

А. В. Горик¹, С. Б. Ковальчук²

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРУГОГО ИЗГИБА СЛОИСТОЙ КОНСОЛИ
НОРМАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКОЙ
НА ПРОДОЛЬНЫХ ГРЯНЯХ**

*Полтавская государственная аграрная академия,
ул. Сковороды, 1/3, 36003, Полтава, Украина;
e-mail: ¹oleksii.goruk@pdaa.edu.ua; ²stanislav.kovalchuk@pdaa.edu.ua*

Abstract. An exact solution of the problem on elastic plane bending of a layered bar of small width under action of the normal loads distributed on the longitudinal faces according to the linear law is presented. The defining relationships for the strain-stress state parameters are obtained by the direct solution of the plane problem of theory of elasticity taking into account orthotropy of the elastic properties of layer's materials and their changes in the height of a cross-section according to the piecewise constant law. The analytical solution obtained gives the distribution of stress and displacements at the bar points on the whole package of layers and allows to perform the practical calculations for strength and rigidity as well as to construct the solutions of different application problems on plane bending of composite bars.

Key words: bar, composite, layer, bending, stress, deformation, displacement.

Введение.

Композитные элементы конструкций обладают хорошими соотношениями физико-механических свойств, секрет получения которых заключается в комбинировании нескольких разнородных материалов. Однако такой технологический прием создает и основную проблему моделирования и расчета композитных элементов – анизотропию свойств и дискретную неоднородность материала, которые не позволяют использовать традиционные методы расчета, построенные на предположении об однородности и изотропии свойств материала.

Для стержневых элементов технических сооружений очень распространенным видом деформации является плоский поперечный изгиб. Однако аналитическая теория деформирования композитных изгибаемых брусьев, по сравнению с пластинами, плитами и оболочками, является наименее развитой.

В научных работах, посвященных теоретическим проблемам моделирования изгиба композитных брусьев, довольно распространенными являются неклассические или «уточненные» модели. Такие модели, в основном, построены на основе гипотез «классической» модели изгиба с учетом неоднородности материала, деформаций поперечного обжатия и сдвига. При этом уточнение гипотез производится один раз в начале построения модели [12 – 14], либо на каждом шаге итерационного процесса [7, 11]. Такие модели достаточно универсальны и в большинстве практических случаев дают приемлемую точность определения отдельных параметров напряженно-деформированного состояния (НДС).

Более точным и сложным направлением моделирования изгиба композитных брусьев является получение точных решений уравнений теории упругости с учетом неоднородности материала. Отдельные решения подобных задач с использованием некоторых упрощений получены такими известными учеными, как М.И. Мухелишвили [3, 4], С.Г. Лехницкий [1, 2], N.J. Pagano [10]. Прикладное применение этих решений усложнено тем, что они носят общий характер и требуют проведения дополнительных

теоретических исследований для использования в частных случаях, либо позволяют учитывать только непрерывную неоднородность и граничные условия определенного типа. Однако подобные решения более точно описывают НДС неоднородного бруса, а несколько решений для разных случаев нагружения путем наложения дают возможность получить решения более сложных задач. Поэтому развитие данного направления моделирования изгиба композитных брусков является важным и актуальным.

В работе [8] авторами получено точное решение задачи упругого изгиба узкой слоистой консоли нагрузкой на торце, а в [9] – равномерно распределенными нормальными нагрузками на продольных гранях. Совместно эти решения позволяют строить прикладные решения многих задач деформирования слоистых брусков с различными комбинациями типовых нагрузок.

В ряде важных для практики случаев, таких как действие гидростатического давления, давления насыпных материалов и грунта, необходимо учитывать линейно распределенную нагрузку, которая является одной из типовых для балочных элементов конструкций.

Для изотропного бруса с сечением в виде узкого прямоугольника решение такой задачи будет подобно известному решению задачи о стенке плотины, подверженной давлению воды или сыпучего тела, которое получено М. Levy [6]. Решение аналогичной плоской задачи с помощью функции напряжений в виде полинома шестой степени предложено А. Тимпе в [15]. Однако применение таких решений и подходов к их получению невозможно для случая неоднородного бруса с анизотропными продольными слоями. Поэтому, целью данной работы является получение решения задачи плоского изгиба узкого слоистого бруса под действием нормальной нагрузки, линейно распределенной на продольных гранях, с учетом дискретной неоднородности и анизотропии его материала.

§1. Постановка задачи.

Рассмотрим слоистый консольный узкий брус с прямолинейной осью, состоящий из m продольных слоев одинаковой ширины b , выполненных из материалов с различными упругими характеристиками (рис. 1). Поперечное сечение, высотой h , имеет неизменное строение по длине бруса l . Заданы координаты границ слоев $z_{bd,k}$ ($k = \overline{1, m}$) и координаты продольных нижней и верхней граней: $z_1 = z_{bd,0}$, $z_2 = z_{bd,m}$.

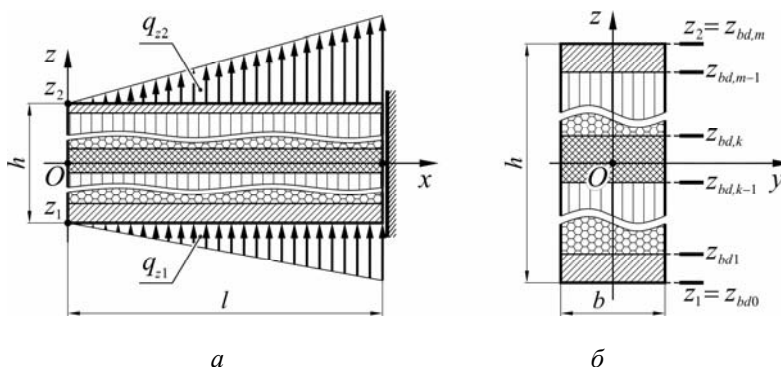


Рис. 1

Брус отнесен к прямоугольной декартовой системе координат xuz , в которой начало отсчета размещено в центре жесткости крайнего левого сечения. Ось Ox совпадает с продольной осью жесткости бруса, а координатная плоскость xOz совпадает с продольной плоскостью симметрии.

Слои бруса изготовлены из непрерывного ортотропного материала, для которого в произвольной точке одна из плоскостей упругой симметрии совпадает с поперечным сечением, а вторая – параллельна плоскости xOz . Для произвольного k -го слоя бруса известны упругие постоянные

$$\|S_a^{[k]}\| = \|E_x^{[k]}, E_z^{[k]}, G_{xz}^{[k]}, \nu_{xz}^{[k]}, \nu_{zx}^{[k]}\|,$$

где $E_x^{[k]}, E_z^{[k]}$ – модули упругости по направлению осей Ox и Oz ; $G_{xz}^{[k]}$ – модуль сдвига в плоскостях, параллельных xOz ; $\nu_{xz}^{[k]}, \nu_{zx}^{[k]}$ – коэффициенты Пуассона.

Упругие характеристики материала для всего слоистого бруса будут кусочно-постоянными функциями $\mu_a^S(z)$, которые аналогично [8] и [9] представим с помощью смещенных функций Хевисайда H :

$$\mu_a^S = \sum_{k=1}^m \left\{ S_a^{[k]} \left[H(z - z_{bd,k-1}) - H(z - z_{bd,k}) \right] \right\}. \quad (1.1)$$

На границах слоёв жестко соединены и в процессе деформирования бруса отсутствует их относительное смещение и отрыв, т.е. выполняется условие абсолютно жесткого соединения слоёв.

Продольные боковые грани и торец бруса с координатой $x=0$ свободны от внешних нагрузок и закреплений. На нижнюю ($z = z_1$) и верхнюю ($z = z_2$) продольные грани бруса (рис. 1, а) действуют нормальные нагрузки q_{z1} и q_{z2} , которые распределены по линейному закону

$$q_{z1} = q_1 x; \quad q_{z2} = q_2 x, \quad (1.2)$$

где q_1, q_2 – постоянные.

На правом торце бруса ($x=l$) заданы некоторые статические и кинематические условия, обеспечивающие его равновесие.

Под действием приложенной нагрузки брус изгибается в продольной плоскости симметрии. Рассмотрим основные этапы решения задачи определения НДС такого композитного элемента при упругой работе ортотропных материалов его слоёв.

§2. Общее решение задачи.

С учетом принятых допущений можно полагать, что в процессе деформирования рассматриваемый многослойный брус пребывает в условиях обобщенного плоского напряженного состояния (НС) и для решения поставленной задачи можно использовать известные уравнения плоской задачи линейной теории упругости. При этом для учета неоднородности материала бруса упругие постоянные в законе Гука заменим соответствующими функциями (1.1):

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{\mu_x^E} - \frac{\mu_{xz}^V \sigma_z}{\mu_x^E}; \quad \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{\mu_z^E} - \frac{\mu_{xz}^V \sigma_x}{\mu_x^E}; \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{\mu_{xz}^G} \tau_{xz}, \quad (2.1)$$

где учтена зависимость $\mu_x^E \mu_{xz}^V = \mu_z^E \mu_{xz}^V$ для ортотропных слоёв.

С учетом принятой нагрузки, на продольных гранях и свободном торце рассматриваемого бруса должны выполняться следующие статические граничные условия

$$\sigma_z |_{z=z_1} = -q_1 x; \quad \sigma_z |_{z=z_2} = q_2 x; \quad \tau_{zx} |_{z=z_1, z=z_2} = 0; \quad (2.2)$$

$$\sigma_x |_{x=0} = 0; \quad \tau_{xz} |_{x=0} = 0. \quad (2.3)$$

Интегрируя уравнения равновесия плоской задачи теории упругости, с учетом (2.2) и (2.3) получим следующие зависимости для нормальных напряжений:

$$\sigma_x = -\int_0^x \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dx; \quad \sigma_z = -\int_{z_1}^z \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dz - q_1 x. \quad (2.4)$$

Общую форму решения для касательных напряжений τ_{xz} определим по распределению поперечной силы Q_z :

$$Q_z = b \int_0^x (q_{z1} + q_{z2}) dx,$$

откуда, с учетом (1.2)

$$-\int_{z_1}^{z_2} \tau_{xz} dz = \frac{q_1 + q_2}{2} x^2. \quad (2.5)$$

Учитывая (2.5) можно прийти к выводу, что распределение напряжений τ_{xz} по длине бруса должно быть квадратичной функцией координаты x

$$\tau_{xz} = \frac{x^2}{2} Z_{xz}^{\tau 2} + Z_{xz}^{\tau 0}, \quad (2.6)$$

где $Z_{xz}^{\tau 2} = Z_{xz}^{\tau 2}(z)$, $Z_{xz}^{\tau 0} = Z_{xz}^{\tau 0}(z)$ – неизвестные функции распределения касательных напряжений по высоте поперечного сечения бруса.

Подставив (2.6) в (2.2) и (2.5), получим

$$\frac{x^2}{2} Z_{xz}^{\tau 2} \Big|_{z=z_1}^{z=z_2} + Z_{xz}^{\tau 0} \Big|_{z=z_1}^{z=z_2} = 0; \quad \frac{x^2}{2} \int_{z_1}^{z_2} Z_{xz}^{\tau 2} dz + \int_{z_1}^{z_2} Z_{xz}^{\tau 0} dz = -\frac{q_1 + q_2}{2} x^2. \quad (2.7)$$

Сравнивая постоянные при одинаковых степенях x в равенствах (2.7), получим следующие условия для функций $Z_{xz}^{\tau 0}$ и $Z_{xz}^{\tau 2}$:

$$Z_{xz}^{\tau 0} \Big|_{z=z_1}^{z=z_2} = 0; \quad Z_{xz}^{\tau 2} \Big|_{z=z_1}^{z=z_2} = 0; \quad \int_{z_1}^{z_2} Z_{xz}^{\tau 0} dz = 0; \quad \int_{z_1}^{z_2} Z_{xz}^{\tau 2} dz = -(q_1 + q_2). \quad (2.8)$$

Необходимо отметить, что второе граничное условие (2.3) требует равенства нулю функции $Z_{xz}^{\tau 0}$ в (2.6). Однако, как будет показано ниже, это влечет за собой невозможность разделения определяющего уравнения задачи, поэтому ограничимся выполнением краевых и интегральных условий (2.8).

С учетом (2.6) система решений (2.4) примет такой вид:

$$\sigma_x = -\frac{x^3}{6} \frac{dZ_{xz}^{\tau 2}}{dz} - x \frac{dZ_{xz}^{\tau 0}}{dz}; \quad \sigma_z = -\left(\int_{z_1}^z Z_{xz}^{\tau 2} dz + q_1 \right) x. \quad (2.9)$$

Подставив решения (2.6) и (2.9) в физические зависимости (2.1) получим следующие соотношения для линейных и угловых деформаций:

$$\varepsilon_x = -\frac{x^3}{6} \frac{1}{\mu_x^E} \frac{dZ_{xz}^{\tau 2}}{dz} - x \left[\frac{1}{\mu_x^E} \frac{dZ_{xz}^{\tau 0}}{dz} - \frac{\mu_{xz}^V}{\mu_x^E} \left(\int_{z_1}^z Z_{xz}^{\tau 2} dz + q_1 \right) \right];$$

$$\varepsilon_z = \frac{x^3}{6} \frac{\mu_{xz}^V}{\mu_x^E} \frac{dZ_{xz}^{\tau 2}}{dz} + x \left[\frac{\mu_{xz}^V}{\mu_x^E} \frac{dZ_{xz}^{\tau 0}}{dz} - \frac{1}{\mu_z^E} \left(\int_{z_1}^z Z_{xz}^{\tau 2} dz + q_1 \right) \right]; \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{\mu_{xz}^G} \left(\frac{x^2}{2} Z_{xz}^{\tau 2} + Z_{xz}^{\tau 0} \right). \quad (2.10)$$

Интегрируя соотношения Коши для линейных деформаций, получим общие выражения для продольных u и поперечных w перемещений

$$u = \int_0^x \varepsilon_x dx + u|_{x=0}; \quad w = \int_{z_1}^z \varepsilon_z dz + w|_{z=z_1}, \quad (2.11)$$

где $u|_{x=0}$, $w|_{z=z_1}$ – неизвестные функции распределения перемещений на свободном торце и нижней продольной грани, соответственно.

Подставив первое и второе выражения (2.10) в (2.11), получим следующие зависимости для перемещений:

$$u = -\frac{x^4}{24} \frac{1}{\mu_x^E} \frac{dZ_{xz}^{\tau 2}}{dz} - \frac{x^2}{2} \left[\frac{1}{\mu_x^E} \frac{dZ_{xz}^{\tau 0}}{dz} - \frac{\mu_{xz}^V}{\mu_x^E} \left(\int_{z_1}^z Z_{xz}^{\tau 2} dz + q_1 \right) \right] + u|_{x=0}; \quad (2.12)$$

$$w = \frac{x^3}{6} \int_{z_1}^z \left(\frac{\mu_{xz}^V}{\mu_x^E} \frac{dZ_{xz}^{\tau 2}}{dz} \right) dz + x \int_{z_1}^z \left[\frac{\mu_{xz}^V}{\mu_x^E} \frac{dZ_{xz}^{\tau 0}}{dz} - \frac{1}{\mu_z^E} \left(\int_{z_1}^z Z_{xz}^{\tau 2} dz + q_1 \right) \right] dz + w|_{z=z_1}. \quad (2.13)$$

Определяющее уравнение для неизвестных функций получим, подставив третье выражение (2.1), (2.12) и (2.13) в соотношение Коши для угловых деформаций γ_{xz}

$$\begin{aligned} & \frac{dw|_{z=z_1}}{dx} - \frac{x^4}{24} \left[\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\mu_x^E} \frac{dZ_{xz}^{\tau 2}}{dz} \right) \right] - \\ & - \frac{x^2}{2} \left[\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\mu_x^E} \frac{dZ_{xz}^{\tau 0}}{dz} - \frac{\mu_{xz}^V}{\mu_x^E} \left(\int_{z_1}^z Z_{xz}^{\tau 2} dz + q_1 \right) \right) \right] - \int_{z_1}^z \left(\frac{\mu_{xz}^V}{\mu_x^E} \frac{dZ_{xz}^{\tau 2}}{dz} \right) dz + \frac{Z_{xz}^{\tau 2}}{\mu_{xz}^G} + \\ & + \left[\frac{du|_{x=0}}{dz} + \int_{z_1}^z \left(\frac{\mu_{xz}^V}{\mu_x^E} \frac{dZ_{xz}^{\tau 0}}{dz} - \frac{1}{\mu_z^E} \left(\int_{z_1}^z Z_{xz}^{\tau 2} dz + q_1 \right) \right) dz - \frac{Z_{xz}^{\tau 0}}{\mu_{xz}^G} \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Равенство (2.14) в общем случае может выполняться, если выражения в квадратных скобках равны некоторым постоянным

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\mu_x^E} \frac{dZ_{xz}^{\tau 2}}{dz} \right) = C_0; \quad (2.15)$$

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{1}{\mu_x^E} \frac{dZ_{xz}^{\tau 0}}{dz} - \frac{\mu_{xz}^V}{\mu_x^E} \left(\int_{z_1}^z Z_{xz}^{\tau 2} dz + q_1 \right) \right] - \int_{z_1}^z \left(\frac{\mu_{xz}^V}{\mu_x^E} \frac{dZ_{xz}^{\tau 2}}{dz} \right) dz + \frac{Z_{xz}^{\tau 2}}{\mu_{xz}^G} = C_1; \quad (2.16)$$

$$\frac{du|_{x=0}}{dz} + \int_{z_1}^z \left[\frac{\mu_{xz}^V}{\mu_x^E} \frac{dZ_{xz}^{\tau 0}}{dz} - \frac{1}{\mu_z^E} \left(\int_{z_1}^z Z_{xz}^{\tau 2} dz + q_1 \right) \right] dz - \frac{Z_{xz}^{\tau 0}}{\mu_{xz}^G} = C_2, \quad (2.17)$$

где C_0, C_1, C_2 – неизвестные постоянные.

С учетом равенств (2.15) – (2.17), интегро-дифференциальное выражение (2.14) преобразуется в линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dw|_{z=z_1}}{dx} - C_0 \frac{x^4}{24} - C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 = 0. \quad (2.18)$$

Следует отметить, что в случае тождественного равенства нулю функции $Z_{xz}^{\tau 0}$, как того требует второе граничное условие (2.3), будут получены два уравнения для функции $Z_{xz}^{\tau 2}$:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\mu_x^E} \frac{dZ_{xz}^{\tau 2}}{dz} \right) = C_0; \quad - \frac{d}{dz} \left[\frac{\mu_{xz}^V}{\mu_x^E} \left(\int_{z_1}^z Z_{xz}^{\tau 2} dz + q_1 \right) \right] - \int_{z_1}^z \left(\frac{\mu_{xz}^V}{\mu_x^E} \frac{dZ_{xz}^{\tau 2}}{dz} \right) dz + \frac{Z_{xz}^{\tau 2}}{\mu_{xz}^G} = C_1.$$

Как видим, одновременное удовлетворение этих уравнений возможно только в случае $Z_{xz}^{\tau 2} \equiv 0$, что приводит к тривиальному решению всей задачи.

Общее решение уравнения (2.15) с учетом (2.8) ($Z_{xz}^{\tau 2}|_{z=z_1} = 0$), запишется так:

$$Z_{xz}^{\tau 2} = \int_{z_1}^{\bar{z}} [\mu_x^E (C_0 z + C_3)] dz . \quad (2.19)$$

Подставив (2.19) в условия (2.8) и решив полученные уравнения, определим неизвестные постоянные:

$$C_3 = \frac{(q_1 + q_2) B_1}{B_2 B_0 - B_1 (z_2 B_0 - B_1)}; \quad C_0 = -\frac{(q_1 + q_2) B_0}{B_2 B_0 - B_1 (z_2 B_0 - B_1)}, \quad (2.20)$$

где аналогично решениям в [7] и [8] введены обозначения

$$\int_{z_1}^{\bar{z}} \mu_x^E dz = B_0; \quad \int_{z_1}^{\bar{z}} (\mu_x^E z) dz = B_1; \quad \int_{z_1}^{\bar{z}} \int_{z_1}^{\bar{z}} (\mu_x^E z) dz dz = B_2 . \quad (2.21)$$

В (2.21) и далее, нижние индексы в обозначениях определенных интегралов показывают порядок подынтегрального выражения.

С учетом (2.20) решение (2.19) примет следующий вид:

$$Z_{xz}^{\tau 2} = \frac{q_1 + q_2}{B_1 (z_2 B_0 - B_1) - B_2 B_0} \int_{z_1}^{\bar{z}} [\mu_x^E (B_0 z - B_1)] dz . \quad (2.22)$$

В главной системе координат [7] (аналог главных приведенных осей инерции в [4]) постоянная B_1 равна нулю, и решение (2.22) примет такой вид

$$Z_{xz}^{\tau 2} = -\frac{q_1 + q_2}{B_2} \int_{z_1}^{\bar{z}} (\mu_x^E z) dz . \quad (2.23)$$

В дальнейшем для упрощения теоретических соотношений считаем, что принятая для бруса система координат xuz , является главной, в которой

$$B_1 = 0 . \quad (2.24)$$

Общее решение уравнения (2.16) с учетом (2.23) и краевых условий (2.8) примет следующий вид:

$$Z_{xz}^{\tau 0} = \frac{q_1 + q_2}{B_2} \int_{z_1}^{\bar{z}} (\mu_x^E \psi_3) dz + q_1 \int_{z_1}^{\bar{z}} \mu_{xz}^V dz + C_1 \int_{z_1}^{\bar{z}} [\mu_x^E (z - z_1)] dz + C_4 \int_{z_1}^{\bar{z}} \mu_x^E dz , \quad (2.25)$$

где для упрощения изложения введено обозначение функции

$$\psi_3 = \int_{z_1}^{\bar{z}} \left[\frac{1}{\mu_{xz}^G} \int_{z_1}^{\bar{z}} (\mu_x^E z) dz - \int_{z_1}^{\bar{z}} (\mu_{xz}^V z) dz \right] dz - \frac{\mu_{xz}^V}{\mu_x^E} \int_{z_1}^{\bar{z}} \int_{z_1}^{\bar{z}} (\mu_x^E z) dz dz . \quad (2.26)$$

В (2.26) индекс в обозначении функции ψ_3 означает ее порядок при $\mu_a^S = \text{const}$.

Подставив решение (2.25) в соответствующие краевые и интегральные условия (2.8), после решения полученных уравнений относительно неизвестных с учетом (2.24), получим

$$C_1 = \frac{q_1 + q_2}{B_2^2} D_4 + \frac{q_1 D_1}{B_2}; \quad C_4 = \frac{q_1 + q_2}{B_2} \left(\frac{z_1 D_4}{B_2} - \frac{D_3}{B_0} \right) + q_1 \left(\frac{D_1}{B_2} z_1 - \frac{D_0}{B_0} \right), \quad (2.27)$$

где введены обозначения для определенных интегралов

$$D_0 = \int_{z_1}^{z_2} \mu_{xz}^V dz; \quad D_1 = \int_{z_1}^{z_2} (z \mu_{xz}^V) dz; \quad D_3 = \int_{z_1}^{z_2} (\mu_x^E \psi_3) dz; \quad D_4 = \int_{z_1}^{z_2} (\mu_x^E z \psi_3) dz. \quad (2.28)$$

Подставив (2.27) в решение (2.25), получим соотношение для искомой функции $Z_{xz}^{\tau_0}$ в таком виде:

$$Z_{xz}^{\tau_0} = \frac{q_1 + q_2}{B_2} \int_{z_1}^z \left[\mu_x^E \left(\psi_3 + \frac{D_4}{B_2} z - \frac{D_3}{B_0} \right) \right] dz + q_1 \int_{z_1}^z \left[\mu_{xz}^V + \mu_x^E \left(\frac{D_1}{B_2} z - \frac{D_0}{B_0} \right) \right] dz. \quad (2.29)$$

Применив решения (2.23) и (2.29) в выражении (2.6), получим следующее решение для касательных напряжений:

$$\begin{aligned} \tau_{xz} = & -\frac{q_1 + q_2}{B_2} \left\{ \frac{x^2}{2} \int_{z_1}^z (\mu_x^E z) dz - \int_{z_1}^z \left[\mu_x^E \left(\psi_3 + \frac{D_4}{B_2} z - \frac{D_3}{B_0} \right) \right] dz \right\} + \\ & + q_1 \int_{z_1}^z \left[\mu_{xz}^V + \mu_x^E \left(\frac{D_1}{B_2} z - \frac{D_0}{B_0} \right) \right] dz. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Следует отметить, что решение (2.30) является непрерывным по переменной z , а значит, соответствует условиям абсолютно жесткого соединения слоев.

Согласно (2.30) касательные напряжения τ_{xz} на торце с координатой $x = 0$ не могут быть равны нулю, как этого требует второе граничное условие (2.3). Поэтому полученное решение будет точным только в случае, если на данном торце будет действовать касательная нагрузка

$$q_{xz1} = -\frac{q_1 + q_2}{B_2} \int_{z_1}^z \left[\mu_x^E \left(\psi_3 + \frac{D_4}{B_2} z - \frac{D_3}{B_0} \right) \right] dz - q_1 \int_{z_1}^z \left[\mu_{xz}^V + \mu_x^E \left(\frac{D_1}{B_2} z - \frac{D_0}{B_0} \right) \right] dz. \quad (2.31)$$

Однако, по четвертому условию (2.8) равнодействующая нагрузки q_{xz1} будет равна нулю. Поэтому, согласно принципу локальности, распределение параметров НДС в полученном решении будет отличаться от точного только вблизи торца с нагрузкой.

Решение для нормальных напряжений σ_x и σ_z получим, подставив соотношения (2.23) и (2.29) в (2.9):

$$\sigma_x = \frac{q_1 + q_2}{B_2} \mu_x^E \left[\frac{x^3 z}{6} - x \left(\psi_3 + \frac{D_4 z}{B_2} - \frac{D_3}{B_0} \right) \right] - q_1 x \left[\mu_{xz}^V + \mu_x^E \left(\frac{D_1 z}{B_2} - \frac{D_0}{B_0} \right) \right]; \quad (2.32)$$

$$\sigma_z = \left[\frac{q_1 + q_2}{B_2} \int_{z_1}^z \int_{z_1}^z (\mu_x^E z) dz dz - q_1 \right] x. \quad (2.33)$$

Согласно (2.32) нормальные напряжения σ_x скачкообразно изменяют величину на границах слоев. В пределах произвольного однородного слоя распределение напряжений σ_x состоит из линейной и кубической составляющей, которая зависит от всех упругих характеристик материала слоя.

В то же время распределение напряжений σ_z (2.33) зависит только от функции продольного модуля упругости μ_x^E и подчиняется кубическому закону в пределах однородного слоя. При этом напряжения σ_z являются непрерывными, что соответствует условию абсолютно жесткого соединения слоев.

Для однородного ортотропного бруса соотношения для напряжений (2.30), (2.32) и (2.33) примут следующий вид:

$$\tau_{xz} = -\frac{q_1 + q_2}{160h^3} \left[120x^2 + \left(\frac{E_x}{G_{xz}} - 2\nu_{xz} \right) (h^2 - 20z^2) \right] (h^2 - 4z^2); \quad (2.34)$$

$$\sigma_x = -\frac{q_1 + q_2}{10h^3} \left[20x^2 + \left(\frac{E_x}{G_{xz}} - 2\nu_{xz} \right) (3h^2 - 20z^2) \right] xz; \quad (2.35)$$

$$\sigma_z = \left[\frac{q_1 + q_2}{2h^3} (h - z)(h + 2z)^2 - q_1 \right] x. \quad (2.36)$$

Для изотропного бруса на основе (2.34) – (2.36) получены такие зависимости

$$\tau_{xz} = -\frac{q_1 + q_2}{80h^3} \left[60x^2 + (h^2 - 20z^2) \right] (h^2 - 4z^2); \quad (2.37)$$

$$\sigma_x = -\frac{q_1 + q_2}{5h^3} \left[10x^2 + (3h^2 - 20z^2) \right] xz; \quad (2.38)$$

$$\sigma_z = \left[\frac{q_1 + q_2}{2h^3} (h - z)(h + 2z)^2 - q_1 \right] x. \quad (2.39)$$

Соотношения (2.37) – (2.39) после соответствующих замен и преобразований можно привести к виду известного решения задачи о стенке плотины подверженной давлению воды [5], что косвенно подтверждает правильность полученных решений (2.30), (2.32) и (2.33).

Уравнения (2.17) и (2.18) служат для получения неизвестных функций распределения перемещений $u|_{x=0}$ и $w|_{z=z_1}$. Их решения получены в таком виде:

$$u|_{x=0} = -\int_{z_1}^z \int_{z_1}^z \left[\frac{\mu_{xz}^v}{\mu_x^E} \frac{dZ_{xz}^{\tau_0}}{dz} - \frac{1}{\mu_z^E} \left(\int_{z_1}^z Z_{xz}^{\tau_2} dz + q_1 \right) \right] dz dz + \int_{z_1}^z \frac{Z_{xz}^{\tau_0}}{\mu_{xz}^G} dz + C_2 (z - z_1) + u|_{x=0, z=z_1}; \quad (2.40)$$

$$w|_{z=z_1} = -\frac{q_1 + q_2}{B_2} \frac{x^5}{120} + \frac{1}{B_2} \left[\frac{D_4}{B_2} (q_1 + q_2) + q_1 D_1 \right] \frac{x^3}{6} - C_2 x + w|_{z=z_1, x=0}. \quad (2.41)$$

Следует отметить, что согласно (2.40) свободный торец слоистого бруса будет искривленным, причем в пределах однородного слоя функция распределения продольных перемещений будет иметь пятый порядок. Однако величина такого искривления на фоне линейной составляющей будет незначительной.

Выражения (2.40) и (2.41) вместе с (2.12), (2.13), (2.23) и (2.29) составляют решение задачи для перемещений и позволяют определить их величину в произвольной точке слоистого бруса. Соответствующие функции распределения перемещений будут непрерывными, что соответствует условию абсолютно жесткого соединения слоев и свидетельствует о правильности выполненных преобразований.

Решения (2.40) и (2.41) содержат три неизвестные постоянные интегрирования: C_2 , $u|_{x=0, z=z_1}$ и $w|_{z=z_1, x=0}$, которые должны определяться с помощью кинематических условий, соответствующих способу закрепления бруса. По условиям поставленной задачи брус имеет закрепление торца с координатой $x = l$. Полученные решения для перемещений (2.12), (2.13), (2.40) и (2.41) не позволяют задать идеализированное абсолютно жесткое закрепление торца, поскольку невозможно удовлетворить условие отсутствия

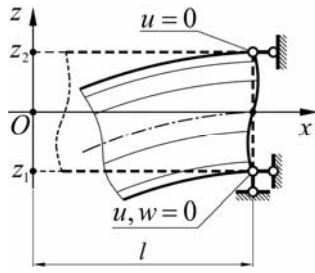


Рис. 2

перемещений всех его точек ($u|_{x=l}=0, w|_{x=l}=0$) путем подбора трех неизвестных постоянных: $C_2, u|_{x=0, z=z_1}, w|_{z=z_1, x=0}$. Однако можно задать кинематические условия, которые приближенно моделируют жесткое закрепление путем полного или частичного ограничения перемещений отдельных точек закрепленного торца. В решениях [8] и [9] моделирование жесткого закрепления торца бруса предложено выполнять согласно схеме на рис. 2, которой отвечают следующие кинематические условия

$$u|_{x=l, z=z_1}=0; u|_{x=l, z=z_2}=0; w|_{x=l, z=z_1}=0. \quad (2.42)$$

Условия (2.42) исключают продольные перемещения u только в крайних точках закрепленного сечения бруса, поэтому не исключено его искривление (депланация).

Можно задать множество кинематических условий, которые отличаются от (2.42) и учитывают особенности различных способов закрепления торца, однако исследование этого вопроса выходит за пределы рассматриваемой задачи.

Используя решения (2.23) и (2.29), согласно выражениям (2.10), можно получить соотношения для линейных и угловых деформаций

$$\varepsilon_x = \frac{q_1 + q_2}{B_2} \frac{x^3 z}{6} - q_1 x \left(\frac{D_1}{B_2} z - \frac{D_0}{B_0} \right) - \frac{q_1 + q_2}{B_2} x \left[\int_{z_1}^z \left(\frac{1}{\mu_{xz}^G} \int_{z_1}^z (\mu_x^E z) dz - \int_{z_1}^z (\mu_{xz}^V z) dz \right) dz + \frac{D_4}{B_2} z - \frac{D_3}{B_0} \right]; \quad (2.43)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{q_1 + q_2}{B_2} \left\{ \frac{x^3 z \mu_{xz}^V}{6} - x \left[\mu_{xz}^V \left(\psi_3 + \frac{D_4}{B_2} z - \frac{D_3}{B_0} \right) + \frac{1}{\mu_z^E} \int_{z_1}^z (\mu_x^E z) dz \right] \right\} + q_1 x \left[\mu_{xz}^V \left(\frac{\mu_{xz}^V}{\mu_x^E} + \frac{D_1 z}{B_2} - \frac{D_0}{B_0} \right) - \frac{1}{\mu_z^E} \right]; \quad (2.44)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{q_1 + q_2}{B_2 \mu_{xz}^G} \left\{ \int_{z_1}^z \left[\mu_x^E \left(\psi_3 + \frac{D_4 z}{B_2} - \frac{D_3}{B_0} \right) \right] dz - \frac{x^2}{2} \int_{z_1}^z (\mu_x^E z) dz \right\} + \frac{q_1}{\mu_{xz}^G} \int_{z_1}^z \left[\mu_{xz}^V + \mu_x^E \left(\frac{D_1 z}{B_2} - \frac{D_0}{B_0} \right) \right] dz. \quad (2.45)$$

Согласно (2.43) функция распределения продольных деформаций ε_x является непрерывной, что соответствует условию абсолютно жесткого соединения слоев.

Таким образом, получены аналитические соотношения для всех параметров НДС слоистого бруса: напряжений – (2.30), (2.32), (2.33), перемещений – (2.12), (2.13), (2.40), (2.41), деформаций – (2.43) – (2.45), которые, вместе с решениями (2.23) и (2.29) для определяющих функций Z_{xz}^{r2} и Z_{xz}^{r0} , составляют решение поставленной задачи. Это решение является точным, если на свободном торце приложена самоуравновешенная касательная нагрузка q_{xz1} , определяемая соотношением (2.31).

§3. Частный случай определения перемещений.

Рассмотрим случай, когда линейная нагрузка приложена только к одной из продольных граней бруса на рис. 1.

Приняв $q_1 = 0$ в соотношениях (2.12), (2.13), (2.40), (2.41), после выполнения преобразований получим зависимости для перемещений для случая, когда действует только нагрузка q_{z2} :

$$u = \frac{q_2}{2B_2} \left\{ \frac{zx^4}{12} - x^2 \left[\int_{z_1}^z \left(\frac{1}{\mu_{xz}^G} \int_{z_1}^z (z\mu_x^E) dz - \int_{z_1}^z (z\mu_x^V) dz \right) dz + \frac{D_4}{B_2} z - \frac{D_3}{B_0} \right] \right\} -$$

$$- \frac{q_2}{B_2} \int_{z_1}^z \int_{z_1}^z \left[\frac{1}{\mu_z^E} \int_{z_1}^z (z\mu_x^E) dz dz + \mu_{xz}^V \left(\psi_3 + \frac{D_4}{B_2} z - \frac{D_3}{B_0} \right) \right] dz dz + \quad (3.1)$$

$$+ \frac{q_2}{B_2} \int_{z_1}^z \left\{ \frac{1}{\mu_{xz}^G} \int_{z_1}^z \left[\mu_x^E \left(\psi_3 + \frac{D_4}{B_2} z - \frac{D_3}{B_0} \right) \right] dz \right\} dz + C_2 (z - z_1) + u|_{x=0, z=z_1};$$

$$w = \frac{q_2}{B_2} \left\{ -\frac{x^3}{6} \int_{z_1}^z (z\mu_{xz}^V) dz + x \int_{z_1}^z \left[\frac{1}{\mu_z^E} \int_{z_1}^z (z\mu_x^E) dz dz + \mu_{xz}^V \left(\psi_3 + \frac{D_4}{B_2} z - \frac{D_3}{B_0} \right) \right] dz \right\} -$$

$$- \frac{q_2}{6B_2} \left(\frac{1}{20} x^5 - \frac{D_4}{B_2} x^3 \right) - C_2 x + w|_{z=z_1, x=0}. \quad (3.2)$$

Подставив соотношения (3.1) и (3.2) в условия (2.42) получим систему уравнений, решение которой дает неизвестные постоянные:

$$C_2 = -\frac{q_2 l^4}{24B_2} \left[1 - \frac{12}{l^2} \left(\frac{D_4}{B_2} + 2 \frac{H_4 - B_4}{hl^2} + \frac{D_2}{h} \right) \right]; \quad (3.3)$$

$$u|_{x=0, z=z_1} = -\frac{q_2 z_1 l^4}{24B_2} \left[1 - \frac{12}{l^2} \left(\frac{D_4}{B_2} - \frac{D_3}{z_1 B_0} \right) \right]; \quad (3.4)$$

$$w|_{z=z_1, x=0} = -\frac{q_2 l^5}{30B_2} \left[1 - \frac{5}{l^2} \left(\frac{2D_4}{B_2} + 6 \frac{H_4 - B_4}{hl^2} + \frac{3D_2}{h} \right) \right]. \quad (3.5)$$

В соотношениях (3.3) – (3.5) использованы обозначения определенных интегралов

$$D_2 = \int_{z_1}^{z_2} \left[\frac{1}{\mu_{xz}^G} \int_{z_1}^z (z\mu_x^E) dz - \int_{z_1}^z (z\mu_x^V) dz \right] dz;$$

$$B_4 = \int_{z_1}^{z_2} \left\{ \frac{1}{\mu_{xz}^G} \int_{z_1}^z \left[\mu_x^E \left(\psi_3 + \frac{D_4}{B_2} z - \frac{D_3}{B_0} \right) \right] dz \right\} dz; \quad (3.6)$$

$$H_4 = \int_{z_1}^{z_2} \int_{z_1}^z \left[\frac{1}{\mu_z^E} \int_{z_1}^z (z\mu_x^E) dz dz + \mu_{xz}^V \left(\psi_3 + \frac{D_4}{B_2} z - \frac{D_3}{B_0} \right) \right] dz dz.$$

Для композитного бруса, состоящего из мало податливых деформациям поперечного обжатия слоев, величина $w|_{z=z_1, x=0}$ будет мало отличаться от значения стрелы прогиба f . В таком случае на основе (3.5) можно записать

$$f \approx -\frac{q_2 l^5}{30B_2} \left[1 - \frac{5}{l^2} \left(\frac{2D_4}{B_2} + 6 \frac{H_4 - B_4}{hl^2} + \frac{3D_2}{h} \right) \right]. \quad (3.7)$$

Для однородного ортотропного и изотропного бруса соотношение (3.7), соответственно, преобразуется к виду

$$f \approx \frac{q_2 b l^5}{30E_x J_y} \left\{ 1 + \left[\frac{1}{4} \left(\left(\frac{E_x}{G_{xz}} + 3\nu_{xz} \right) \frac{h^2}{l^2} + \frac{3E_x}{2E_z} \frac{h^4}{l^4} \right) \right] \right\}; \quad (3.8)$$

$$f \approx \frac{q_2 b l^5}{30E J_y} \left\{ 1 + \left[\frac{1}{4} \left((2 + 5\nu) \frac{h^2}{l^2} + \frac{3}{2} \frac{h^4}{l^4} \right) \right] \right\}, \quad (3.9)$$

где $J_y = bh^3/12$.

Следует отметить, что если в (3.8) отбросить податливость материала бруса деформациям поперечного сдвига и обжатия ($G_{xz}, E_z \rightarrow \infty; \nu_{xz}, \nu_{zx} \rightarrow 0$), то получим соотношение, известное из курса сопротивления материалов:

$$f = \frac{q_2 b l^5}{30E_x J_y}, \quad (3.10)$$

что косвенно подтверждает корректность полученного решения.

Сравнивая соотношения (3.8) с (3.10), можно отметить, что выражения в квадратных скобках являются относительным уточнением величины стрелы прогиба бруса, которое дает «классическая модель изгиба». Такое уточнение для длинных брусьев с большим отношением l/h будет незначительным, однако, с его уменьшением, особенно для анизотропных брусьев, быстро достигает значительных величин. Например, для изотропного стального бруса ($E/G = 2,5$) с $l/h = 10$ уточнение стрелы прогиба составит 0,8%, а при $l/h = 5$ – 3,3%. Для бруса из стеклопластика ($E_x/G_{xz} = 8,2$; $E_x/E_z = 3,3$) уточнение составит: при $l/h = 10$ – 2,3%, при $l/h = 5$ – 9,4%. Для углепластикового бруса ($E_x/G_{xz} = 26,0$; $E_x/E_z = 15,6$) получим: при $l/h = 10$ – 6,8%, при $l/h = 5$ – 27,9%.

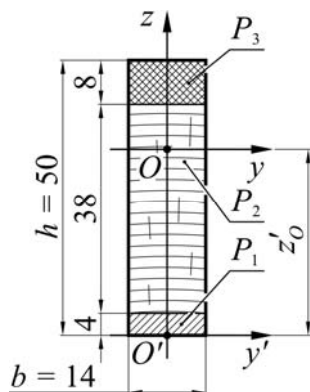


Рис. 3

§4. Пример реализации решения.

Для апробации решения применим полученные теоретические соотношения для определения НДС трехслойной консоли длиной $l = 0,25$ м, с поперечным сечением, изображенным на рис. 3. Для нагрузок (1.2) приняты следующие значения коэффициентов: $q_2 = -3,75$ МПа/м; $q_1 = -1,85$ МПа/м.

Материалы слоев и их упругие характеристики: алюминиевый сплав (слой P_1): $E_x^{[1]} = E_z^{[1]} = 70$ ГПа;

$$G_{xz}^{[1]} = 26,9 \text{ ГПа}; \nu_{xz}^{[1]} = 0,34;$$

древесина (слой P_2): $E_x^{[2]} = 12,1 \text{ ГПа}$; $E_z^{[2]} = 0,69 \text{ ГПа}$; $G_{xz}^{[2]} = 1,21 \text{ ГПа}$; $\nu_{xz}^{[2]} = 0,49$;

углепластик (слой P_3): $E_x^{[3]} = 142,8 \text{ ГПа}$; $E_z^{[3]} = 9,13 \text{ ГПа}$; $G_{xz}^{[3]} = 5,49 \text{ ГПа}$; $\nu_{xz}^{[3]} = 0,32$.

Поскольку соотношения для параметров НДС были получены в главной системе координат, для их применения необходимо определить положение центра жесткости сечения O . С использованием методики приведенной в [8] во вспомогательной системе $y'O'z$ была определена координата центра жесткости сечения: $z'_O = 0,0338 \text{ м}$ (рис. 3).

Функции упругих характеристик μ_a^S , сформированные согласно (1.1), имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \mu_a^S = & S_a^{[1]}(H(z+0,0338) - H(z+0,0298)) + \\ & + S_a^{[2]}(H(z+0,0298) - H(z-0,0082)) + S_a^{[3]}(H(z-0,0082) - H(z-0,0161)), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $S_a^{[k]} = E_x^{[k]}, E_z^{[k]}, G_{xz}^{[k]}, \nu_{xz}^{[k]}$.

Также были сформированы дополнительные функции упругих характеристик: $S_a^{[k]} = \nu_{xz}^{[k]}/E_x^{[k]}, 1/E_z^{[k]}, 1/G_{xz}^{[k]}$, которые использованы вместо соответствующих отношений функций μ_a^S во избежание проблем при их интегрировании.

Применение (4.1) в соотношениях (2.21) и (2.28), позволило получить необходимые значения постоянных, которые характеризуют жесткость слоистого бруса:

$$B_0 = 1,8822 \cdot 10^9 \text{ Н/м}; B_1 = 0,0000 \text{ Н}; B_2 = -5,6861 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$D_0 = 2,2540 \cdot 10^{-2} \text{ м}; D_1 = -2,1392 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2; D_2 = -4,0616 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3; \quad (4.2)$$

$$D_3 = -5,4024 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{м}^2; D_4 = -5,2725 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}^3.$$

После подстановки соответствующих функций (4.1) и постоянных (4.2) в соотношения (2.23) и (2.29) получены функции $Z_{xz}^{\tau^2}$ и $Z_{xz}^{\tau^0}$. Их графики приведены на рис. 4.

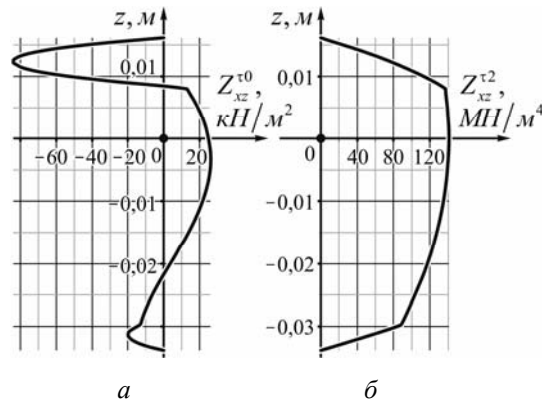


Рис. 4

Согласно (2.29) и (2.31) график на рис. 4, *a* показывает распределение самоуравновешенной касательной нагрузки q_{xz1} на свободном торце.

Параметры НДС бруса можно получить, подставив функции $Z_{xz}^{\tau^2}$ и $Z_{xz}^{\tau^0}$ в соотношения (2.6), (2.9), или подставив функции механических характеристик (4.1) и постоянные (4.2), непосредственно, в соотношения (2.30), (2.32) и (2.33).

Графики распределения продольного модуля упругости μ_x^E и нормальных напряжений σ_x в отдельных сечениях бруса, приведены на рис. 5. Здесь для сравнения, штриховой линией нанесены графики распределения напряжений в случае пренебрежения податливостью материала бруса деформациям сдвига и обжатия, что соответствует гипотезе плоских сечений.

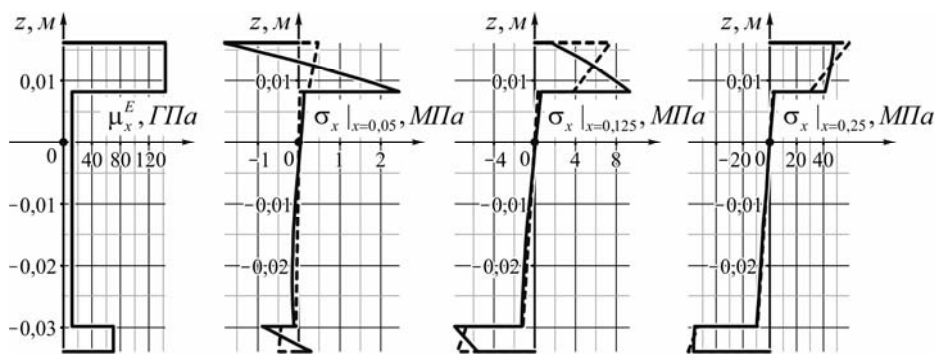


Рис. 5

Как видим, на границах разделения слоев напряжения σ_x скачкообразно изменяют свою величину, однако нет пропорциональной зависимости с изменением продольного модуля упругости μ_x^E , поскольку соотношение (2.32) учитывает влияние всех механических характеристик.

Графики на рис. 5 показывают, что использование гипотезы плоских сечений приводит к значительным погрешностям при определении величины и характера распределения напряжений σ_x .

В закрепленном сечении это приводит к завышенным значениям максимальных напряжений на продольных поверхностях (на 6,9% для слоя P_1 и 23,7% для слоя P_3), а в средней части бруса – к смещению максимума напряжений к внешней поверхности крайних слоев при существенном его уменьшении.

Графики распределения напряжений обжатия σ_z и касательных напряжений τ_{xz} приведены на рис. 6.

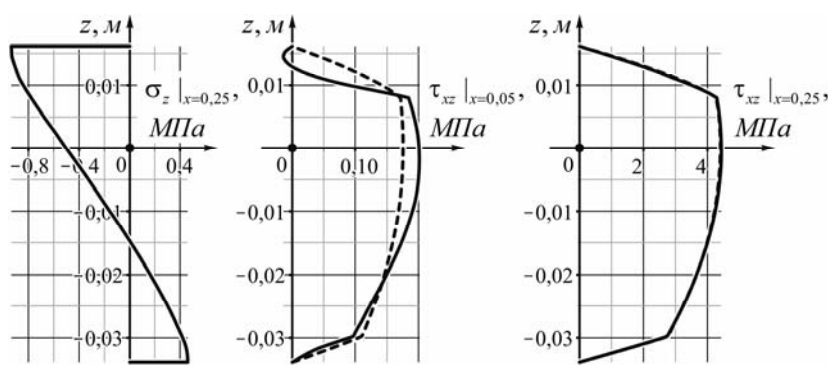


Рис. 6

Распределения напряжений σ_z подобны во всех сечениях бруса и не зависят от податливости материалов его слоев деформациям сдвига и поперечного обжатия.

Существенное отличие распределений касательных напряжений τ_{xz} , полученных с использованием точного решения (сплошная линия) и решения с применением ги-

потезы плоских сечений (штриховая линия), наблюдается только вблизи свободного торца, где напряжения малы по величине.

Распределения линейных и угловых деформаций получены подстановкой (4.1) и (4.2) в соотношения (2.43) – (2.45). Графики продольных линейных деформаций ϵ_x для отдельных сечений бруса приведены на рис. 7.

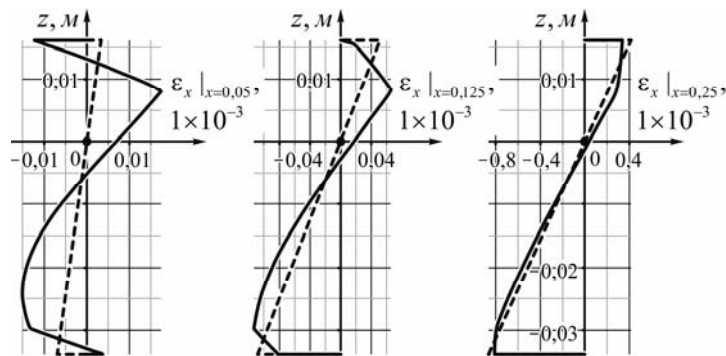


Рис. 7

Подстановкой (4.1), (4.2) и функций $Z_{xz}^{\tau_2}$ и $Z_{xz}^{\tau_0}$ в соотношения (2.40), (2.41), (2.12) и (2.13) получены общие решения для перемещений u и w , а с использованием условий (2.42) определены неизвестные постоянные

$$C_2 = -1,2767 \cdot 10^{-3}; u|_{x=0, z=z_1} = 4,7440 \cdot 10^{-5} \text{ м}; w|_{z=z_1, x=0} = -4,7504 \cdot 10^{-4} \text{ м}. \quad (4.3)$$

Графики распределения перемещений для отдельных сечений и продольных волокон бруса приведены на рис. 8

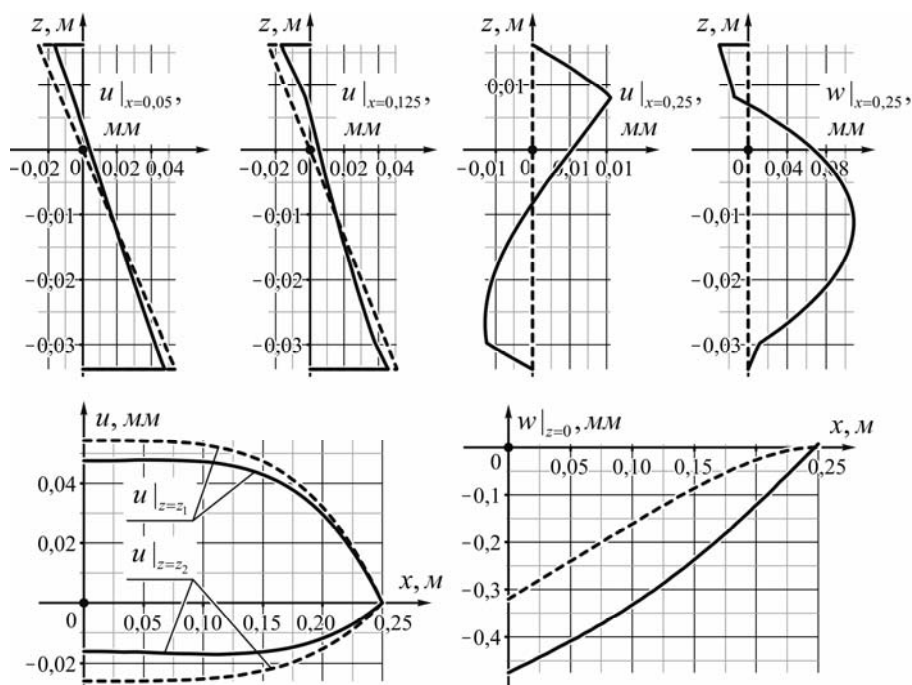


Рис. 8

Распределения продольных перемещений u по высоте сечений показывают наличие депланации поперечных сечений бруса, которая увеличивается по мере приближения к закреплению.

Использование гипотезы плоских сечений приводит к значительному изменению величины и характера распределения продольных u и поперечных перемещений w . Для перемещений u пренебрежение податливостью материалов слоев деформациям поперечного сдвига и обжатия приводит к увеличению максимальных значений, а для поперечных – к уменьшению. При этом существенно меняется форма искривленной оси бруса и величина стрелы прогиба бруса уменьшается на 48%.

С использованием полученных соотношений для перемещений была построена форма бруса после деформации с увеличением перемещений в 200 раз (рис. 9, а). Для сравнения на рис. 9, б приведена форма бруса после деформации, которая отвечает гипотезе плоских сечений.

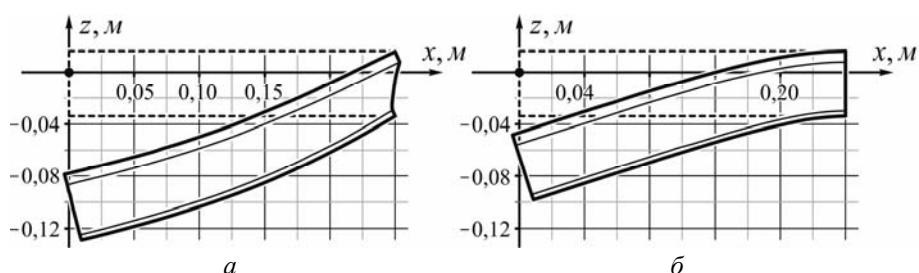


Рис. 9

Необычная кривизна продольных граней бруса на рис. 9, а и значительное искривление его поперечных сечений, которые получены в результате применения точного решения, возникают вследствие большой податливости материалов слоев деформациям поперечного сдвига и обжатия, а также малого отношения l/h .

Дополнительные расчеты показали, что с ростом l , при прочих одинаковых исходных данных, форма бруса после деформации приобретает более привычные очертания и только при $l/h > 20$ исчезают видимые отличия от формы, которую дает упрощенное решение с использованием гипотезы плоских сечений.

Заключение.

Таким образом, в данной работе поставлена и решена методами линейной теории упругости задача определения НДС при плоском изгибе консольного слоистого бруса малой ширины, под действием линейно распределенных нагрузок на продольных гранях, при абсолютно жестком соединении слоев. Полученные соотношения для параметров НДС (2.30), (2.32), (2.33), (2.12), (2.13), (2.40), (2.41), (2.43) – (2.45) составляют точное решение задачи теории упругости в случае, если на незакрепленном торце действует касательная нагрузка (2.31) с нулевой равнодействующей. Построенное решение позволяет учитывать произвольное количество и порядок чередования слоев, а также ортотропию упругих характеристик их материалов.

Теоретические соотношения реализованы при определении НДС трехслойной короткой консоли. Полученные результаты показывают существенное влияние податливости материала слоев деформациям поперечного сдвига и обжатия на распределение нормальных напряжений σ_x . В то же время, напряжения поперечного обжатия σ_z и касательные напряжения τ_{xz} , могут с достаточной для практики точностью определяться с использованием гипотезы плоских сечений.

Податливость материала бруса деформациям сдвига и обжатия также существенно влияет на распределение и максимальные значения продольных перемещений u и, особенно, поперечных перемещений w .

Полученное решение может быть использовано для прогнозирования прочности и жесткости многослойных консольных брусьев в условиях плоского изгиба, а также разработки прикладных методов расчета таких элементов конструкций.

РЕЗЮМЕ. Наведено точний розв'язок для задачі пружного плоского згину шаруватого композитного бруса малої ширини під дією нормального навантаження, розподіленого на поздовжніх гранях по лінійному закону. Визначальні співвідношення для параметрів напружено-деформованого стану отримано шляхом прямого розв'язання плоскої задачі теорії пружності з врахуванням ортотропії пружних властивостей матеріалів шарів бруса та їх зміни по висоті поперечного перерізу за кусково-постійним законом. Отриманий аналітичний розв'язок дає розподіл напружень і переміщень в точках бруса по всьому пакету шарів і дозволяє виконувати практичні розрахунки на міцність і жорсткість, а також будувати розв'язки різних прикладних задач плоского згину композитних брусів.

1. *Лехницький С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
2. *Лехницький С.Г.* Анизотропные пластинки. – М.: – Л.: ОГИЗ Гостехиздат, 1947. – 355 с.
3. *Мусхелишвили Н.И.* К задаче кручения и изгиба упругих брусьев, составленных из различных материалов // Изв. Акад. наук СССР. VII серия. Отделение математических и естественных наук. – 1932. – Вып. 7. – С. 907 – 945.
4. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
5. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
6. *Филоненко-Бородич М.М.* Теория упругости. – М.: Гос. изд.-во физ.-мат. лит., 1959. – 364 с.
7. *Goryk A.V.* Modeling Transverse Compression of Cylindrical Bodies in Bending // Int. Appl. Mech. – 2001. – **37**, N 9. – P. 1210 – 1221.
8. *Goryk A.V., Kovalchuk S.B.* Elasticity theory solution of the problem on plane bending of a narrow layered cantilever beam by loads at its free end // Mech. Compos. Mater. – 2018. – **54**, N 2. – P. 179 – 190.
9. *Goryk A.V., Kovalchuk S.B.* The solution of the problem of plane transverse bending of a layered cantilever beam under the action of a normal uniform load // Strength of Materials. – 2018. – **50**, N 3. – P. 406 – 418.
10. *Pagano N.J.* Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending // J. Comp. Mater. – 1969. – N 3. – P. 398 – 411.
11. *Piskunov V.G.* An Iterative Analytical Theory in the Mechanics of Layered Composite Systems // Mech. Compos. Mater. – 2003. – **39**, N 1. – P. 1 – 16.
12. *Piskunov V.G., Grinevitskii B.V.* Variant of an Analytical Shear Model for the Stress-Strain State of Heterogeneous Composite Beams // Mech. Compos. Mater. – 2004. – **40**, N 5. – P. 409 – 418.
13. *Sayyad A.S., Ghugal Y.M.* Bending, buckling and free vibration responses of hyperbolic shear deformable FGM beams // Mech. of Advanced Composite Structures. – 2018. – **5**, N 1. – P. 13 – 24.
14. *Shvab'yuk V.I., Pasternak Ya.M., Rotko S.V.* Refined solution of the Timoshenko problem for an orthotropic beam on a rigid base // Materials Science. – 2010. – **46**, N 1. – P. 56 – 63.
15. *Timpe A.* Probleme der Spannungsverteilung in ebenen Systemen einfach gelöst mit Hilfe der Airyschen Funktion // Z. Math. Physik. – 1905. – **52**. – P. 348 – 383.

Поступила 06.06.2018

Утверждена в печать 05.11.2019