А . А . М а р т ы н ю к , В . А . Ч е р н и е н к о

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e–mail: martynyukanan@gmail.com

Abstract. For the polynomial systems of perturbed motion equations, a new estimate of the Lyapunov function along the solutions of the system under consideration equations is proposed. Basing on the obtained results, the conditions for the Lyapunov stability, practical stability and stability on a finite–time interval for the large initial disturbances are established.

Key words: polynomial systems, estimate of the Lyapunov function, stability by Lyapunov, practical stability, stability on a finite–time interval.

Введение.

Известно, что для ряда механических систем (низко-орбитальных искусственных спутников), в задачах небесной механики (задача трех тел) удовлетворительными моделями являются системы обыкновенных дифференциальных уравнений с полиномиальной правой частью (см. [2, 5] и библиографию там). А. Пуанкаре (см. [9], Гл. XVI, XVII) показал, что всякое дифференциальное уравнение при определенных условиях может быть сведено к полиномиальной форме при помощи введения дополнительных переменных.

При исследовании полиномиальных систем прямым методом Ляпунова центральной является проблема оценки изменения вспомогательной функции вдоль решений рассматриваемых уравнений. В настоящей работе на основе псевдо-линейного представления нелинейного интегрального неравенства получены новые границы изменения вспомогательной функции Ляпунова и приведены приложения при исследовании различных типов устойчивости движения.

Статья построена по следующему плану.

В разделе 1 формулируется постановка задачи об оценке функции Ляпунова для полиномиальной системы дифференциальных уравнений.

В разделе 2 приведена лемма об оценке функции Ляпунова для полиномиальной системы общего вида.

В разделе 3, на основе полученных оценок, приведены результаты исследования устойчивости по Ляпунову, практической устойчивости и устойчивости на конечном интервале при больших начальных возмущениях.

В разделе 4 приведены заключительные замечания к обсуждаемой проблеме.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим уравнения возмущенного движения некоторой механической системы в форме (см. [1] и библиографию, приведенную в [1])

$$\frac{dx_\beta}{dt} = \sum_{s=2h-1}^{2l-1} X_\beta^{(s)}\left(x, a^{(\beta)}_{i_1 i_2, \dots i_s}(t)\right); \tag{1}$$

$$x_\beta(t_0) = x_{\beta 0}, \ \ \beta = 1, 2, \dots, n, \tag{2}$$

где $x_\beta \in R, x \in R^n$, $a^{(\beta)}_{i_1,i_2,\dots i_s}(t)$ – вещественные ограниченные на любом конечном интервале функции времени, $x_1, \dots, x_n$ – отклонения переменных $x_\beta(t)$ от состояния $x(t)=0$ при любом $t \in R_+$, $0 < h \le l$ – целые положительные числа,

$$X^{(s)}_\beta\left(x, a^{(\beta)}_{i_1 i_2,\dots i_s}(t)\right) = \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=i_1}^{n}\dots\sum_{i_s=i_{s-1}}^{n} a^{(\beta)}_{i_1 i_2,\dots i_s}(t) x_{i_1} x_{i_2}\dots x_{i_s} \tag{3}$$

однородный полином от n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ с приведенными подобными членами, которые расположены в лексикографическом порядке.

Напомним, что лексикографический порядок $x_1 > x_2 > \dots > x_n$ задается правилом:

$$x_1^{k_1}\dots x_n^{k_n} > x_1^{l_1}\dots x_n^{l_n} \Leftrightarrow (\exists i : k_i > l_i \text{ и } k_j = l_j \text{ при } j < i).$$

Предположим, что некоторым способом для системы уравнений (1) построена полиномиальная функция $V(t,x) > 0$ при всех $x \in R^n \setminus 0$ и $t \in R_+$.

Напомним, что функция $V(t,x) > 0$, $V(t,0) = 0$, называется полиномиальной функцией Ляпунова, если $V(t,x)$ является полиномом некоторой четной степени и вместе с полной производной в силу системы (1) разрешает задачу об устойчивости (неустойчивости) состояния $x(t)=0$ системы (1).

Некоторые примеры полиномиальных функций Ляпунова приведены в работах [10, 11] и других, где обсуждаются некоторые их свойства.

Поставим задачу определения границы изменения функции $V(t,x)$ вдоль решений системы (1) при всех $t \in R_+$.

2. Оценка функции Ляпунова.

Для полной производной функции $V(t,x)$ по времени в силу системы (1)

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_\beta}\cdot\frac{dx_\beta}{dt}$$

предположим существование непрерывных неотрицательных функций $\psi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, m$ таких, что

$$\frac{dV(t,x)}{dt} \le \sum_{i=1}^{m}(\psi_i(t)V^i(t,x)) \tag{4}$$

при всех $(t,x) \in R_+ \times R^n$. Из неравенства (4) следует, что для функции $V(t,x) > 0$ верно неравенство

$$V(t,x(t)) \le V(t_0,x_0) + \int_{t_0}^{t}\sum_{i=1}^{m}(\psi_i(s)V^i(s,x(s)))ds \tag{5}$$

при всех $t \in R_+$. Имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть для системы (1) существует определенно положительная функция $V(t,x)$, и интегрируемые на R_+ неотрицательные функции $\psi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, m$ такие, что при всех $(t,x) \in R_+ \times R^n$ выполняется оценка (4).

Тогда граница изменения функции $V(t,x)$ вдоль решений полиномиальной системы (1) оценивается неравенством

$$V(t,x(t)) \le \frac{V(t_0, x_0)\exp\left(\int\limits_{t_0}^{t}\psi_1(s)ds\right)}{\left[1-(m-1)\int\limits_{t_0}^{t}\sum\limits_{i=2}^{m}V^{i-1}(t_0,x_0)\psi_i(s)\exp\left(\int\limits_{t_0}^{t}(m-1)\psi_1(\tau)d\tau\right)ds\right]^{\frac{1}{m-1}}} \tag{6}$$

для всех $t \in R_+$, для которых

$$N(t) = (m-1)\int\limits_{t_0}^{t}\sum\limits_{i=2}^{m}V^{i-1}(t_0,x_0)\psi_i(s)\exp\left(\int\limits_{t_0}^{t}(m-1)\psi_1(\tau)d\tau\right)ds < 1. \tag{7}$$

Доказательство. Оценку (5) перепишем в виде

$$V(t,x(t)) \le V(t_0,x_0) + \int\limits_{t_0}^{t}\left(\psi_1(s)V(s,x(s)) + \sum\limits_{i=2}^{m}\psi_i(s)V^i(s,x(s))\right)ds \tag{8}$$

и далее

$$V(t,x(t)) \le V(t_0,x_0) + \int\limits_{t_0}^{t}\left(\psi_1(s) + \sum\limits_{i=2}^{m}\psi_i(s)V^{i-1}(s,x(s))\right)V(s,x(s))ds. \tag{9}$$

Так как $V(t_0,x_0) > 0$, то к неравенству (9) применима лемма Гронуолла-Беллмана. В результате получим оценку

$$V(t,x(t)) \le V(t_0,x_0)\exp\left[\int\limits_{t_0}^{t}\left(\psi_1(s) + \sum\limits_{i=2}^{m}\psi_i(s)V^{i-1}(s,x(s))\right)ds\right] \tag{10}$$

при всех $(t,x) \in R_+ \times R^n$. Для оценки выражения

$$\exp\left[\int\limits_{t_0}^{t}\left(\sum\limits_{i=2}^{m}\psi_i(s)V^{i-1}(s,x(s))\right)ds\right]$$

в неравенстве (10) применим модификацию подхода из работ [15, 16]. Для любого $i = 2,\dots,m$ из неравенства (10) находим

$$V^{i-1}(t,x(t)) \le V^{i-1}(t_0,x_0)\exp\left[(i-1)\int\limits_{t_0}^{t}\left(\psi_1(s) + \sum\limits_{i=2}^{m}\psi_i(s)V^{i-1}(s,x(s))\right)ds\right] \le$$

$$\le V^{i-1}(t_0,x_0)\exp\left[(m-1)\int\limits_{t_0}^{t}\left(\psi_1(s) + \sum\limits_{i=2}^{m}\psi_i(s)V^{i-1}(s,x(s))\right)ds\right]. \tag{11}$$

Умножая обе части неравенства (11) на отрицательный множитель $-(m-1)\ \psi_i(t)$, получим оценку

$$-(m-1)\psi_i(t)V^{i-1}(t,x(t))\exp\left[-(m-1)\int\limits_{t_0}^{t}\sum\limits_{i=2}^{m}\psi_i(s)V^{i-1}(s,x(s))ds\right] \ge$$

$$\ge -(m-1)\psi_i(t)V^{i-1}(t_0,x_0)\exp\left[(m-1)\int\limits_{t_0}^{t}\psi_1(s)ds\right]. \tag{12}$$

Суммируя обе части неравенства (12) по i от 2 до $m,$ получаем неравенство

$$-(m-1)\sum_{i=2}^{m}\psi_i(t)V^{i-1}(t,x(t))\exp\left[-(m-1)\int_{t_0}^{t}\psi_i(s)V^{i-1}(s,x(s))ds\right]\geq$$

$$\geq -(m-1)\sum_{i=2}^{m}\psi_i(t)V^{i-1}(t_0,x_0)\exp\left[(m-1)\int_{t_0}^{t}\psi_1(s)ds\right]. \qquad (13)$$

Из неравенства (13) получаем

$$\exp\left[-(m-1)\int_{t_0}^{t}\sum_{i=2}^{m}\psi_i(s)V^{i-1}(s,x(s))ds\right]\geq$$

$$\geq 1-(m-1)\int_{t_0}^{t}\sum_{i=2}^{m}\psi_i(s)V^{i-1}(t_0,x_0)\exp\left[(m-1)\int_{t_0}^{t}\psi_1(\tau)d\tau\right]ds. \qquad (14)$$

Из неравенства (14) следует, что

$$\exp\left[\int_{t_0}^{t}\sum_{i=2}^{m}\psi_i(s)V^{i-1}(s,x(s))\,ds\right]\leq$$

$$\leq \frac{1}{\left\{1-(m-1)\int_{t_0}^{t}\sum_{i=2}^{m}\psi_i(s)V^{i-1}(t_0,x_0)\exp\left[(m-1)\int_{t_0}^{t}\psi_1(\tau)d\tau\right]ds\right\}^{\frac{1}{m-1}}}. \qquad (15)$$

Учитывая оценку (15), неравенство (10) принимает вид

$$V(t,x(t))\leq$$

$$\leq \frac{V(t_0,x_0)\exp\left[\int_{t_0}^{t}\psi_1(s)\,ds\right]}{\left\{1-(m-1)\int_{t_0}^{t}\sum_{i=2}^{m}\psi_i(s)V^{i-1}(t_0,x_0)\exp\left[(m-1)\int_{t_0}^{t}\psi_1(\tau)d\tau\right]ds\right\}^{\frac{1}{m-1}}}$$

при всех $t\in R_+$, для которых выполняется неравенство (7). Этим лемма 1 доказана.

Следствие 1. Пусть в оценке (9) функции $\psi_i(s)=0,$ $i=2,\dots,m,$ при всех $t\in R_+$. Тогда оценка (6) принимает вид

$$V(t,x(t))\leq V(t_0,x_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t}\psi_1(s)ds\right) \qquad (16)$$

при всех $t\in R_+$.

Следствие 2. Пусть в оценке (9) функция $\psi_1(t)=0$ при всех $t\in R_+$. Тогда оценка (6) принимает вид

$$V(t,x(t)) \le \frac{V(t_0,x_0)}{\left(1-(m-1)\int\limits_{t_0}^{t}\sum\limits_{i=2}^{m}\psi_i(s)V^{i-1}(t_0,x_0)ds\right)^{\frac{1}{m-1}}} \tag{17}$$

при всех $t \in R_+$, для которых

$$N^*(t) = (m-1)\int\limits_{t_0}^{t}\sum\limits_{i=2}^{m}\psi_i(s)V^{i-1}(t_0,x_0)ds < 1.$$

Вместе с оценкой (6) оценки (16), (17) позволяют рассматривать различные задачи качественного анализа движения полиномиальных систем вида (1).

Пример 1. Пусть возмущенное движение некоторой механической системы описывается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = a_1(t)x + a_2(t)x^3 + a_3(t)x^5; \tag{18}$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{19}$$

где $x \in R$, $a_i(t) \in C(R, R_+)$, $i = 1, 2, 3$.

Воспользуемся положительно определенной функцией $V(x) = x^2/2$, $x \in R$ и найдем оценку функции $V(x(t))$ на решении $x(t)$ задачи (18) – (19) на основе леммы 1. Производная этой функции в силу уравнения (18) имеет вид

$$\frac{dV(x(t))}{dt} = \sum_{i=1}^{3} a_i(t)V^i(x(t)). \tag{20}$$

Предположим, что

$$\tilde{N}(t) = \int\limits_{t_0}^{t}\sum_{i=2}^{3}V^i(x_0)a_i(s)\exp\left(2\int\limits_{t_0}^{t}a_1(\tau)d\tau\right)ds < \frac{1}{2} \tag{21}$$

при всех $t \in R_+$.

Согласно формулы (6) на решениях полиномиального уравнения (18) имеем оценку

$$V(x(t)) \le$$

$$\le \frac{V(x_0)\exp\left(\int\limits_{t_0}^{t}a_1(s)ds\right)}{\left[1-2\int\limits_{t_0}^{t}\sum\limits_{i=2}^{3}V^i(x_0)a_i(s)\exp\left(2\int\limits_{t_0}^{t}a_1(\tau)d\tau\right)ds\right]^{1/2}}$$

при всех $t \in R_+$, для которых выполняется условие (21).

Замечание 1. Если неравенство (21) выполняется на некотором конечном интервале, тогда оценка функции $V(x(t))$ имеет место на этом же интервале.

3. Приложения.

В этом разделе полученные оценки применяются в некоторых задачах теории устойчивости движения полиномиальных систем вида (1).

3.1. Устойчивость по Ляпунову. Напомним определение устойчивости по Ляпунову.

Определение 1. (см. [7]) Состояние $x = 0$ системы (1):

(a) устойчиво, если для заданных $\varepsilon \in (0, H)$ и $t_0 \in R_+$ найдется $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$, такое, что для всех $x_0 \in B_\delta$ имеет место неравенство $\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$ при всех $t \in R_+$.

(б) равномерно устойчиво, если в определении 1(а) величина δ не зависит от t_0, т.е. $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Здесь и далее $B_\delta = \{x \in R^n : \|x\| < \delta\}$ – открытая область в R^n.

Определение 2. (см. [12]) Функция $a : R_+ \to R_+$ непрерывная, строго возрастающая и удовлетворяющая условию $a(0) = 0$ принадлежит K –классу Хана.

Обозначим Ω область в пространстве R^n, содержащую состояние $x = 0$ системы (1).

Теорема 1. Пусть для системы (1) построена функция $V(t,x)$ и существуют функции $a, b \in K$ –классу Хана такие, что

(1) $a(\|x\|) \le V(t,x) \le b(\|x\|)$ при любых $(t,x) \in R_+ \times \Omega$;

(2) существуют положительные непрерывные функции $\psi_i(t), i = 1,2,\dots,m$ и выполняется неравенство (4);

(3) выполняются все условия леммы 1;

(4) для заданных $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in R_+$ существует $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ такое, что

$$\exp\left(\int_{t_0}^{t} \psi_1(s)ds\right)(1 - N(t))^{-\frac{1}{m-1}} < \frac{a(\varepsilon)}{b(\delta)}$$

при всех $t \in R_+$.

Тогда состояние $x = 0$ полиномиальной системы (1) устойчиво по Ляпунову.

Доказательство. Пусть заданы $t_0 \in R_+$ и $\varepsilon \in (0, H)$, $H = \text{const} > 0$. Из условия (1) теоремы 1 следует, что $V(t_0, x_0) \le b(\|x_0\|)$ при всех $x_0 \in B_\delta$. При выполнении условий (2), (3) верна оценка (6) вдоль решения $x(t, t_0, x_0)$ для любых $x_0 \in B_\delta$ и $t_0 \in R_+$. Из условия (1) теоремы следует, что

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \le a^{-1}(V(t, x(t, t_0, x_0))) \text{ при всех } t \in \mathrm{R}_+.$$

Из оценки (6) при выполнении условия (4) теоремы 1 имеем

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \le a^{-1}(V(t, x(t, t_0, x_0))) < a^{-1}(a(\varepsilon)) = \varepsilon$$

при всех $t \in R_+$. Так как $a \in K$ –классу Хана, то $\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$ при всех $t \in R_+$.

Теорема 1 доказана.

3.2. Практическая устойчивость. Напомним определение практической устойчивости.

Определение 3. (см. [13]) При заданных оценках величин (λ, A), $0 < \lambda < A$, полиномиальная система (1) практически устойчива, если для решения $x(t) = x(t, t_0, x_0)$, начинающегося в области $\|x_0\| < \lambda$, оценка $\|x(t, t_0, x_0)\| < A$ выполняется при всех $t \in R_+$.

Определение 4. (см. [8]) Функция Ляпунова $V(t, x)$ называется локально большой, если для любого $0 < c < \infty$ и $t_0 \ge 0$ существует $\Delta = \Delta(t_0, c) > 0$ такое, что вне сферы $G_\Delta = \{x \in R^n : \|x\| < \Delta\}$ выполняется неравенство $V(t,x) > c$ при всех $t \ge t_0$.

Замечание 2. Для корректного анализа практической устойчивости функции Ляпунова должны быть такими, чтобы поверхности уровня $V(t, x) = c$ были замкнутыми.

Замечание 3. Локально большие функции Ляпунова занимают промежуточное место между функциями Ляпунова [7] и бесконечно большими функциями в смысле Барбашина-Красовского (см. [3]).

Замечание 4. Отсутствие такого условия в исследованных по практической устойчивости оправдано лишь для случая применения определенно положительной функции Ляпунова в виде квадратичной формы, которая является бесконечно большой (см. [3], стр. 45) и, следовательно, и локально большой.

Теорема 2. Пусть для системы (1) построена локально большая функция Ляпунова $V(t, x)$ и существуют функции $a \in K$ – класса Хана и $b \in CK$ – класса Хана (см. [14]) такие, что

(1) $a(\|x\|) \le V(t, x) \le b(t, \|x\|)$ при всех $(t, x) \in R_+ \times \Omega$;

(2) выполняются условия (2), (3) теоремы 1;

(3) при заданных оценках величин (λ, A) выполняется неравенство

$$\exp\left(\int_{t_0}^{t} \psi_1(s)ds\right)(1 - N(t))^{-\frac{1}{m-1}} < \frac{a(A)}{b(t_0, \lambda)}$$

при всех $t \in R_+$.

Тогда полиномиальная система (1) практически устойчива.

Доказательство. Пусть заданы величины (λ, A). Из непрерывности $V(t,x)$ и того, что $V(t,0) = 0$ следует, что

$$V(t_0, x_0) < b(t_0, \|x_0\|) \text{ при } \|x_0\| < \lambda.$$

Из условия (2) теоремы 2 следует, что вдоль решения $x(t,t_0, x_0)$ при $\|x_0\| < \lambda$ выполняется оценка (6) для функции $V(t, x(t))$ при всех $t \in R_+$. Учитывая условие (1) теоремы 2, получаем

$$\|x(t)\| \le a^{-1}(V(t, x(t))) < a^{-1}(a(A)) = A \tag{22}$$

при всех $t \in R_+$. Так как $a \in K$ –классу Хана оценка (22) завершает доказательство теоремы 2.

3.3. Устойчивость на конечном интервале. Теория устойчивости движения на конечном интервале имеет тесную связь с теорией практической устойчивости движения.

Определение 5. (cf. [8]) При заданных оценках величин (c_1, c_2, t_0, T) полиномиальная система (1) является устойчивой на конечном интервале по отношению к локально большой функции $V(t, x)$ если из условия $V(t_0, x_0) \le c_1$ следует, что $V(t, x(t)) < c_2$, $(c_1 < c_2)$ при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$ для решения $x(t) = x(t, t_0, x_0)$.

Замечание 5. Если в определении 5 постоянные $c_1 = c_2 = c$, где c – сколь угодно малая положительная величина, тогда определение 5 обращается в определение 20 из монографии [4], стр. 157.

Теорема 3. Пусть для системы (1) построена локально большая функция $V(t, x)$ и кроме того:

(1) выполняются все условия следствия 2;

(2) при заданных оценках величин (c_1, c_2, t_0, T) выполняется неравенство

$$(N^*(t))^{-\frac{1}{m-1}} < \frac{c_2}{c_1} \tag{23}$$

при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$.

Тогда полиномиальная система (1) устойчива на конечном интервале в смысле определения 5.

Доказательство. Пусть решение $x(t,t_0,x_0)$ системы (1) выходит из области $V(t_0,x_0)\le c_1$ при $t=t_0$. Согласно условий следствия 2 верна оценка (17) вдоль решения $x(t,t_0,x_0)$ системы (1). Из условия (2) теоремы 3 следует, что при всех $t\in[t_0,t_0+T]$ верна оценка

$$V(t,x(t,t_0,x_0))<c_2,$$

т.е. полиномиальная система (1) устойчива на конечном интервале в смысле определения 5.

Пример 2. Пусть система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{dt}=x_1+(x_1^2+3x_1x_2^2)(u(t)+p(t))\,; \tag{24}$$

$$\frac{dx_2}{dt}=x_2+(x_2^3-x_1^2x_2)(u(t)+p(t));\;\; x_1(t_0)=x_{10};\;\; x_2(t_0)=x_{20} \tag{25}$$

описывает некоторую позиционную дифференциальную игру (см. [6]). Здесь $t\in J$ и функции $u(t):J\to[-\alpha,\alpha]$, $p(t):J\to[-\beta,\beta]$, $\alpha,\beta>0$, $\alpha>\beta$, $J=[t_0,t_0+T]$.

Для положительно определенной функции $V(x)=x_1^2+x_2^2$ имеем соотношение

$$\frac{dV(x(t))}{dt}=2x_1^2\left[1+(x_1^2+3x_2^2)(u(t)+p(t))\right]+$$

$$+2x_2^2\left[1+(x_2^2-x_1^2)(u(t)+p(t))\right]=2\left[V(x)+V^2(x)(u(t)+p(t))\right]. \tag{26}$$

Из (26) следует, что

$$V(x(t))=V(x_0)+\int_{t_0}^{t}\left[2V(x(s))+2(u(t)+p(t))V^2(x(s))\right]ds\,. \tag{27}$$

Согласно леммы 1 статьи [20] получим

$$V(x(t))=V(x_0)\exp\left[\int_{t_0}^{t}\psi_1(\tau)d\tau\right]ds(L(t))^{-1} \tag{28}$$

для всех $t\in R_+$, для которых

$$L(t)=V(x_0)\int_{t_0}^{t}\psi_2(s)\exp\left[\int_{t_0}^{t}\psi_1(\tau)d\tau\right]ds<1\,, \tag{29}$$

где $\psi_1(t)=2$; $\psi_2(t)=2(u(t)+p(t))$.

Из соотношения (28) следует, что позиционная дифференциальная игра (24) – (25) устойчива в смысле определения 5 если при всех $t\in[t_0,t_0+T]$ выполняется условие (29) и при заданных (c_1,c_2,t_0,T) имеет место неравенство

$$(L(t))^{-1}<\frac{c_2}{c_1}$$

при всех $t\in[t_0,t_0+T]$.

4. Заключительные замечания.

Оценки функции Ляпунова вида (6), (16), (17) для полиномиальной системы (1) позволяет решить некоторые задачи теории устойчивости для этого класса системы на основе функции Ляпунова в виде полинома от многих переменных. Предложенные оценки основаны на псевдо-линейном представлении нелинейных интегральных неравенств (см. [15, 16] и библиографию там) и развивают исследования, начатые в статьях [20, 21].

В связи с развитием предложенного подхода представляют интерес его применение для исследования задач расмотренных в работах [17 – 19]. При новых предположениях об исследуемых системах. Кроме того представляет интерес получение условий ограниченности движения, анализ устойчивости движения полиномиальной системы (1) при интервальных начальных условиях и другие.

РЕЗЮМЕ. Для поліноміальних систем рівнянь збуреного руху запропонована нова оцінка функції Ляпунова вздовж розв'язків розглядуваної системи рівнянь. На основі отриманих оцінок встановлено умови стійкість руху за Ляпуновим, практичної стійкості та стійкості на скінченному інтервалі часу при великих початкових збуреннях.

1. *Аминов А.Б.* Устойчивость систем автоматического управления с полиномиальной моделью // Автоматика и телемеханика. –1991. Вып. 10.– 52. – С. 44 – 51.
2. *Бабаджанянц Л.К.* Метод дополнительных переменных // Вестник Санкпетербургского ун-та, Серия 10, – 2009. Вып. 4, – С. 3 – 11.
3. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 223с.
4. *Зубов В.И.* Математические методы исследования систем автоматического регулирования. – Л.: Машиностроение, 1974. – 334 с.
5. *Красовский А.А.* Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. – М.: Наука, 1973. – 558 с.
6. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. – М.: Наука, 1974. – 456 с.
7. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. – М.-Л.: Гостехиздат, 1950. – 386 с.
8. *Мартынюк А.А.* Техническая устойчивость в динамике. – К.: Техника, 1973. – 188 с.
9. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. – М.-Л.: Гостехиздат, 1947. – 392 с.
10. *Сиразетдинов Т.К., Аминов А.Б.* К задаче построения функций Ляпунова при исследовании устойчивости в целом решений систем с полиномиальной правой частью. В кн. Метод функций Ляпунова и его приложения, Отв. ред. В.М. Матросов, С.Н. Васильев. – Новосибирск: Наука, 1984. – С. 72 – 74.
11. *Ahmadi A.A., Jungers R.M.* Lower Bounds on Complexity of Lyapunov Functions for Switched Linear Systems. – Princeton: Princeton University, 2019. – 21 p.
12. *Hahn W.* Stability of Motion. – Berlin: Springer-Verlag, 1967. – 446 p.
13. *Lakshmikantham V., Leela S., Martynyuk A.A.* Practical Stability of Nonlinear Systems. – Singapore: World Scientific, 1990. – 207 p.
14. *Lakshmikantham V., Leela S., Martynyuk A.A.*. Stability Analysis of Nonlinear Systems. Second Edition. – Berlin: Birkhouser, 2015. – 329 p.
15. *Louartassi Y., Mazoudi E.H.E., Elalami N.* A new generalization of lemma Gronwall-Bellman // Appl. Math. Scie.– 2012. – 6. – P. 621 – 628.
16. *Martynyuk A.A.* Novel bounds for solutions of nonlinear differential equations // Appl. Math.. – 2015. – 6. – P. 182 – 194.
17. *Martynyuk A.A., Babenko E.A.* Robust Stabilization of Bilinear Systems under Interval Initial Conditions // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 4. – P. 454 – 463.
18. *Martynyuk A.A., Chernetskaya L.N., Martynyuk-Chernienko Yu. A.* Stabilization of the Motion of Pseudo-Linear Affine Systems // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 3. – P. 334 – 341.
19. *Martynyuk A.A., Nikitina N.V.* On the Qualitative Analysis of one Model of Transport Vehicle // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 2. – P. 231 – 238.
20. *Martynyuk A.A., Khusainov D.Ya., Chernienko V.A.* Constructive Estimation of the Lyapunov Function for Quadratic Nonlinear Systems // Int. Appl. Mech. – 2018. –**54**, N 3. – P. 346 – 357.
21. *Martynyuk A.A., Khusainov D.Ya., Chernienko V.A.* Integral estimates of solutions to nonlinear systems and their applications // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. – 2016. – 16 (1). – P. 1 – 11.

Поступила 29.05.2018 Утверждена в печать 05.11.2019