_{n+1}(\lambda \rho) \right] d\rho; \\ R[U_z^{(n)}(\lambda, z)] &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \rho R[U_z^{(n)}(\rho, z)] [J_{n-1}(\lambda \rho) - J_{n+1}(\lambda \rho)] d\rho = \\ &= \lambda \left( \frac{k_s^2}{k_\ell^2} - 1 \right) \frac{\partial U_z^{(n)}(\lambda, z)}{\partial z} - \left( \frac{k_s^2}{k_\ell^2} - 1 \right) \frac{n}{2} \int_0^\infty \frac{\partial U_z^{(n)}(\rho, z)}{\partial z} [J_{n-1}(\lambda \rho) + J_{n+1}(\lambda \rho)] d\rho; \\ T[U_\rho^{(n)}(\lambda, z)] &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \rho T[U_\rho^{(n)}(\rho, z)] [J_{n-1}(\lambda \rho) + J_{n+1}(\lambda \rho)] d\rho = \\ &= -\frac{k_s^2}{2k_\ell^2} \int_0^\infty \frac{U_\rho^{(n)}(\rho, z)}{\rho} [(2n - n^2)J_{n-1}(\lambda \rho) + (2n + n^2)J_{n+1}(\lambda \rho)] d\rho - \\ &\quad - \frac{n^2}{2} \int_0^\infty \frac{U_\rho^{(n)}(\rho, z)}{\rho} [J_{n-1}(\lambda \rho) - J_{n+1}(\lambda \rho)] d\rho; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T[U_\phi^{(n)}(\lambda, z)] &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \rho T[U_\phi^{(n)}(\rho, z)] [J_{n-1}(\lambda\rho) + J_{n+1}(\lambda\rho)] d\rho = \\
&= -\lambda^2 U_\phi^{(n)}(\lambda, z) + \frac{\partial^2 U_\phi^{(n)}(\lambda, z)}{\partial z^2} + \\
&+ k_s^2 U_\phi^{(n)}(\lambda, z) - \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{U_\phi^{(n)}(\rho, z)}{\rho} \left[ \left( \frac{k_s^2}{k_\ell^2} n^2 - n^2 + 2n \right) J_{n-1}(\lambda\rho) + \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{k_s^2}{k_\ell^2} n^2 - n^2 + 2n \right) J_{n+1}(\lambda\rho) \right] d\rho; \\
T[U_z^{(n)}(\lambda, z)] &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \rho T[U_z^{(n)}(\rho, z)] [J_{n-1}(\lambda\rho) + J_{n+1}(\lambda\rho)] d\rho = \\
&= - \left( \frac{k_s^2}{k_\ell^2} - 1 \right) \frac{n}{2} \int_0^\infty \frac{\partial U_z^{(n)}(\rho, z)}{\partial z} [J_{n-1}(\lambda\rho) + J_{n+1}(\lambda\rho)] d\rho; \\
f_\rho^{(n)}(\lambda, z) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \rho f_\rho^{(n)}(\lambda, z) [J_{n-1}(\lambda\rho) - J_{n+1}(\lambda\rho)] d\rho; \\
f_\phi^{(n)}(\lambda, z) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \rho f_\phi^{(n)}(\lambda, z) [J_{n-1}(\lambda\rho) + J_{n+1}(\lambda\rho)] d\rho.
\end{aligned}$$

Почленно вычитая из уравнения (27) элементы уравнения (26), получаем следующую конструкцию:

$$\alpha^2 \frac{k_s^2}{k_\ell^2} U_0^{(n)}(\lambda, z) + \frac{\partial^2 U_0^{(n)}(\lambda, z)}{\partial z^2} - \lambda \left( \frac{k_s^2}{k_\ell^2} - 1 \right) \frac{\partial U_z^{(n)}(\lambda, z)}{\partial z} = \frac{1}{G} f_0^{(n)}(\lambda, z), \quad (28)$$

где

$$\alpha^2 = k_\ell^2 - \lambda^2; \quad U_0^{(n)}(\lambda, z) = U_\phi^{(n)}(\lambda, z) - U_\rho^{(n)}(\lambda, z); \quad f_0^{(n)}(\lambda, z) = f_\phi^{(n)}(\lambda, z) - f_\rho^{(n)}(\lambda, z).$$

Построим общее решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (25), (28) для случая, когда  $f_z^{(n)}(\lambda, z) = 0$  и  $f_0^{(n)}(\lambda, z) = 0$ . Следуя стандартной технологии [4] решения обыкновенных дифференциальных уравнений, введем следующие обозначения:

$$y_1(z) = U_0^{(n)}(\lambda, z); \quad y_2(z) = \frac{\partial U_0^{(n)}(\lambda, z)}{\partial z}; \quad y_3(z) = U_z^{(n)}(\lambda, z); \quad y_4(z) = \frac{\partial U_z^{(n)}(\lambda, z)}{\partial z}. \quad (29)$$

При этом системе однородных дифференциальных уравнений (25), (28) будет соответствовать следующая система линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
y_1'(z) &= y_2(z); \quad y_2'(z) = -\alpha^2 \frac{k_s^2}{k_\ell^2} y_1(z) + \lambda \left( \frac{k_s^2}{k_\ell^2} - 1 \right) y_4(z); \\
y_3'(z) &= y_4(z); \quad y_4'(z) = -\lambda \left( 1 - \frac{k_\ell^2}{k_s^2} \right) y_2(z) - \beta^2 \frac{k_\ell^2}{k_s^2} y_3(z), \quad (30)
\end{aligned}$$

где штрих означает производную по переменной  $z$ .

Характеристическое уравнение системы уравнений (30) записывается следующим образом:

$$\begin{vmatrix} -r & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha^2 \frac{k_s^2}{k_\ell^2} & -r & 0 & \lambda \left( \frac{k_s^2}{k_\ell^2} - 1 \right) \\ 0 & 0 & -r & 1 \\ 0 & -\lambda \left( 1 - \frac{k_\ell^2}{k_s^2} \right) & -\beta^2 \frac{k_s^2}{k_\ell^2} & -r \end{vmatrix} = 0. \quad (31)$$

Раскрывая определитель в левой части уравнения (31), получаем следующее уравнение:

$$r^4 + r^2(\alpha^2 + \beta^2) + \alpha^2\beta^2 = 0,$$

которое имеет четыре простых корня  $r_{1,2} = \pm i\alpha$  и  $r_{3,4} = \pm i\beta$ . Каждому простому корню  $r_k$  соответствует система частных решений

$$y_1^{(k)}(z) = A_1^{(k)} e^{r_k z}; \quad y_2^{(k)}(z) = A_2^{(k)} e^{r_k z}; \quad y_3^{(k)}(z) = A_3^{(k)} e^{r_k z}; \quad y_4^{(k)}(z) = A_4^{(k)} e^{r_k z}. \quad (32)$$

Коэффициенты  $A_j^{(k)}$  ( $j=1, 2, 3, 4$ ) определяются из системы однородных алгебраических уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} -r_k A_1^{(k)} + A_2^{(k)} &= 0; & -\alpha^2 \frac{k_s^2}{k_\ell^2} A_1^{(k)} - r_k A_2^{(k)} + \lambda \left( \frac{k_s^2}{k_\ell^2} - 1 \right) A_4^{(k)} &= 0; \\ -r_k A_3^{(k)} + A_4^{(k)} &= 0; & -\lambda \left( 1 - \frac{k_\ell^2}{k_s^2} \right) A_2^{(k)} - \beta^2 \frac{k_\ell^2}{k_s^2} A_3^{(k)} - r_k A_4^{(k)} &= 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Очевидно, что система уравнений (33) может быть решена только лишь с точностью до постоянного множителя. Отбросим одно, например, первое уравнение, из системы уравнений (33). Оставшиеся три уравнения перепишем в следующем виде

$$\begin{aligned} -r_k A_2^{(k)} + \lambda \left( \frac{k_s^2}{k_\ell^2} - 1 \right) A_4^{(k)} &= \alpha^2 \frac{k_s^2}{k_\ell^2} A_1^{(k)}; & -r_k A_3^{(k)} + A_4^{(k)} &= 0; \\ -\lambda \left( 1 - \frac{k_\ell^2}{k_s^2} \right) A_2^{(k)} - \beta^2 \frac{k_\ell^2}{k_s^2} A_3^{(k)} - r_k A_4^{(k)} &= 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Несложно убедиться в том, что решения неоднородной системы алгебраических уравнений (34), т.е. коэффициенты  $A_2^{(k)}$ ,  $A_3^{(k)}$  и  $A_4^{(k)}$ , определяются следующими расчетными формулами:

$$\begin{aligned} A_2^{(k)} &= -A_1^{(k)} \frac{\alpha^2 k_s^2 (r_k^2 k_s^2 + \beta^2 k_\ell^2)}{r_k (r_k^2 k_s^2 k_\ell^2 + k_s^2 k_\ell^4 + \lambda^2 k_s^4 - 2\lambda^2 k_s^2 k_\ell^2)}; \\ A_3^{(k)} &= A_1^{(k)} \frac{\alpha^2 k_s^2 \lambda (k_s^2 - k_\ell^2)}{r_k (r_k^2 k_s^2 k_\ell^2 + k_s^2 k_\ell^4 + \lambda^2 k_s^4 - 2\lambda^2 k_s^2 k_\ell^2)}; \\ A_4^{(k)} &= A_1^{(k)} \frac{\alpha^2 k_s^2 \lambda (k_s^2 - k_\ell^2)}{(r_k^2 k_s^2 k_\ell^2 + k_s^2 k_\ell^4 + \lambda^2 k_s^4 - 2\lambda^2 k_s^2 k_\ell^2)}. \end{aligned} \quad (35)$$

Подстановка константы  $A_2^{(k)}$  в отброшенное первое уравнение системы уравнений

(33) дает следующий результат:

$$-A_1^{(k)} \frac{k_s^2 k_\ell^2 [r_k^4 + r_k^2 (\alpha^2 + \beta^2) + \alpha^2 \beta^2]}{r_k (r_k^2 k_s^2 k_\ell^2 + k_s^2 k_\ell^4 + \lambda^2 k_s^4 - 2\lambda^2 k_s^2 k_\ell^2)} = 0. \quad (36)$$

Так как  $r_k^4 + r_k^2 (\alpha^2 + \beta^2) + \alpha^2 \beta^2 \equiv 0$ , то равенство (36) выполняется при любых конечных значениях константы  $A_1^{(k)}$ .

Для последующих вычислений необходимо выписать общие решения системы линейных уравнений для функций  $y_1(z) = U_0^{(n)}(\lambda, z)$  и  $y_3(z) = U_z^{(n)}(\lambda, z)$ . Так как общее решение для функции  $y_j(z)$  является суперпозицией частных решений  $y_j^{(k)}(z)$ , то

$$U_0^{(n)}(\lambda, z) = A_1^{(1)} e^{iaz} + A_1^{(2)} e^{-iaz} + A_1^{(3)} e^{i\beta z} + A_1^{(4)} e^{-i\beta z}. \quad (37)$$

Соответствующие величинам  $A_1^{(k)}$  коэффициенты  $A_3^{(k)}$  определяются второй расчетной формулой (35), и для конкретных значений корней характеристического уравнения (31) принимают следующие значения:

$$A_3^{(1)} = -i \frac{\alpha}{\lambda} A_1^{(1)}; \quad A_3^{(2)} = i \frac{\alpha}{\lambda} A_1^{(2)}; \quad A_3^{(3)} = i \frac{\lambda}{\beta} A_1^{(3)}; \quad A_3^{(4)} = -i \frac{\lambda}{\beta} A_1^{(4)}.$$

При этом

$$U_z^{(n)}(\lambda, z) = -i \frac{\alpha}{\lambda} A_1^{(1)} e^{iaz} + i \frac{\alpha}{\lambda} A_1^{(2)} e^{-iaz} + i \frac{\lambda}{\beta} A_1^{(3)} e^{i\beta z} - i \frac{\lambda}{\beta} A_1^{(4)} e^{-i\beta z}. \quad (38)$$

Поскольку амплитудные множители  $A_n^*(\gamma_m)$  и  $B_n^*(\gamma_m)$  должны иметь размерность метр в квадрате [см. выражения (3), (4) и (6), (7)], постольку введем следующие обозначения:

$$A = \frac{i}{\lambda} [A_1^{(1)} - A_1^{(2)}]; \quad B = \frac{1}{\lambda} [A_1^{(1)} + A_1^{(2)}]; \quad C = \frac{i}{\beta} [A_1^{(3)} - A_1^{(4)}]; \quad D = \frac{1}{\beta} [A_1^{(3)} + A_1^{(4)}].$$

При этом выражения (37) и (38) принимают следующий вид:

$$U_0^{(n)}(\lambda, z) = \lambda A \sin \alpha z + \lambda B \cos \alpha z + \beta C \sin \beta z + \beta D \cos \beta z; \quad (39)$$

$$U_z^{(n)}(\lambda, z) = -\alpha A \cos \alpha z + \alpha B \sin \alpha z + \lambda C \cos \beta z - \lambda D \sin \beta z. \quad (40)$$

Принимая во внимание конструкцию выражений (39) и (40), общие решения неоднородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (25), (28) будем отыскивать в виде следующей суперпозиции решений:

$$U_0^{(n)}(\lambda, z) = \lambda [A + A(z)] \sin \alpha z + \lambda [B + B(z)] \cos \alpha z + \beta [C + C(z)] \sin \beta z + \beta [D + D(z)] \cos \beta z; \quad (41)$$

$$U_z^{(n)}(\lambda, z) = -\alpha [A + A(z)] \cos \alpha z + \alpha [B + B(z)] \sin \alpha z + \lambda [C + C(z)] \cos \beta z - \lambda [D + D(z)] \sin \beta z, \quad (42)$$

где  $A(z)$ ,  $B(z)$ ,  $C(z)$  и  $D(z)$  – варьируемые константы, которые формируют частное решение неоднородной системы уравнений (25), (28). Потребуем, чтобы эти константы обеспечивали минимальное количество вычислений в ходе решения системы

уравнений (25), (28). Для этого варьируемые константы должны удовлетворять следующим условиям:

$$\lambda A'(z) \sin \alpha z + \lambda B'(z) \cos \alpha z + \beta C'(z) \sin \beta z + \beta D'(z) \cos \beta z = 0; \quad (43)$$

$$-\alpha A'(z) \cos \alpha z + \alpha B'(z) \sin \alpha z + \lambda C'(z) \cos \beta z - \lambda D'(z) \sin \beta z = 0. \quad (44)$$

Определив, с учетом выполнения условий (43) и (44) первую и вторую производные функций  $U_z^{(n)}(\lambda, z)$  и  $U_0^{(n)}(\lambda, z)$ , после подстановки результатов вычислений и предполагаемого вида общих решений (41) и (42) в уравнения (25) и (28), получаем следующие результаты:

$$\lambda \alpha A'(z) \cos \alpha z - \lambda \alpha B'(z) \sin \alpha z + \beta^2 C'(z) \cos \beta z - \beta^2 D'(z) \sin \beta z = \frac{f_0^{(n)}(\lambda, z)}{G}; \quad (45)$$

$$\begin{aligned} & \alpha^2 \frac{k_s^2}{k_l^2} A'(z) \sin \alpha z + \alpha^2 \frac{k_s^2}{k_l^2} B'(z) \cos \alpha z - \\ & - \lambda \beta \alpha^2 \frac{k_s^2}{k_l^2} C'(z) \sin \beta z - \lambda \beta \alpha^2 \frac{k_s^2}{k_l^2} D'(z) \cos \beta z = \frac{f_z^{(n)}(\lambda, z)}{G}. \end{aligned} \quad (46)$$

Условия (43), (44) и соотношения (45), (46) образуют неоднородную систему алгебраических уравнений, из которой единственным образом определяются производные варьируемых констант. Интегрируя полученные решения для производных варьируемых констант, получаем следующие расчетные формулы:

$$\begin{aligned} A(z) &= \frac{1}{\omega^2 \rho_0} \int_{-h}^z \left[ -f_0^{(n)}(\lambda, \xi) \frac{\lambda}{\alpha} \cos \alpha \xi - f_z^{(n)}(\lambda, \xi) \sin \alpha \xi \right] d\xi; \\ B(z) &= \frac{1}{\omega^2 \rho_0} \int_{-h}^z \left[ f_0^{(n)}(\lambda, \xi) \frac{\lambda}{\alpha} \sin \alpha \xi - f_z^{(n)}(\lambda, \xi) \cos \alpha \xi \right] d\xi; \\ C(z) &= \frac{1}{\omega^2 \rho_0} \int_{-h}^z \left[ -f_0^{(n)}(\lambda, \xi) \cos \beta \xi + f_z^{(n)}(\lambda, \xi) \frac{\lambda}{\beta} \sin \beta \xi \right] d\xi; \\ D(z) &= \frac{1}{\omega^2 \rho_0} \int_{-h}^z \left[ f_0^{(n)}(\lambda, \xi) \sin \beta \xi + f_z^{(n)}(\lambda, \xi) \frac{\lambda}{\beta} \cos \beta \xi \right] d\xi. \end{aligned} \quad (47)$$

Константы  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  определяются из граничных условий (12) – (14).

Воздействуем на левую и правую части условия (12) интегральным преобразованием (21). После применения процедуры интегрирования по частям получаем следующий результат:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial U_\rho^{(n)}(\lambda, z)}{\partial z} + \lambda U_z^{(n)}(\lambda, z) - \frac{n}{2} \int_0^\infty U_z^{(n)}(\rho, z) [J_{n-1}(\lambda \rho) + J_{n+1}(\lambda \rho)] d\rho \right]_{z=\pm h} = \\ & = \frac{\sigma_{z\rho}^{(n)}(\lambda, \pm h)}{G}, \end{aligned} \quad (48)$$

где

$$\sigma_{z\rho}^{(n)}(\lambda, \pm h) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \rho \sigma_{z\rho}^{(n)}(\rho, \pm h) [J_{n-1}(\lambda \rho) - J_{n+1}(\lambda \rho)] d\rho. \quad (49)$$

Левую и правую части граничного условия (13) подвергнем интегральному преобразованию (22):

$$\left[ \frac{\partial U_\phi^{(n)}(\lambda, z)}{\partial z} - \frac{n}{2} \int_0^\infty U_z^{(n)}(\rho, z) [J_{n-1}(\lambda \rho) + J_{n+1}(\lambda \rho)] d\rho \right]_{z=\pm h} = \frac{\sigma_{z\phi}^{(n)}(\lambda, \pm h)}{G}, \quad (50)$$

где

$$\sigma_{z\phi}^{(n)}(\lambda, \pm h) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \rho \sigma_{z\phi}^{(n)}(\rho, \pm h) [J_{n-1}(\lambda \rho) + J_{n+1}(\lambda \rho)] d\rho. \quad (51)$$

Поэлементно вычитая из соотношения (50) выражение (48), получаем следующую конструкцию:

$$\left[ \frac{\partial U_0^{(n)}(\lambda, z)}{\partial z} - \lambda U_z^{(n)}(\lambda, z) \right]_{z=\pm h} = \frac{\sigma_0^{(n)}(\lambda, \pm h)}{G}, \quad (52)$$

где правая часть  $\sigma_0^{(n)}(\lambda, \pm h) = \sigma_{z\phi}^{(n)}(\lambda, \pm h) - \sigma_{z\rho}^{(n)}(\lambda, \pm h)$ .

Правую и левую части граничного условия (14) трансформируем с помощью интегрального преобразования (16). После выполнения необходимых вычислений получаем следующий результат:

$$\left[ \frac{k_s^2}{k_t^2} \frac{\partial U_z^{(n)}(\lambda, z)}{\partial z} + \lambda \left( \frac{k_s^2}{k_t^2} - 2 \right) U_0^{(n)}(\lambda, z) \right]_{z=\pm h} = \frac{\sigma_{zz}^{(n)}(\lambda, \pm h)}{G}, \quad (53)$$

где по-прежнему  $U_0^{(n)}(\lambda, z) = U_\phi^{(n)}(\lambda, z) - U_\rho^{(n)}(\lambda, z)$ , а правая часть

$$\sigma_{zz}^{(n)}(\lambda, \pm h) = \int_0^\infty \rho \sigma_{zz}^{(n)}(\rho, \pm h) J_n(\lambda \rho) d\rho. \quad (54)$$

Подставляя определения (41) и (42) в трансформированные граничные условия (52) и (53), получаем для фиксированных значений аксиальной координаты  $z = \pm h$  следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & -(\lambda^2 - \beta^2) A \sin \alpha h - (\lambda^2 - \beta^2) B \cos \alpha h - 2\lambda\beta C \sin \beta h - 2\lambda\beta D \cos \beta h = \\ & = \frac{\sigma_{zz}^{(n)}(\lambda, h)}{G} - \Xi_z(h); \\ & 2\lambda\alpha A \cos \alpha h - 2\lambda\alpha B \sin \alpha h - (\lambda^2 - \beta^2) C \cos \beta h + (\lambda^2 - \beta^2) D \sin \beta h = \\ & = \frac{\sigma_0^{(n)}(\lambda, h)}{G} - \Xi_0(h); \\ & (\lambda^2 - \beta^2) A \sin \alpha h - (\lambda^2 - \beta^2) B \cos \alpha h + 2\lambda\beta C \sin \beta h - 2\lambda\beta D \cos \beta h = \\ & = \frac{\sigma_{zz}^{(n)}(\lambda, -h)}{G}; \\ & 2\lambda\alpha A \cos \alpha h + 2\lambda\alpha B \sin \alpha h - (\lambda^2 - \beta^2) C \cos \beta h - (\lambda^2 - \beta^2) D \sin \beta h = \\ & = \frac{\sigma_0^{(n)}(\lambda, -h)}{G}, \end{aligned} \quad (55)$$

где

$$\begin{aligned} \Xi_z(h) = & -(\lambda^2 - \beta^2) A(h) \sin \alpha h - (\lambda^2 - \beta^2) B(h) \cos \alpha h - 2\lambda\beta C(h) \sin \beta h - \\ & - 2\lambda\beta D(h) \cos \beta h; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Xi_0(h) &= 2\lambda\alpha A(h)\cos\alpha h - 2\lambda\alpha B(h)\sin\alpha h - (\lambda^2 - \beta^2)C(h)\cos\beta h + \\ &+ (\lambda^2 - \beta^2)D(h)\sin\beta h.\end{aligned}$$

Главный определитель системы уравнений (55) имеет следующий вид:

$$\Delta_0 = -4F_{AS}(\omega, \lambda)F_{SS}(\omega, \lambda), \quad (56)$$

где

$$F_{AS}(\omega, \lambda) = (\lambda^2 - \beta^2)^2 \sin\alpha h \cos\beta h + 4\lambda^2\alpha\beta \cos\alpha h \sin\beta h;$$

$$F_{SS}(\omega, \lambda) = (\lambda^2 - \beta^2)^2 \cos\alpha h \sin\beta h + 4\lambda^2\alpha\beta \sin\alpha h \cos\beta h$$

– аналитические конструкции весьма похожие на условия существования антисимметричных (*AS*) и симметричных (*SS*) относительно срединной плоскости упругого слоя радиально распространяющихся волн Лэмба [см. выражения (5) и (8)].

Определив алгебраические дополнения при искомым константах, получаем следующие результаты:

$$\begin{aligned}A &= -\frac{1}{2F_{AS}(\omega, \lambda)} \left\{ \frac{1}{G} \left[ \sigma_{zz}^{(n)}(\lambda, h) - \sigma_{zz}^{(n)}(\lambda, -h) \right] (\lambda^2 - \beta^2) \cos\beta h - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{G} \left[ \sigma_0^{(n)}(\lambda, h) + \sigma_0^{(n)}(\lambda, -h) \right] 2\lambda\beta \sin\beta h + \Xi_A \right\}; \\ B &= -\frac{1}{2F_{SS}(\omega, \lambda)} \left\{ \frac{1}{G} \left[ \sigma_{zz}^{(n)}(\lambda, h) + \sigma_{zz}^{(n)}(\lambda, -h) \right] (\lambda^2 - \beta^2) \sin\beta h + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{G} \left[ \sigma_0^{(n)}(\lambda, h) - \sigma_0^{(n)}(\lambda, -h) \right] 2\lambda\beta \cos\beta h + \Xi_B \right\}; \\ C &= -\frac{1}{2F_{AS}(\omega, \lambda)} \left\{ \frac{1}{G} \left[ \sigma_{zz}^{(n)}(\lambda, h) - \sigma_{zz}^{(n)}(\lambda, -h) \right] 2\lambda\alpha \cos\alpha h + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{G} \left[ \sigma_0^{(n)}(\lambda, h) + \sigma_0^{(n)}(\lambda, -h) \right] (\lambda^2 - \beta^2) \sin\alpha h + \Xi_C \right\}; \\ D &= -\frac{1}{2F_{SS}(\omega, \lambda)} \left\{ \frac{1}{G} \left[ \sigma_{zz}^{(n)}(\lambda, h) + \sigma_{zz}^{(n)}(\lambda, -h) \right] 2\lambda\alpha \sin\alpha h - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{G} \left[ \sigma_0^{(n)}(\lambda, h) - \sigma_0^{(n)}(\lambda, -h) \right] (\lambda^2 - \beta^2) \cos\alpha h + \Xi_D \right\}, \quad (57)\end{aligned}$$

где

$$\Xi_A = -\Xi_z(h)(\lambda^2 - \beta^2) \cos\beta h + \Xi_0(h) 2\lambda\beta \sin\beta h;$$

$$\Xi_B = -\Xi_z(h)(\lambda^2 - \beta^2) \sin\beta h - \Xi_0(h) 2\lambda\beta \cos\beta h;$$

$$\Xi_C = -\Xi_z(h) 2\lambda\alpha \cos\alpha h - \Xi_0(h) (\lambda^2 - \beta^2) \sin\alpha h;$$

$$\Xi_D = -\Xi_z(h) 2\lambda\alpha \sin\alpha h + \Xi_0(h) (\lambda^2 - \beta^2) \cos\alpha h.$$

После определения констант  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  и варьируемых констант  $A(z)$ ,  $B(z)$ ,  $C(z)$  и  $D(z)$  можно записать выражения для интегральных образов  $U_z^{(n)}(\lambda, z)$  и  $U_0^{(n)}(\lambda, z)$  в следующем виде:

$$U_z^{(n)}(\lambda, z) = R_z^{(n)}(\lambda, z) + \frac{AS_z^{(n)}(\lambda, z)}{F_{AS}(\omega, \lambda)} + \frac{SS_z^{(n)}(\lambda, z)}{F_{SS}(\omega, \lambda)}; \quad (58)$$

$$U_0^{(n)}(\lambda, z) = R_0^{(n)}(\lambda, z) + \frac{AS_0^{(n)}(\lambda, z)}{F_{AS}(\omega, \lambda)} + \frac{SS_0^{(n)}(\lambda, z)}{F_{SS}(\omega, \lambda)}, \quad (59)$$

где  $R_z^{(n)}(\lambda, z)$  и  $R_0^{(n)}(\lambda, z)$  – регулярные части общего решения неоднородной граничной задачи в терминах интегральных образов. При этом

$$\begin{aligned} R_z^{(n)}(\lambda, z) &= -\alpha[A(z) - A(h)/2] \cos \alpha z + \alpha[B(z) - B(h)/2] \sin \alpha z + \\ &+ \lambda[C(z) - C(h)/2] \cos \beta z - \lambda[D(z) - D(h)/2] \sin \beta z; \\ R_0^{(n)}(\lambda, z) &= \lambda[A(z) - A(h)/2] \sin \alpha z + \lambda[B(z) - B(h)/2] \cos \alpha z + \\ &+ \beta[C(z) - C(h)/2] \sin \beta z + \beta[D(z) - D(h)/2] \cos \beta z. \end{aligned}$$

Несмотря на то, что функции  $A(z)$  и  $A(h)$  имеют особенности при  $\alpha = 0$  [см. выражения (47)], а функции  $D(z)$  и  $D(h)$  неограниченно возрастают при  $\beta \rightarrow 0$ , можно утверждать, что функции  $R_z^{(n)}(\lambda, z)$  и  $R_0^{(n)}(\lambda, z)$  являются ограниченными и дифференцируемыми при любых вещественных значениях параметра интегрального преобразования  $\lambda$ . Говоря иными словами, функции  $R_z^{(n)}(\lambda, z)$  и  $R_0^{(n)}(\lambda, z)$  являются аналитическими на действительной оси  $\text{Re } \lambda$  комплексной плоскости числовых значений параметра интегрального преобразования Ханкеля. Символами  $AS_z^{(n)}(\lambda, z)$ ,  $SS_z^{(n)}(\lambda, z)$ ,  $AS_0^{(n)}(\lambda, z)$  и  $SS_0^{(n)}(\lambda, z)$  в соотношениях (58) и (59) обозначены следующие выражения:

$$\begin{aligned} AS_z^{(n)}(\lambda, z) &= -\frac{1}{2} \left\{ -\alpha \left[ S_A^{(n)}(\lambda, \pm h) + b_A B(h) + d_A D(h) \right] \cos \alpha z + \right. \\ &\quad \left. + \lambda \left[ S_C^{(n)}(\lambda, \pm h) + b_C B(h) + d_C D(h) \right] \cos \beta z \right\}; \\ SS_z^{(n)}(\lambda, z) &= -\frac{1}{2} \left\{ \alpha \left[ S_B^{(n)}(\lambda, \pm h) + a_B A(h) + c_B C(h) \right] \sin \alpha z - \right. \\ &\quad \left. - \lambda \left[ S_D^{(n)}(\lambda, \pm h) + a_D A(h) + c_D C(h) \right] \sin \beta z \right\}; \\ AS_0^{(n)}(\lambda, z) &= -\frac{1}{2} \left\{ \lambda \left[ S_A^{(n)}(\lambda, \pm h) + b_A B(h) + d_A D(h) \right] \sin \alpha z + \right. \\ &\quad \left. + \beta \left[ S_C^{(n)}(\lambda, \pm h) + b_C B(h) + d_C D(h) \right] \sin \beta z \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
SS_0^{(n)}(\lambda, z) = & -\frac{1}{2} \left\{ \lambda \left[ S_B^{(n)}(\lambda, \pm h) + a_B A(h) + c_B C(h) \right] \cos \alpha z + \right. \\
& \left. + \beta \left[ S_D^{(n)}(\lambda, \pm h) + a_D A(h) + c_D C(h) \right] \cos \beta z \right\}, \quad (60)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
S_A^{(n)}(\lambda, \pm h) = & (1/G) \left\{ \left[ \sigma_{zz}^{(n)}(\lambda, h) - \sigma_{zz}^{(n)}(\lambda, -h) \right] (\lambda^2 - \beta^2) \cos \beta h - \right. \\
& \left. - \left[ \sigma_0^{(n)}(\lambda, h) + \sigma_0^{(n)}(\lambda, -h) \right] 2\lambda \beta \sin \beta h \right\};
\end{aligned}$$

$$b_A = (\lambda^2 - \beta^2)^2 \cos \alpha h \cos \beta h - 4\lambda^2 \alpha \beta \sin \alpha h \sin \beta h; \quad d_A = 2\lambda \beta (\lambda^2 - \beta^2);$$

$$\begin{aligned}
S_B^{(n)}(\lambda, \pm h) = & (1/G) \left\{ \left[ \sigma_{zz}^{(n)}(\lambda, h) + \sigma_{zz}^{(n)}(\lambda, -h) \right] (\lambda^2 - \beta^2) \sin \beta h - \right. \\
& \left. - \left[ \sigma_0^{(n)}(\lambda, h) - \sigma_0^{(n)}(\lambda, -h) \right] 2\lambda \beta \cos \beta h \right\};
\end{aligned}$$

$$a_B = (\lambda^2 - \beta^2)^2 \sin \alpha h \sin \beta h - 4\lambda^2 \alpha \beta \cos \alpha h \cos \beta h; \quad c_B = 2\lambda \beta (\lambda^2 - \beta^2);$$

$$\begin{aligned}
S_C^{(n)}(\lambda, \pm h) = & (1/G) \left\{ \left[ \sigma_{zz}^{(n)}(\lambda, h) - \sigma_{zz}^{(n)}(\lambda, -h) \right] 2\lambda \alpha \cos \alpha h + \right. \\
& \left. + \left[ \sigma_0^{(n)}(\lambda, h) + \sigma_0^{(n)}(\lambda, -h) \right] (\lambda^2 - \beta^2) \sin \alpha h \right\};
\end{aligned}$$

$$b_C = 2\lambda \alpha (\lambda^2 - \beta^2), \quad d_C = 4\lambda^2 \alpha \beta \cos \alpha h \cos \beta h - (\lambda^2 - \beta^2)^2 \sin \alpha h \sin \beta h;$$

$$\begin{aligned}
S_D^{(n)}(\lambda, \pm h) = & (1/G) \left\{ \left[ \sigma_{zz}^{(n)}(\lambda, h) + \sigma_{zz}^{(n)}(\lambda, -h) \right] 2\lambda \alpha \sin \alpha h - \right. \\
& \left. - \left[ \sigma_0^{(n)}(\lambda, h) - \sigma_0^{(n)}(\lambda, -h) \right] (\lambda^2 - \beta^2) \cos \alpha h \right\};
\end{aligned}$$

$$a_D = 2\lambda \alpha (\lambda^2 - \beta^2), \quad c_D = 4\lambda^2 \alpha \beta \sin \alpha h \sin \beta h - (\lambda^2 - \beta^2)^2 \cos \alpha h \cos \beta h.$$

При выполнении обратного преобразования Ханкеля представляется целесообразным аналитически продолжить интегралы (17), (23) и (24) на всю вещественную ось параметра интегрального преобразования  $\lambda$ . Несложно показать, что  $f_0^{(n)}(-\lambda, z) = e^{(n-1)\pi i} f_0^{(n)}(\lambda, z)$  и  $f_z^{(n)}(-\lambda, z) = e^{n\pi i} f_z^{(n)}(\lambda, z)$ . Переобозначим варьируемые константы следующим образом:  $A(z) = A(\lambda, z)$ ,  $B(z) = B(\lambda, z)$ ,  $C(z) = C(\lambda, z)$  и  $D(z) = D(\lambda, z)$ . На основании соотношений для интегральных образов объемных плотностей внешних сил можно показать, что  $A(-\lambda, z) = e^{n\pi i} A(\lambda, z)$ ,  $B(-\lambda, z) = e^{n\pi i} B(\lambda, z)$ ,  $C(-\lambda, z) = e^{(n-1)\pi i} C(\lambda, z)$  и  $D(-\lambda, z) = e^{(n-1)\pi i} D(\lambda, z)$ . Поскольку  $S_A^{(n)}(-\lambda, \pm h) = e^{n\pi i} S_A^{(n)}(\lambda, \pm h)$ , а  $b_A(-\lambda)B(-\lambda, h) = e^{n\pi i} b_A B(h)$  и  $d_A(-\lambda)D(-\lambda, h) = e^{n\pi i} d_A D(h)$ , постольку константа  $A \equiv A(\lambda)$  на левой полуоси вещественных значений параметра  $\lambda$  принимает значения  $A(-\lambda) = e^{n\pi i} A(\lambda)$ . Проводя аналогичные рассуждения, можно показать, что

$B(-\lambda) = e^{n\pi i} B(\lambda)$ ,  $C(-\lambda) = e^{(n-1)\pi i} C(\lambda)$  и  $D(-\lambda) = e^{(n-1)\pi i} D(\lambda)$ . Совокупность определенных выше значений позволяет утверждать, что аналитические продолжения интегральных образов компонентов вектора смещения  $U_z^{(n)}(-\lambda, z) = e^{n\pi i} U_z^{(n)}(\lambda, z)$  и  $U_0^{(n)}(-\lambda, z) = e^{(n-1)\pi i} U_0^{(n)}(\lambda, z)$ . Так как  $U_0^{(n)}(\lambda, z) = 2U_\phi^{(n)}(\lambda, z) = -2U_\rho^{(n)}(\lambda, z)$ , то можно утверждать, что подынтегральные выражения в интегралах (17), (23) и (24) являются четными функциями параметра  $\lambda$ , т.е.

$$\begin{aligned} -\lambda U_z^{(n)}(-\lambda, z) J_n(-\lambda \rho) d(-\lambda) &= \lambda e^{n\pi i} U_z^{(n)}(\lambda, z) e^{n\pi i} J_n(\lambda \rho) d\lambda = \lambda U_z^{(n)}(\lambda, z) J_n(\lambda \rho) d\lambda; \\ -\lambda U_\phi^{(n)}(-\lambda, z) [J_{n-1}(-\lambda \rho) + J_{n+1}(-\lambda \rho)] d(-\lambda) &= \\ &= \frac{1}{2} \lambda U_0^{(n)}(-\lambda, z) e^{(n-1)\pi i} [J_{n-1}(\lambda \rho) + e^{2\pi i} J_{n+1}(\lambda \rho)] d\lambda = \\ &= \frac{1}{2} \lambda e^{(n-1)\pi i} U_0^{(n)}(\lambda, z) e^{(n-1)\pi i} [J_{n-1}(\lambda \rho) + J_{n+1}(\lambda \rho)] d\lambda = \\ &= \frac{1}{2} \lambda U_0^{(n)}(\lambda, z) [J_{n-1}(\lambda \rho) + J_{n+1}(\lambda \rho)] d\lambda. \end{aligned}$$

Из последних соотношений следует, что

$$\begin{aligned} U_\rho^{(n)}(\rho, z) &= -\frac{1}{2} \int_0^\infty \lambda U_0^{(n)}(\lambda, z) [J_{n-1}(\lambda \rho) - J_{n+1}(\lambda \rho)] d\lambda = \\ &= -\frac{1}{4} \int_{-\infty}^\infty \lambda U_0^{(n)}(\lambda, z) [J_{n-1}(\lambda \rho) - J_{n+1}(\lambda \rho)] d\lambda; \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} U_\phi^{(n)}(\rho, z) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \lambda U_0^{(n)}(\lambda, z) [J_{n-1}(\lambda \rho) + J_{n+1}(\lambda \rho)] d\lambda = \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^\infty \lambda U_0^{(n)}(\lambda, z) [J_{n-1}(\lambda \rho) + J_{n+1}(\lambda \rho)] d\lambda; \end{aligned} \quad (62)$$

$$U_z^{(n)}(\rho, z) = \int_0^\infty \lambda U_z^{(n)}(\lambda, z) J_n(\lambda \rho) d\lambda = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \lambda U_z^{(n)}(\lambda, z) J_n(\lambda \rho) d\lambda. \quad (63)$$

Рассмотрим преобразование (63).

Так как функция Бесселя является линейной комбинацией функций Ханкеля первого и второго рода, то интеграл (63) можно переписать в следующем виде

$$\begin{aligned} U_z^{(n)}(\rho, z) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \lambda U_z^{(n)}(\lambda, z) J_n(\lambda \rho) d\lambda = \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^\infty \lambda U_z^{(n)}(\lambda, z) [H_n^{(1)}(\lambda \rho) + H_n^{(2)}(\lambda \rho)] d\lambda, \end{aligned} \quad (64)$$

где  $H_n^{(1)}(\lambda \rho)$  и  $H_n^{(2)}(\lambda \rho)$  – функции Ханкеля первого и второго рода порядка  $n$ . Известно [3], что функцию Ханкеля  $H_n^{(1)}(\lambda \rho)$  можно аналитически продолжить в верх-

нюю полуплоскость плоскости комплексных значений аргумента – в данной ситуации – в верхнюю полуплоскость плоскости комплексных значений параметра интегрального преобразования  $\lambda$ . Функция  $H_n^{(2)}(\lambda\rho)$  допускает аналитическое продолжение в сектор  $-\pi < \arg \lambda < 0$ , т.е. в нижнюю полуплоскость. При этом интегралы (64) вдоль вещественной оси  $-\infty < \lambda < \infty$  можно рассматривать как интегралы вдоль элементов замкнутых контуров  $K^{(+)}$  и  $K^{(-)}$  (рис. 1), каждый из которых состоит из полуокружности  $C_\infty^{(+)}$  и  $C_\infty^{(-)}$  бесконечного радиуса и бесконечных

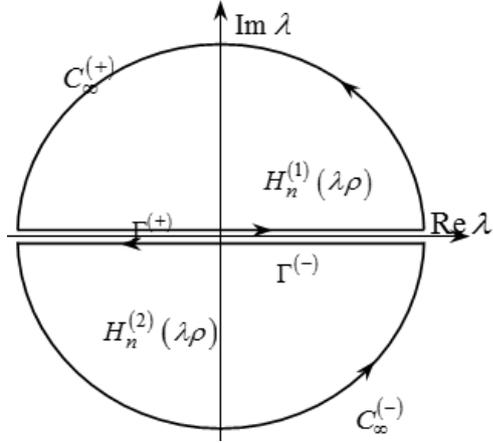


Рис. 1

ных прямых  $\Gamma^{(+)}$  и  $\Gamma^{(-)}$ , которые находятся бесконечно близко сверху и снизу относительно оси вещественных значений параметра  $\lambda$ . Обход замкнутых контуров производится в направлениях, которые указаны стрелками на рис. 1.

Таким образом,

$$U_z^{(n)}(\rho, z) = \frac{1}{4} \left\{ \oint_{K^{(+)}} \lambda U_z^{(n)}(\lambda, z) H_n^{(1)}(\lambda\rho) d\lambda + \oint_{K^{(-)}} \lambda U_z^{(n)}(\lambda, z) H_n^{(2)}(\lambda\rho) d\lambda \right\}. \quad (65)$$

Рассмотрим первое слагаемое в фигурной скобке выражения (65).

В соответствии с конструкцией выражения (38) запишем результат интегрирования по замкнутому контуру  $K^{(+)}$  в виде следующей суммы:

$$\oint_{K^{(+)}} \lambda U_z^{(n)}(\lambda, z) H_n^{(1)}(\lambda\rho) d\lambda = R_z^{(+)} + A_z^{(+)}(\rho, z) + S_z^{(+)}(\rho, z), \quad (66)$$

где

$$R_z^{(+)} = \oint_{K^{(+)}} \lambda R_z^{(n)}(\lambda, z) H_n^{(1)}(\lambda\rho) d\lambda;$$

$$A_z^{(+)}(\rho, z) = \oint_{K^{(+)}} \lambda \frac{AS_z^{(n)}(\lambda, z)}{F_{AS}(\lambda, z)} H_n^{(1)}(\lambda\rho) d\lambda; \quad (67)$$

$$S_z^{(+)}(\rho, z) = \oint_{K^{(+)}} \lambda \frac{SS_z^{(n)}(\lambda, z)}{F_{SS}(\lambda, z)} H_n^{(1)}(\lambda\rho) d\lambda. \quad (68)$$

Следуя основной теореме теории функций комплексного переменного [2], необходимо записать, что интеграл по замкнутому контуру  $K^{(+)}$  от аналитической функции  $R_z^{(n)}(\lambda, z)$  равен нулю, т.е.

$$\begin{aligned} R_z^{(+)} &= \oint_{K^{(+)}} \lambda R_z^{(n)}(\lambda, z) H_n^{(1)}(\lambda\rho) d\lambda = \int_{\Gamma^{(+)}} \lambda R_z^{(n)}(\lambda, z) H_n^{(1)}(\lambda\rho) d\lambda + \\ &+ \int_{C_\infty^{(+)}} \lambda R_z^{(n)}(\lambda, z) H_n^{(1)}(\lambda\rho) d\lambda = 0. \end{aligned}$$

Согласно лемме Жордана [2] интеграл от аналитической функции по дуге беско-

нечного радиуса всегда равняется нулю. Последнее означает, что

$$R_z^{(+)} = \int_{\Gamma^{(+)}} \lambda R_z^{(n)}(\lambda, z) H_n^{(1)}(\lambda \rho) d\lambda = 0. \quad (69)$$

Теперь рассмотрим интеграл (67).

Совершенно очевидно, что среди бесконечного множества числовых значений параметра  $\lambda$  в верхней полуплоскости  $\pi > \arg \lambda > 0$  всегда найдутся такие значения  $\lambda_m$ , которые на любой, произвольно заданной частоте  $\omega$  обратят в нуль знаменатель подынтегрального выражения (67), т.е. будет выполнено условие  $F_{AS}(\omega, \lambda_m) = 0$ . При этом, естественно, числовое значение  $\lambda_m$  равняется  $\gamma_m$  –  $m$ -ому корню дисперсионного уравнения (5) антисимметричных, относительно срединной плоскости упругого слоя, волн Лэмба. При этом  $F_{AS}(\omega, \lambda_m) \equiv \Delta_A(\chi_m)$ , где  $\chi_m = \gamma_m^2$ , поскольку волновое число  $\gamma_m$  входит в уравнение (5) во второй степени.

Рассмотрим область низких частот, где распространяющимися, т.е. переносящими энергию от области приложения внешних сил в периферийные области упругого слоя, являются только лишь первые симметричная и антисимметричная нормальные волны Лэмба (рис. 2). Произвольно выбранной круговой частоте  $\omega_n$  на рис. 2 соответствует безразмерная частота  $\Omega_n = 2\omega_n h / (v_s \pi)$ . Кривые на рис. 2 – это фрагменты частотных спектров волновых чисел антисимметричных (штриховые) и симметричных (сплошные кривые) нормальных волн Лэмба. По оси абсцисс на рис. 2 отсчитываются значения безразмерного волнового числа  $\Gamma = 2\gamma h / \pi$ .

Из приведенных на рис. 2 построений видно, что на выбранной частоте  $\omega_n$  существует распространяющаяся антисимметричная волна Лэмба с действительным волновым числом  $\Gamma_1^A = 2\gamma_1^A h / \pi$  и одна не распространяющаяся волна с чисто мнимым волновым числом  $i\Gamma_2^A = 2i\gamma_2^A h / \pi$ . Помимо этого, существует бесконечное множество нормальных волн с комплексным значением постоянной распространения  $\Xi_k^A = 2\xi_k^A h / \pi$  ( $k = 3, 4, 5, \dots$ ). Комплексные волновые числа  $\Xi_k^A$  ( $\xi_k^A$ ) также обращают в нуль знаменатель  $F_{AS}(\omega_n, \lambda)$  подынтегрального выражения в интеграле (67). Для удобства дальнейших построений введем бесконечно малое затухание в постоянную распространения распространяющейся антисимметричной волны Лэмба, т.е. будем полагать, что  $\gamma_1^A = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\gamma_1^A - i\varepsilon)$ .

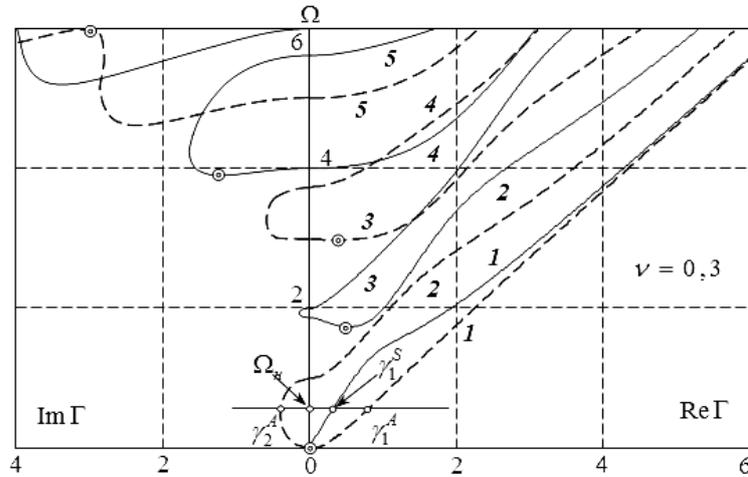


Рис. 2

После всего сказанного выше можно утверждать, что на комплексной плоскости числовых значений параметра интегрального преобразования  $\lambda$  имеются точки  $\lambda_m$ , в которых функция  $F_{AS}(\omega_n, \lambda_m) = \Delta_A(\chi_m^A) = 0$ , а подынтегральное выражение в интеграле (67) теряет аналитичность. Расположение таких точек на комплексной плоскости  $\lambda$  на частоте  $\omega_n$  показано на рис. 3. Черта сверху над символом комплексного корня означает комплексное сопряжение.

В ближайшей окрестности особой точки  $\lambda_m$  знаменатель подынтегрального выражения (67) можно представить следующим рядом Тейлора

$$\begin{aligned}
 F_{AS}(\omega_n, \lambda) = & F_{AS}(\omega_n, \lambda_m) + \\
 & + (\lambda^2 - \chi_m^A) \frac{\partial F_{AS}(\omega_n, \lambda)}{\partial(\lambda^2)} \Big|_{\lambda^2 = \chi_m^A} + (70) \\
 & + \frac{1}{2} (\lambda^2 - \chi_m^A)^2 \frac{\partial^2 F_{AS}(\omega_n, \lambda)}{\partial(\lambda^2)^2} \Big|_{\lambda^2 = \chi_m^A} + \dots \\
 & + \frac{1}{n!} (\lambda^2 - \chi_m^A)^n \frac{\partial^n F_{AS}(\omega_n, \lambda)}{\partial(\lambda^2)^n} \Big|_{\lambda^2 = \chi_m^A} + \dots
 \end{aligned}$$

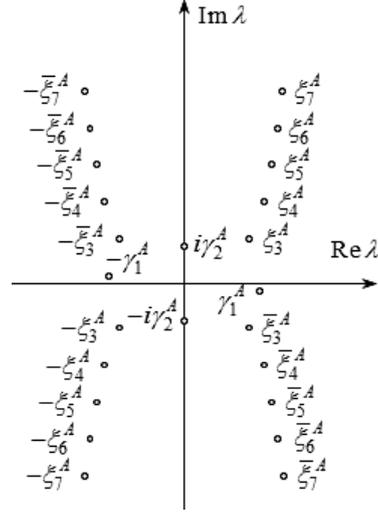


Рис. 3

Так как  $F_{AS}(\omega_n, \lambda_m) \equiv \Delta_A(\chi_m^A) = 0$ , а разность  $\lambda^2 - \chi_m^A$  по определению ближайшей окрестности является очень малым комплексным числом, то в случае, когда первая производная  $\partial F_{AS}(\omega_n, \lambda) / \partial(\lambda^2) \Big|_{\lambda^2 = \chi_m^A} \neq 0$ , разложение (70) принимает достаточно простой вид:

$$F_{AS}(\omega_n, \lambda) = (\lambda^2 - \chi_m^A) \Delta'_A(\chi_m^A), \quad (71)$$

где штрих означает первую производную выражения (5) по переменной  $\chi_m^A$ .

В ряде точек (они показаны на рис. 2 двойными кружками), в которых берут начало две ветви корней уравнения (5), первая производная  $\Delta'_A(\chi_m^A) = 0$ . При этом

$$F_{AS}(\omega_n, \lambda) = \frac{1}{2} (\lambda^2 - \chi_m^A)^2 \Delta''_A(\chi_m^A), \quad (72)$$

где  $\Delta''_A(\chi_m^A)$  – вторая производная по переменной  $\chi_m^A$ . В ближайшей окрестности этих точек, например, в самом начале ветви действительных волновых чисел первой распространяющейся антисимметричной волны Лэмба, знаменатель подынтегрального выражения (67) следует определять как сумму второго и третьего элемента разложения (70), т.е.

$$F_{AS}(\omega_n, \lambda) = (\lambda^2 - \chi_m^A) \Delta'_A(\chi_m^A) + \frac{1}{2} (\lambda^2 - \chi_m^A)^2 \Delta''_A(\chi_m^A). \quad (73)$$

Разложением (73) необходимо пользоваться до тех значений  $\gamma_1^A$ , пока не начнет выполняться сильное неравенство  $|2\gamma_1^A \Delta'_A(\gamma_1^A)| \gg (1/2) |8(\gamma_1^A)^3 \Delta''_A(\gamma_1^A)|$ , где  $2\gamma_1^A$  и  $8(\gamma_1^A)^3$  – вычеты в простом полюсе и в полюсе второго порядка. После этого необходимо пользоваться представлением (71).

В ближайшей окрестности особой точки  $\gamma_m^A$  разложение (71) можно представить в следующем виде:

$$F_{AS}(\omega_n, \lambda) = (\lambda + \gamma_m^A)(\lambda - \gamma_m^A)\Delta'_A(\chi_m^A) \cong 2\gamma_m^A \rho_m e^{i\psi} \Delta'_A(\chi_m^A), \quad (74)$$

где  $\rho_m$  – фиксированное, сколь угодно малое число – радиус малой окружности  $C_m$ , внутри которой находится особая точка  $\gamma_m^A$ ;  $\psi$  – полярный угол. Поскольку  $\rho_m \rightarrow 0$ , постольку параметр интегрального преобразования на окружности  $C_m$  с хорошей степенью точности равен волновому числу  $\gamma_m^A$ , а его изменение  $d\lambda = i\rho_m e^{i\psi} d\psi$ .

Так как результат интегрирования аналитической функции не зависит от формы контура интегрирования, то его можно деформировать как угодно. Деформируя контур  $K^{(+)}$  таким образом, чтобы внутри его не осталось ни одной особой точки  $\gamma_m^A$ , можем записать следующее:

$$\begin{aligned} \oint_{K^{(+)}} \lambda \frac{AS_z^{(n)}(\lambda, z)}{F_{AS}(\omega_n, \lambda)} H_n^{(1)}(\lambda\rho) d\lambda &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \frac{AS_z^{(n)}(\lambda, z)}{F_{AS}(\omega_n, \lambda)} H_n^{(1)}(\lambda\rho) d\lambda + \\ &+ \sum_{k=3}^{\infty} \oint_{C_k} \lambda \frac{AS_z^{(n)}(\lambda, z)}{F_{AS}(\omega_n, \lambda)} H_n^{(1)}(\lambda\rho) d\lambda + \oint_{C_2} \lambda \frac{AS_z^{(n)}(\lambda, z)}{F_{AS}(\omega_n, \lambda)} H_n^{(1)}(\lambda\rho) d\lambda + \\ &+ \sum_{k=3}^{\infty} \oint_{C_k^{(-)}} \lambda \frac{AS_z^{(n)}(\lambda, z)}{F_{AS}(\omega_n, \lambda)} H_n^{(1)}(\lambda\rho) d\lambda + \int_{C_2^{(-)}} \lambda \frac{AS_z^{(n)}(\lambda, z)}{F_{AS}(\omega_n, \lambda)} H_n^{(1)}(\lambda\rho) d\lambda = 0. \end{aligned} \quad (75)$$

Интегралы вдоль отрезков (см. рис. 4, где показаны деформированные контуры  $K^{(+)}$  и  $K^{(-)}$ ), которые соединяют бесконечно малые окружности  $C_m$  с прямой  $\Gamma^{(+)}$  и полуокружностью бесконечного радиуса  $C_{\infty}^{(+)}$  равны нулю, поскольку два, бесконечно близко расположенных отрезка, можно рассматривать как один отрезок, который проходит дважды в противоположных направлениях. Интегралы по окружностям  $C_m$  при использовании представления (74) вычисляются элементарно:

$$\begin{aligned} \oint_{C_m} \lambda \frac{AS_z^{(n)}(\lambda, z)}{F_{AS}(\omega_n, \lambda)} H_n^{(1)}(\lambda\rho) d\lambda &= \gamma_m^A \frac{AS_z^{(n)}(\gamma_m^A, z)}{2\gamma_m^A \Delta'_A(\chi_m^A)} H_n^{(1)}(\gamma_m^A \rho) i \int_0^{2\pi} d\psi = \\ &= \pi i \frac{AS_z^{(n)}(\gamma_m^A, z)}{\gamma_m^A \Delta'_A(\chi_m^A)} H_n^{(1)}(\gamma_m^A \rho). \end{aligned} \quad (76)$$

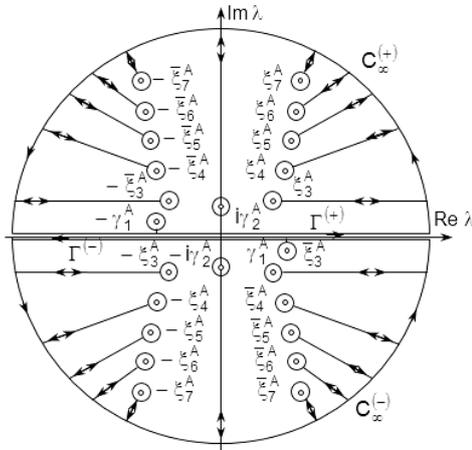


Рис. 4

После этого необходимо подчеркнуть, что волновые числа  $\gamma_m^A$ ,  $\alpha_m$  и  $\beta_m$ , входящие в аналитическое описание конструкции  $AS_z^{(n)}(\gamma_m^A, z)$  связаны между собой условием существования антисимметричных волн (5). Используя эту взаимосвязь, можно показать, что

$$AS_z^{(n)}(\gamma_m^A, z) = B_m^{(n)}(\gamma_m^A) U_z^A(z, \gamma_m^A), \quad (77)$$

где  $B_m^{(n)}(\gamma_m^A)$  – безразмерный амплитудный множитель;  $U_z^A(z, \gamma_m^A)$  – определенный выражением (4) аксиальный компонент вектора смещения материальных частиц упругого слоя в  $m$ -ой антисим-

метричной волне Лэмба. Безразмерный амплитудный множитель  $B_m^{(n)}(\gamma_m^A)$  определяется следующим выражением:

$$B_m^{(n)}(\gamma_m^A) = \frac{1}{2G} \left\{ \left[ \sigma_{zz}^{(n)}(\gamma_m, h) - \sigma_{zz}^{(n)}(\gamma_m, -h) \right] (\gamma_m^2 - \beta_m^2) \cos \beta_m h - \right. \\ \left. - \left[ \sigma_0^{(n)}(\gamma_m, h) + \sigma_0^{(n)}(\gamma_m, -h) \right] 2\gamma_m \beta_m \sin \beta_m h - \right. \\ \left. - \frac{(\gamma_m^2 - \beta_m^2)^2 \cos \beta_m h}{k_s^2 \alpha_m \cos \alpha_m h} \int_{-h}^h \left[ f_0^{(n)}(\gamma_m, z) U_0^{(n)}(z, \gamma_m) + f_z^{(n)}(\gamma_m, z) U_z^{(n)}(z, \gamma_m) \right] dz \right\}, \quad (78)$$

где  $G$  - модуль сдвига;  $\gamma_m \equiv \gamma_m^A$ ;  $U_0^{(n)}(z, \gamma_m) = 2U_\phi^A(z, \gamma_m) = -2U_\rho^A(z, \gamma_m)$ . При этом необходимо указать, что аналитическое продолжение  $B_m^{(n)}(-\gamma_m^A) = e^{n\pi i} B_m^{(n)}(\gamma_m^A)$ .

Из формулы (75) следует, что искомый интеграл вдоль бесконечной прямой  $\Gamma^{(+)}$  определяется следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda \frac{AS_z^{(n)}(\lambda, z)}{F_{AS}(\omega_n, \lambda)} H_n^{(1)}(\lambda \rho) d\lambda = -\frac{\pi i}{\Delta'_A(\chi_1^A)} B_1^{(n)}(-\gamma_1^A) U_z^A(z, -\gamma_1^A) H_n^{(1)}(-\gamma_1^A \rho) - \\ - \pi i \sum_{k=3}^{\infty} \frac{B_k^{(n)}(\xi_k)}{\Delta'_A(\xi_k^2)} U_z^A(z, \xi_k) H_n^{(1)}(\xi_k \rho) - \frac{\pi i}{\Delta'_A(-\chi_2^A)} B_2^{(n)}(i\gamma_2^A) U_z^A(z, i\gamma_2^A) H_n^{(1)}(i\gamma_2^A \rho) - \\ - \pi i \sum_{k=3}^{\infty} \frac{B_k^{(n)}(-\bar{\xi}_k)}{\Delta'_A(\bar{\xi}_k^2)} U_z^A(z, -\bar{\xi}_k) H_n^{(1)}(-\bar{\xi}_k \rho). \quad (79)$$

Поскольку (см., например [3])  $H_n^{(1)}(ze^{\pi i}) = -e^{-n\pi i} H_n^{(2)}(z)$  и  $H_n^{(2)}(\bar{z}) = \overline{H_n^{(1)}(z)}$  (черта сверху означает комплексное сопряжение), постольку соотношение (79) можно записать в следующем виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda \frac{AS_z^{(n)}(\lambda, z)}{F_{AS}(\omega_n, \lambda)} H_n^{(1)}(\lambda \rho) d\lambda = \frac{\pi i}{\Delta'_A(\chi_1^A)} B_1^{(n)}(\gamma_1^A) U_z^A(z, \gamma_1^A) H_n^{(2)}(\gamma_1^A \rho) + BP_z^{(+)}(\rho, z), \quad (80)$$

где  $BP_z^{(+)}(\rho, z)$  - аксиальные смещения материальных частиц упругого слоя в ближнем (относительно области приложения внешних сил) поле. При этом

$$BP_z^{(+)}(\rho, z) = -\frac{\pi i}{\Delta'_A(-\chi_2^A)} B_2^{(n)}(i\gamma_2^A) U_z^A(z, i\gamma_2^A) H_n^{(1)}(i\gamma_2^A \rho) - \\ - \pi i \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{\Delta'_A(\xi_k^2)} \left[ U_z^A(z, \xi_k) B_k^{(n)}(\xi_k) H_n^{(1)}(\xi_k \rho) - U_z^A(z, \bar{\xi}_k) B_k^{(n)}(\bar{\xi}_k) \overline{H_n^{(1)}(\xi_k \rho)} \right]. \quad (81)$$

Интегрирование по контуру  $K^{(-)}$  отличается от интегрирования по контуру  $K^{(+)}$  только лишь тем, что интеграл вдоль бесконечной прямой  $\Gamma^{(-)}$  равен минус интегралу от минус до плюс бесконечности. Принимая во внимание это обстоятельство, можно записать следующий результат:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda \frac{AS_z^{(n)}(\lambda, z)}{F_{AS}(\omega_n, \lambda)} H_n^{(2)}(\lambda \rho) d\lambda = \frac{\pi i}{\Delta'_A(\chi_1^A)} B_1^{(n)}(\gamma_1^A) U_z^A(z, \gamma_1^A) H_n^{(2)}(\gamma_1^A \rho) + BP_z^{(-)}(\rho, z), \quad (82)$$

где

$$BP_z^{(-)}(\rho, z) = \frac{\pi i}{\Delta'_A(-\chi_2^A)} B_2^{(n)}(-i\gamma_2^A) U_z^A(z, -i\gamma_2^A) H_n^{(2)}(-i\gamma_2^A \rho) +$$

$$\begin{aligned}
& + \pi i \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{\Delta'_A(\xi_k^2)} \left[ U_z^A(z, \bar{\xi}_k) B_k^{(n)}(\bar{\xi}_k) H_n^{(2)}(\bar{\xi}_k \rho) + U_z^A(z, \xi_k) B_k^{(n)}(\xi_k) H_n^{(2)}(\xi_k \rho) \right] = \\
& = - \frac{\pi i}{\Delta'_A(-\chi_2^A)} B_2^{(n)}(i\gamma_2^A) U_z^A(z, i\gamma_2^A) H_n^{(1)}(i\gamma_2^A \rho) + \\
& + \pi i \sum_{k=3}^{\infty} \frac{U_z^A(z, \xi_k)}{\Delta'_A(\xi_k^2)} \left[ U_z^A(z, \bar{\xi}_k) B_k^{(n)}(\bar{\xi}_k) \overline{H_n^{(1)}(\xi_k \rho)} - U_z^A(z, \xi_k) B_k^{(n)}(\xi_k) H_n^{(1)}(\xi_k \rho) \right].
\end{aligned}$$

Подставляя в определение (64) оригинала функции  $U_z^{(n)}(\rho, z)$  выражения (80) и (82), получаем окончательный вид формулы для расчета аксиальных смещений в поле антисимметричных волн Лэмба на частоте  $\omega_n$  смены знака внешних сил

$$U_z^{(An)}(\rho, z) = \frac{\pi i}{2\Delta'_A(\chi_1^A)} B_1^{(n)}(\gamma_1^A) U_z^A(z, \gamma_1^A) H_n^{(2)}(\gamma_1^A \rho) + BP_z^{(An)}(\rho, z), \quad (83)$$

где

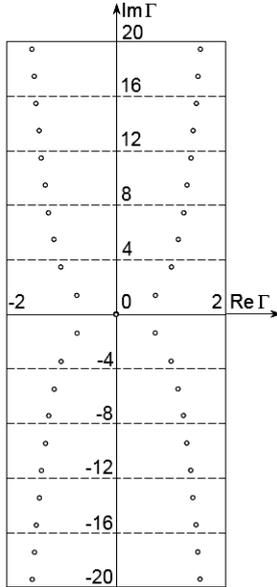


Рис. 5

$$\begin{aligned}
BP_z^{(An)}(\rho, z) = & - \frac{\pi i}{2\Delta'_A(-\chi_2^A)} B_2^{(n)}(i\gamma_2^A) U_z^A(z, i\gamma_2^A) H_n^{(1)}(i\gamma_2^A \rho) - \\
& - \frac{\pi i}{2} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{\Delta'_A(\xi_k^2)} \left[ U_z^A(z, \xi_k) B_k^{(n)}(\xi_k) H_n^{(1)}(\xi_k \rho) - \right. \\
& \left. - U_z^A(z, \bar{\xi}_k) B_k^{(n)}(\bar{\xi}_k) \overline{H_n^{(1)}(\xi_k \rho)} \right].
\end{aligned}$$

Из показанных на рис. 2 построений следует, что на выбранной частоте  $\Omega_n(\omega_n)$  существует одна распространяющаяся симметричная волна Лэмба с постоянной распространения  $\gamma_1^S$  и бесконечное множество не переносящих энергию мод с комплексными волновыми числами  $\xi_k$ , расположение которых на комплексной плоскости показано на рис. 5. Повторяя все те же рассуждения, что и при вычислении интегралов (67) и (82), можно показать, что симметричная (относительно срединной плоскости упругого слоя) составляющая интеграла (65), т.е. аксиальный компонент вектора смещения  $U_z^{(Sn)}(\rho, z) = [S_z^{(+)}(\rho, z) + S_z^{(-)}(\rho, z)]/4$  определяется следующей расчетной формулой:

$$U_z^{(Sn)}(\rho, z) = \frac{\pi i}{2\Delta'_S(\chi_1^S)} A_1^{(n)}(\gamma_1^S) U_z^S(z, \gamma_1^S) H_n^{(2)}(\gamma_1^S \rho) + BP_z^{(Sn)}(\rho, z), \quad (84)$$

где  $\Delta'_S(\chi_1^S) = d\Delta_S(\chi_1^S)/d\chi_1^S$ ;  $\chi_1^S = (\gamma_1^S)^2$ ;  $\Delta_S(\chi_1^S)$  определено выражением (8);

$$\begin{aligned}
A_m^{(n)}(\gamma_m^S) = & \frac{1}{2G} \left\{ \left[ \sigma_{zz}^{(n)}(\gamma_m, h) + \sigma_{zz}^{(n)}(\gamma_m, -h) \right] (\gamma_m^2 - \beta_m^2) \sin \beta_m h - \right. \\
& - \left[ \sigma_0^{(n)}(\gamma_m, h) - \sigma_0^{(n)}(\gamma_m, -h) \right] 2\gamma_m \beta_m \cos \beta_m h + \\
& \left. + \frac{(\gamma_m^2 - \beta_m^2)^2 \sin \beta_m h}{k_s^2 \alpha_m \sin \alpha_m h} \int_{-h}^h \left[ f_0^{(n)}(\gamma_m, z) U_0^{(n)}(z, \gamma_m) + f_z^{(n)}(\gamma_m, z) U_z^S(z, \gamma_m) \right] dz \right\}; \quad (85)
\end{aligned}$$

$\gamma_m \equiv \gamma_m^S$ , а для первого слагаемого в формуле (84)  $\gamma_m \equiv \gamma_1^S$ ;  $U_0^{(n)}(z, \gamma_m) = 2U_\phi^S(z, \gamma_m) = -2U_\rho^S(z, \gamma_m)$ ;  $U_\rho^S(z, \gamma_m)$  и  $U_\phi^S(z, \gamma_m)$  определены расчетными формулами (7);

$BP_z^{(Sn)}(\rho, z)$  – симметричная составляющая аксиальных смещений материальных частиц упругого слоя в ближнем поле, причем

$$BP_z^{(Sn)}(\rho, z) = -\frac{\pi i}{2} \times \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\Delta'_S(\xi_k^2)} \left[ U_z^S(z, \xi_k) A_k^{(n)}(\xi_k) H_n^{(1)}(\xi_k \rho) - U_z^S(z, \bar{\xi}_k) A_k^{(n)}(\bar{\xi}_k) \overline{H_n^{(1)}(\xi_k \rho)} \right].$$

Обращение функции  $U_0^{(n)}(\lambda, z)$ , заданной выражением (59) и численно равной  $-2U_\rho^{(n)}(\lambda, z)$  или  $U_\phi^{(n)}(\lambda, z)$  дает результаты, которые имеют конструкцию аналогичную выражениям (83) и (84). Это позволяет утверждать, что искомые амплитудные множители  $B_n^*(\gamma_m)$  и  $A_n^*(\gamma_m)$ , которые фигурируют в разложениях (3) и (6) определяются следующим образом:

$$A_n^*(\gamma_m) = \frac{\pi i}{\Delta'_S(\chi_m^S)} A_m^{(n)}(\gamma_m^S); \quad B_n^*(\gamma_m) = \frac{\pi i}{\Delta'_A(\chi_m^A)} B_m^{(n)}(\gamma_m^A). \quad (86)$$

Естественно, что общие решения (3) и (6), определяющие параметры волнового поля смещений материальных частиц упругого слоя при его неосесимметричном нагружении внешними силами, содержат в своем составе в качестве частного случая математическое описание осесимметричного поля. Полагая  $n = 0$ , и удерживая нижние тригонометрические функции в разложениях (3) и (6), получаем расчетные формулы для описания осесимметричного напряженно-деформированного состояния упругого слоя, которые были ранее опубликованы в работе [6].

#### Заключение.

Впервые решена в трехмерной постановке задача о возбуждении волн Лэмба системой внешних сил, которые произвольным образом распределены в объеме и на поверхности некоторой ограниченной области изотропной пластины. Решение содержит вывод соотношений для нахождения амплитудных множителей антисимметричных и симметричных относительно срединной плоскости упругого слоя радиально распространяющихся волн Лэмба, при использовании интегрального преобразования Ханкеля.

Таким образом, на основе общего решения задачи о возбуждении нормальных волн Лэмба системой неосесимметричных объемных и поверхностных нагрузок построена математическая модель электроакустического преобразователя в режиме возбуждения ультразвуковых волн в изотропных твердых телах.

**РЕЗЮМЕ.** Сформульовано та повністю аналітично вирішено проблему збудження просторово розвинених хвиль Лемба системою об'ємних та поверхневих навантажень. Застосовуючи пряме та обернене інтегральне перетворення Ганкеля, отримано співвідношення для визначення коефіцієнтів амплітуд радіально розповсюджуваних неосесиметричних хвиль Лемба, які збуджуються системою об'ємних та поверхневих навантажень у довільній області ізотропного пружного шару. Отримано співвідношення для обчислення компонентів вектора переміщення частинок матеріалу пружного шару в дальньому полі.

1. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970. – 710 с.
2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
3. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
4. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1985. – 448 с.
5. Petrishchev O.N., Romanyuk M.I. Excitation of Spatially Developed Lamb Waves by a System of Body and Surface Loads (Part I) // Int. Appl. Mech. – 2019. – 55, N 6. – P. 660 – 681.
6. Petrishchev O.N., Trushko N.S. Modeling the Radiation of Ultrasonic Waves by a Unit Source of Acoustic Emission Noise // Int. Appl. Mech. – 2015. – 51, N 2. – P. 207 – 222.

Поступила 29.05.2018

Утверждена в печать 05.11.2019