

А. Н. Гузь, А. М. Багно

**ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ НА КВАЗИЛЭМБОВСКИЕ
МОДЫ В ГИДРОУПРУГИХ ВОЛНОВОДАХ**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: alexbag2016@gmail.com*

Abstract. The problem of quasi-Lamb waves propagation in a pre-deformed compressible elastic layer that interacts with a half-space of an ideal compressible fluid and in a pre-deformed compressible elastic half-space that interacts with a layer of an ideal compressible fluids is studied. The study is carried out basing on the three-dimensional linearized equations of the theory of elasticity of finite deformations for the compressible elastic solid and the three-dimensional linearized Euler equations for the ideal compressible fluid. A problem statement and an approach, based on the representations of general solutions of the linearized equations for elastic solid and fluid are used. The dispersion equations, which describe a propagation of quasi-Lamb waves in the hydroelastic systems are obtained in the wide frequency range. An effect of the initial stresses as well as the thickness of elastic layer and layer of ideal compressible fluid on the phase velocities of quasi-Lamb modes are analyzed. A criterion of existence of the quasi-Lamb waves in the hydroelastic waveguides is proposed. The developed approach and the findings make it possible to establish the limits of applicability of the models of wave processes, based on different versions of the theory of small initial deformations, as well on the classical theory of elasticity. The numerical results are presented in the form of graphs, and their analysis is given.

Key words: compressible elastic layer, compressible elastic half-space, half-space of ideal compressible fluid, layer of ideal compressible fluid, initial stresses, quasi-Lamb waves.

Введение.

Закономерности распространения поверхностных акустических волн широко используются в сейсмологии, сейсморазведке, гидроакустике, а также при разработке ультразвуковых неразрушающих методов выявления дефектов и определения напряжений в материалах и элементах конструкций [1, 16, 17, 21, 22, 27 – 31, 33 – 35]. Значительное практическое использование поверхностных волн ставит задачу более полного учета свойств реальных упругих сред. К числу таких факторов принадлежат начальные напряжения в твердом теле. Созданные целенаправленно или возникшие в результате технологических операций при изготовлении, они оказывают существенное влияние на волновые процессы. Рассмотренные задачи и результаты, полученные с учетом в упругих телах начальных напряжений, приведены в [3, 4, 6 – 8, 10 – 12, 14, 15, 18, 19, 23 – 26, 32].

В данной работе для исследования распространения квазилэмбовских мод в гидроупругих волноводах, состоящих из полупространства жидкости и упругого слоя, а также из упругого полупространства и жидкого слоя, привлекаются модели предварительно напряженного тела и идеальной сжимаемой жидкости. При этом используются трехмерные линеаризованные уравнения теории упругости конечных деформаций для упругого тела и трехмерные линеаризованные уравнения Эйлера для жидкости. Предполагается, что жидкость находится в состоянии покоя. В качестве подхода выбраны постановки задач и метод, основанные на применении представлений общих решений

уравнений движения идеальной сжимаемой жидкости и предварительно напряженного сжимаемого упругого тела, предложенные в работах [3 – 9, 18 – 20].

§1. Постановка задачи. Основные уравнения.

Далее рассматриваем такие динамические процессы в гидроупругой системе, при которых возникающие дополнительные деформации, т.е. возмущения деформаций, значительно меньше начальных. Исследуем гармонические волновые процессы малой амплитуды. При этом примем, что упругое тело находится в начальном состоянии. Заметим, что в отличие от упругих тел, соотношения которых записаны в лагранжевых координатах, равенства для жидкой среды записываются в эйлеровых координатах, введенных в естественном состоянии жидкости. Следует подчеркнуть, что начальное состояние упругого тела при рассмотрении гидроупругой задачи является естественным состоянием по отношению к жидкости и системе в целом. Поскольку в дальнейшем исследуем распространение малых возмущений, то, как известно, в этом случае подходы Эйлера и Лагранжа в описании поведения сред совпадают. Поэтому в дальнейшем не делаем различий между лагранжевыми и эйлеровыми координатами и характерные для нелинейных задач трудности при записи граничных условий при указанных двух подходах не возникают.

Далее предположим, что изотропное нелинейно-упругое твердое тело, упругий потенциал которого является произвольной дважды непрерывно-дифференцируемой функцией компонент тензора деформаций Грина, занимает объем $(-\infty < z_1 < \infty, -h \leq z_2 \leq 0, -\infty < z_3 < \infty)$ и контактирует с полупространством идеальной сжимаемой жидкости, заполняющей объем $(-\infty < z_1 < \infty, 0 \leq z_2 < \infty, -\infty < z_3 < \infty)$. В случае второй гидроупругой системы жидкий слой заполняет объем $(-\infty < z_1 < \infty, 0 \leq z_2 \leq h, -\infty < z_3 < \infty)$ и взаимодействует с упругим полупространством, занимающим объем $(-\infty < z_1 < \infty, -\infty < z_2 \leq 0, -\infty < z_3 < \infty)$. Примем, что внешние силы, действующие на указанные среды, распределены равномерно вдоль оси Oz_3 . В этом случае задача является плоской и можно ограничиться изучением процесса распространения возмущений в плоскости Oz_1z_2 .

Для упругого слоя, взаимодействующего с полупространством жидкости, задача сводится к решению системы уравнений движения упругого тела и жидкости при следующих динамических и кинематических граничных условиях:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_1|_{z_3=0} = 0; \quad \tilde{Q}_2|_{z_2=0} = \tilde{P}_2|_{z_2=0}; \quad \tilde{Q}_1|_{z_2=-h} = 0; \\ \tilde{Q}_2|_{z_2=-h} = 0; \quad v_2|_{z_2=0} = \frac{\partial u_2}{\partial t}|_{z_2=0}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

В случае упругого полупространства, контактирующего со слоем жидкости, задача сводится к решению системы уравнений гидроупругости при таких граничных условиях:

$$\tilde{Q}_1|_{z_2=0} = 0; \quad \tilde{Q}_2|_{z_2=0} = \tilde{P}_2|_{z_2=0}; \quad \tilde{P}_2|_{z_2=h} = 0; \quad v_2|_{z_2=0} = \frac{\partial u_2}{\partial t}|_{z_2=0}. \quad (1.2)$$

Здесь \tilde{Q}_i и \tilde{P}_i – составляющие напряжений, соответственно, в упругом теле и жидкости.

§2. Методика решения.

Воспользуемся постановками задач гидроупругости для тел с начальными напряжениями и идеальной жидкости, а также представлениями общих решений, предложенными в работах [3 – 9, 18 – 20]. В дальнейшем исследуем волновые процессы в предварительно деформированных сжимаемых упругих телах, взаимодействующих с идеальной жидкостью, начальное состояние которых является однородным. В случае однородного напряженно-деформированного состояния для плоского случая общие решения имеют вид [3 – 9, 18 – 20]:

1) для упругого тела из сжимаемого материала –

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z_1 \partial z_2};$$

$$u_2 = \frac{(\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)}{\lambda_2^2 (a_{12} + \mu_{12})} \left[\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_1;$$

2) для идеальной сжимаемой жидкости –

$$v_1 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_1 \partial t}; \quad v_2 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_2 \partial t},$$

где введенные функции χ_i являются решениями следующих уравнений:

1) для упругого тела из сжимаемого материала –

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_2^2 a_{22} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{\lambda_2^4 (a_{12} + \mu_{12})^2}{(\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)(\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} \right] \chi_1 = 0;$$

2) для идеальной сжимаемой жидкости –

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_2 = 0.$$

Здесь и выше введены такие обозначения: u_i – компоненты вектора смещений упругого тела \mathbf{u} ; ρ – плотность материала упругого тела; a_{ij} и μ_{ij} – величины, определяемые из уравнений состояния и зависящие от вида упругого потенциала [3, 4, 6 – 8, 10]; λ_i – удлинения упругого тела в направлениях координатных осей; $\bar{\sigma}_{ii}^0$ ($s_{ii}^0 = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \bar{\sigma}_{ii}^0) / \lambda_i^2$) – начальные напряжения; v_i – составляющие вектора возмущений скорости жидкости \mathbf{v} относительно состояния покоя; ρ_0 и a_0 – плотность и скорость звука в жидкости в состоянии покоя.

Заметим, что для упругих тел приведенные соотношения относительно возмущений являются линейными, однако величины начального состояния, входящие в них, определяются из общих нелинейных уравнений. В связи с этим, несмотря на то, что основные соотношения приведены в координатах начального деформированного состояния z_i и все величины отнесены к размерам тела в этом состоянии, общая постановка задач гидроупругости для тел с начальными напряжениями в координатах z_i по форме аналогична формулировке линейных задач классической теории гидроупругости; есть и существенные различия, которые относятся к структуре уравнений и граничных условий.

Для анализа распространения возмущений, гармонически изменяющихся во времени, решения системы уравнений определяем в классе бегущих волн $\chi_j = X_j(z_2) \times \exp[i(k z_1 - \omega t)]$ ($j = \overline{1, 2}$), где k – волновое число; ω – круговая частота; i – мнимая единица ($i = \sqrt{-1}$).

Заметим, что выбранный в данной работе класс гармонических волн, являясь наиболее простым и удобным в теоретических исследованиях, не ограничивает общности полученных результатов, поскольку линейная волна произвольной формы, как известно, может быть представлена набором гармонических составляющих. Далее применяя метод Фурье, приходим к двум задачам о собственных значениях для уравнений движения упругого тела и жидкости. Решая их, определяем соответствующие

собственные функции. После подстановки полученных общих решений в граничные условия (1.1) и (1.2) получаем однородные системы линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных. Исходя из условия существования нетривиальных решений этих систем, получаем дисперсионные уравнения. Для упруго-жидкостной системы, состоящей из упругого слоя и жидкого полупространства, дисперсионное соотношение имеет вид

$$\det \left\| \theta_{lm} \left(c, \lambda_i, a_{ij}, \mu_{ij}, s_{ii}^0, \rho, \mu, \lambda, \rho_0, a_0, \omega h / c_s \right) \right\| = 0 \quad (l, m = \overline{1, 5}). \quad (2.1)$$

Для упруго-жидкостной системы, жидкий слой которой взаимодействует с упругим полупространством, аналогичное уравнение будет таким:

$$\det \left\| \tilde{\theta}_{lm} \left(c, \lambda_i, a_{ij}, \mu_{ij}, s_{ii}^0, \rho, \mu, \lambda, \rho_0, a_0, \omega h / c_s \right) \right\| = 0 \quad (l, m = \overline{1, 4}), \quad (2.2)$$

где c – фазовая скорость нормальных волн в гидроупругой системе с предварительно напряженным упругим телом; h – толщина упругого слоя для первой системы или толщина слоя жидкости в случае второго гидроупругого волновода; c_s ($c_s^2 = \mu / \rho$) – скорость волны сдвига в ненапряженном упругом теле; μ – модуль сдвига материала упругого тела.

Как известно, в неограниченном сжимаемом упругом теле существуют продольная и сдвиговая волны. В идеальной сжимаемой жидкой среде распространяется только продольная волна. Именно эти волны, взаимодействуя между собой на свободных граничных поверхностях, а также на поверхностях контакта сред, порождают сложные волновые поля в гидроупругих системах.

Отметим, что дисперсионные уравнения (2.1) и (2.2) не зависят от формы упругого потенциала и получены для сжимаемых упругих тел, подверженных большим (конечным) начальным деформациям. Они являются наиболее общими и из них можно получить соотношения для ряда частных случаев [1, 4, 5, 10, 11, 13 – 15, 26]. Если принять $\bar{\sigma}_{ii}^0 = 0$, то получим равенства для основательно исследованных в рамках классической теории упругости волн Рэлея, Стоунли – Шольте и Лэмба [1].

§3. Числовые результаты и их анализ.

В дальнейшем дисперсионные уравнения (2.1) и (2.2) решаем численно. При этом расчеты проводим для двух гидроупругих систем, состоящих из реальных упругих тел и жидкости, а также для четырех систем с гипотетическими жидкостями. *Первая система* состоит из органического стекла и воды. Она характеризуется следующими параметрами: упругое тело – $\rho = 1160 \text{ кг/м}^3$, $\lambda = 3,96 \cdot 10^9 \text{ Па}$, $\mu = 1,86 \cdot 10^9 \text{ Па}$; жидкость – $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$, $a_0 = 1459,5 \text{ м/с}$, $\bar{a}_0 = a_0 / c_s = 1,152595$. У этого волновода материал упругого тела (оргстекло) является жестким. *Вторая система* представляет собой волновод из стали марки 09Г2С и воды. При этом параметры выбираем такими: упругое тело – $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$, $\lambda = 9,26 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $\mu = 7,75 \cdot 10^{10} \text{ Па}$; жидкость – $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$, $a_0 = 1459,5 \text{ м/с}$, $\bar{a}_0 = 0,463021$. Этот волновод отличается тем, что материал упругого тела (сталь) относится к разряду более жестких, чем оргстекло. Гипотетические жидкости выбирали со скоростью распространения звуковой волны $\bar{a}_0 = 0,9$ и $\bar{a}_0 = 0,97$ при взаимодействии с оргстеклом, а также со скоростью волны звука $\bar{a}_0 = 0,97$ и $\bar{a}_0 = 1,05$ для пары сталь – вода. Такой выбор позволяет проиллюстрировать справедливость предложенных на основании аналитического анализа дисперсионных уравнений и результатов численного их решения критериев расщепления единственной поверхностной волны на множество мод, распространяющихся в гидроупругих системах.

Заметим, что уравнения (2.1) и (2.2) выведены без введения каких-либо дополнительных ограничений к виду функции упругого потенциала, поэтому они справедливы для упругих потенциалов произвольной формы. В данной работе при численном

решении этих уравнений для описания упругих свойств оргстекла и стали использовался потенциал Мурнагана, зависящий от трех алгебраических инвариантов тензора деформаций Грина [3 – 8, 10, 19, 22]. При рассмотрении конкретных примеров и численного решения уравнений (2.1) и (2.2) учитывалось то обстоятельство, что оргстекло и сталь, не разрушаясь, не допускают больших деформаций и поэтому коэффициенты уравнения состояния a_{ij} и μ_{ij} определены в рамках линейного акустического приближения [3 – 8, 10, 19, 22].

Результаты вычислений в виде графиков представлены на рис. 1 – 19.

На рис. 1 – 10 приведены результаты численных расчетов для упруго-жидкостной системы, состоящей из упругого слоя и жидкого полупространства. Графики, полученные для гидроупругого волновода, компонентами которого являются жидкий слой и упругое полупространство, представлены на рис. 11 – 19. В частности, на рис. 1 – 3 представлены графики для упругого слоя из органического стекла (жесткий материал) и воды ($\bar{a}_0 = a_0/c_s = 1,152595$), на рис. 4 и 5 – для оргстекла и гипотетической жидкости, скорость распространения звуковой волны в которой равна $\bar{a}_0 = 0,9$. На рис. 6 – 8 приведены графики для упругого слоя из стали марки 09Г2С (более жесткий материал) и воды, а на рис. 9 – 10 – для стали и гипотетической жидкости со скоростью звука в ней $\bar{a}_0 = 0,97$.

На рис. 1, 6 для упругого слоя, невзаимодействующего с жидкостью, приведены зависимости безразмерных величин фазовых скоростей нормальных волн Лэмба \bar{c} ($\bar{c} = c/c_s$) от безразмерной величины толщины упругого слоя (частоты) \bar{h} ($\bar{h} = \omega h/c_s$) [3 – 8, 10] при отсутствии начальных напряжений ($\bar{\sigma}_{11}^0 = 0$). На этих рисунках для наглядности штриховыми линиями отмечены асимптотики, к которым стремятся фазовые скорости первой (нулевой антисимметричной) и второй (нулевой симметричной) мод при возрастании толщины упругого слоя (частоты) \bar{h} .

Из графиков, полученных для чисто упругого слоя из оргстекла [3 – 8, 10] и представленных на рис. 1, следует, что скорость первой (нулевой антисимметричной) моды Лэмба при росте частоты или толщины упругого слоя \bar{h} стремится к скорости волны Рэлея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = c_R/c_s = 0,9335596$) снизу, а скорость второй (нулевой симметричной) моды стремится к скорости волны Рэлея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,9335596$) сверху. Скорости всех мод Лэмба высокого порядка при увеличении толщины упругого слоя (частоты) \bar{h} стремятся к скорости волны сдвига в материале упругого тела \bar{c}_s [1, 3 – 8, 10].

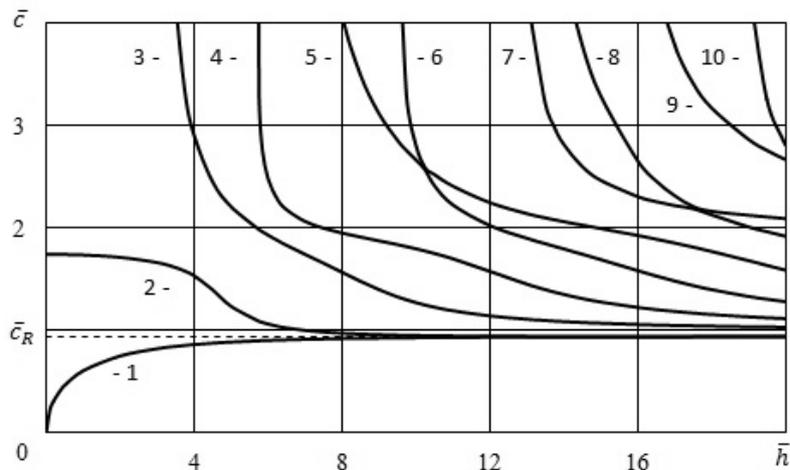


Рис. 1

На рис. 2, 4, 7 и 9 изображены дисперсионные кривые для гидроупругих волноводов, отражающие зависимости безразмерных величин фазовых скоростей квазилэмбовских мод \bar{c} от безразмерной величины толщины упругого слоя (частоты) \bar{h} при отсутствии начальных напряжений. На этих рисунках для наглядности штриховыми линиями отмечены асимптотики, к которым стремятся фазовые скорости первой и второй мод при возрастании частоты (толщины упругого слоя) \bar{h} .

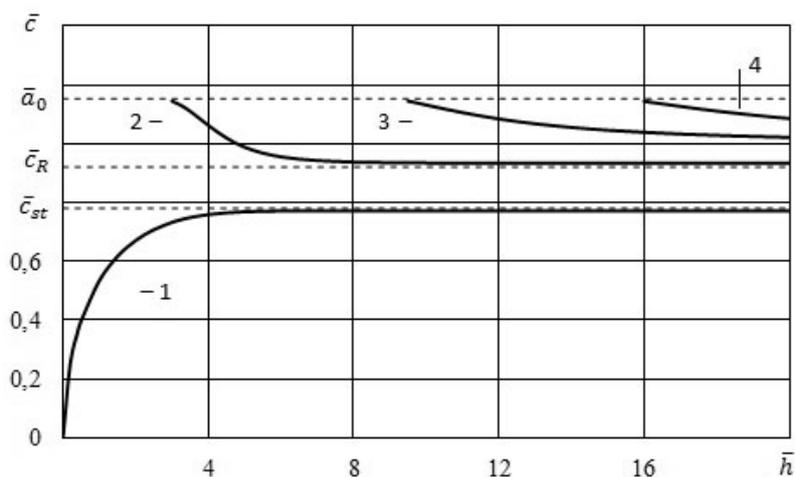


Рис. 2

Графики для гидроупругой системы, приведенные на рис. 2, показывают, что при росте толщины упругого слоя (частоты) \bar{h} скорость первой моды стремится к скорости волны Стоунли \bar{c}_{st} ($\bar{c}_{st} = c_{st}/c_s = 0,7717101$) снизу, а скорость второй моды – к скорости волны Рэля \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,933558$) сверху. Моды высокого порядка распространяются в упругом слое в его толще с фазовыми скоростями, стремящимися с ростом частоты (толщины упругого слоя) к скорости волны сдвига в материале упругого тела \bar{c}_s . При стремлении толщин упругого слоя или частот \bar{h} к частотам зарождения мод (\bar{h}_{kp}) скорости мод стремятся к величине скорости волны звука в жидком полупространстве \bar{a}_0 ($\bar{a}_0 = 1,152595$). В работе [13] показано, что движения моды 1 при $\bar{h} = 20$ в случае упругого слоя из оргстекла происходят как в жидкости, так и в упругом теле. При этом глубина проникновения движений этой моды в упругий слой превышает глубину проникновения в жидкость.

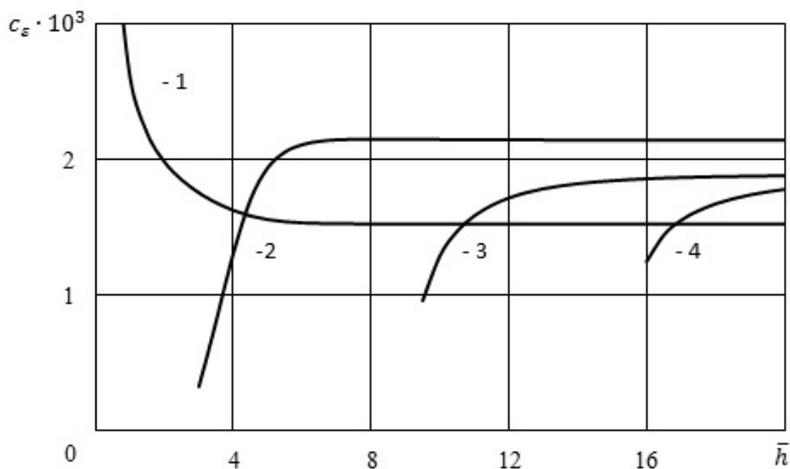


Рис. 3

Характер влияния предварительного растяжения ($\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$) на скорости нормальных волн в упруго-жидкостных системах иллюстрируют графики на рис. 3, 5, 8, 10, отображающие зависимости относительных изменений величин фазовых скоростей c_ε [$c_\varepsilon = (c_\sigma - c)/c$, c_σ – фазовая скорость мод в системе с предварительно напряженным слоем, c – фазовая скорость нормальных волн в системе с упругим слоем, неподверженным начальным деформациям] от толщины упругого слоя (частоты) \bar{h} .

Приведенные на рис. 3 графики позволяют заключить, что для рассматриваемого диапазона частотного спектра начальное растяжение ($\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$) упругого слоя из менее жесткого материала приводит к повышению фазовых скоростей всех мод. При этом наибольшее влияние начальные напряжения оказывают на скорость моды 1 в окрестности частоты записания.

Графический материал для гидроупругой системы с гипотетической жидкостью ($\bar{a}_0 = 0,9$), приведенный на рис. 4, показывает, что при росте толщины упругого слоя (частоты) \bar{h} скорость, возникающей единственной моды, стремится снизу к скорости волны Стоунли \bar{c}_{st} ($\bar{c}_{st} = 0,732467$), которая меньше скорости волны звука в жидкой среде \bar{a}_0 ($\bar{a}_0 = 0,9$).

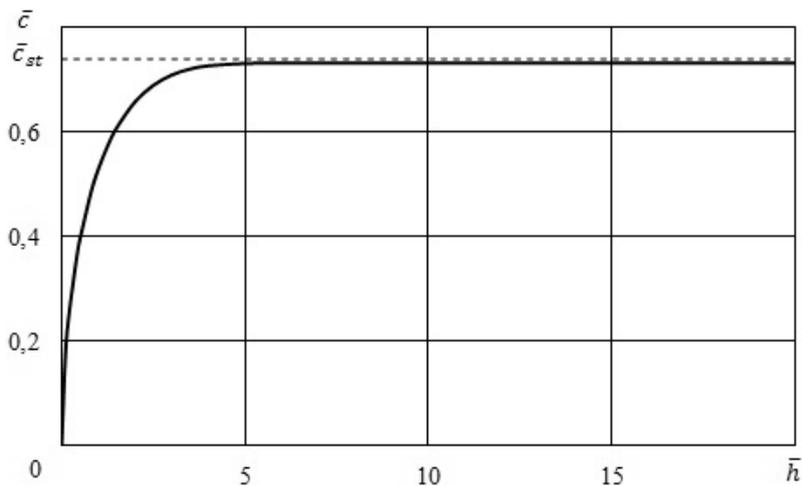


Рис. 4

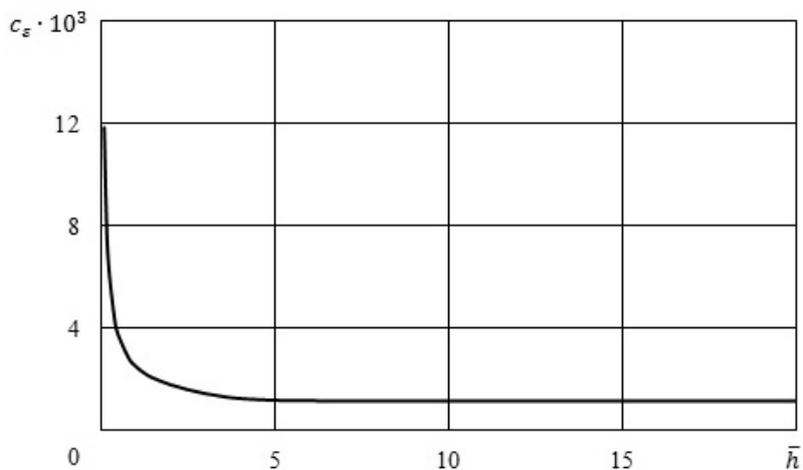


Рис. 5

Анализ графика, полученного для гидроупругой системы и представленного на рис. 5, позволяет заключить, что начальное растяжение ($\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$) упругого слоя оказывает существенное влияние на величину фазовой скорости квазилэмбовской моды, в основном, в окрестности частоты ее загира. В дальнейшем с ростом частоты влияние предварительных деформаций на скорость этой квазиповерхностной волны (волна типа Стоунли) ослабевает.

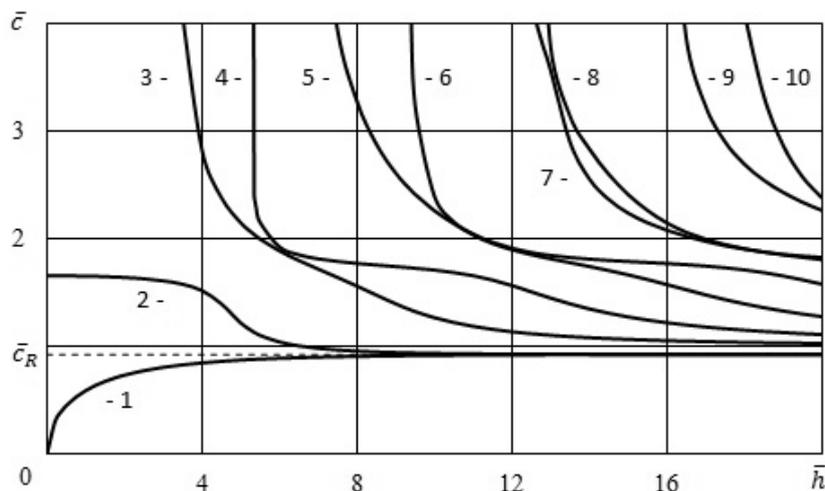


Рис. 6

Из графиков, полученных для упругого слоя из стали [1, 3 – 8, 10], представленных на рис. 6, следует, что скорость первой (нулевой антисимметричной) моды Лэмба при росте частоты или толщины упругого слоя \bar{h} стремится к скорости волны Рэлея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,923008$) снизу, а скорость второй (нулевой симметричной) моды стремится к скорости волны Рэлея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,923008$) сверху. Скорости всех мод Лэмба высокого порядка при увеличении частоты или толщины упругого слоя \bar{h} стремятся к скорости волны сдвига в материале упругого тела \bar{c}_s .

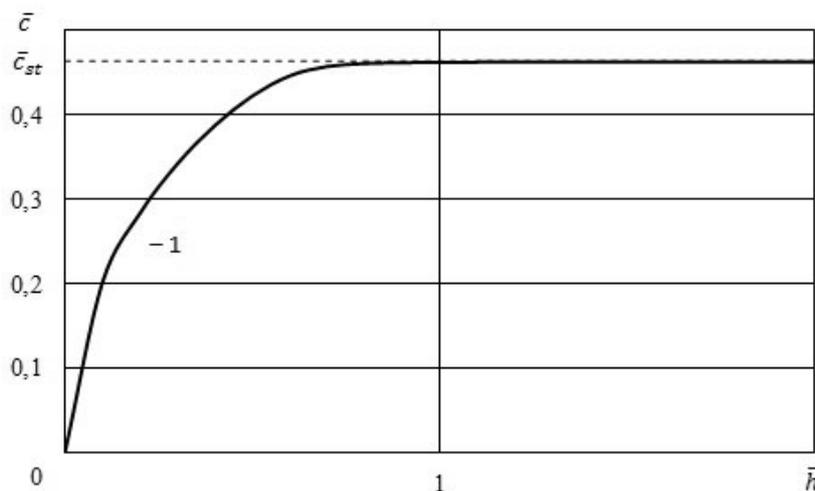


Рис. 7

График для гидроупругой системы, приведенный на рис. 7, показывает, что при росте толщины упругого слоя (частоты) \bar{h} скорость существующей единственной

моды 1 стремится снизу к скорости волны Стоунли \bar{c}_{st} ($\bar{c}_{st} = 0,462886$), которая несколько меньше скорости волны звука в жидкой среде \bar{a}_0 ($\bar{a}_0 = 0,463021$). В работе [13] показано, что глубина проникновения этой моды в жидкость значительно больше глубины проникновения в упругий слой, т.е. движения моды 1 при $\bar{h} = 20$ в случае более жесткого материала (сталь) происходят в отличие от менее жесткого упругого слоя из оргстекла, преимущественно, в жидкости.

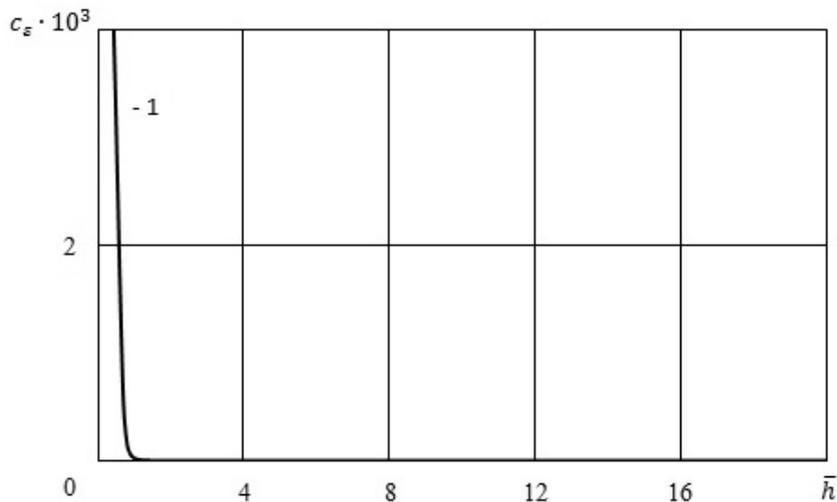


Рис. 8

Анализ графика, полученного для гидроупругой системы и представленного на рис. 8, позволяет заключить, что начальное растяжение ($\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$) упругого слоя из стали (более жесткий материал) оказывает существенное влияние на величину фазовой скорости моды, в основном, в окрестности частоты ее запираания. В дальнейшем с ростом частоты влияние предварительных деформаций на скорость квазиповерхностной волны (волна типа Стоунли) ослабевает.

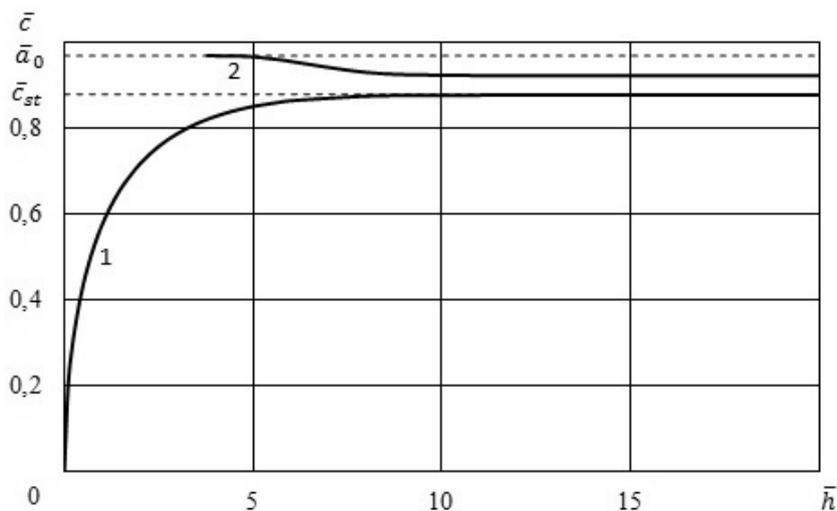


Рис. 9

Графический материал для гидроупругой системы с гипотетической жидкостью ($\bar{a}_0 = 0,97$), приведенный на рис. 9, показывает, что при росте толщины упругого слоя (частоты) \bar{h} скорость первой моды стремится снизу к скорости волны Стоунли

\bar{c}_{st} ($\bar{c}_{st} = 0,878214$), которая меньше скорости волны звука в жидкой среде \bar{a}_0 ($\bar{a}_0 = 0,97$), а скорость второй моды – к скорости волны Рэлея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,923007$) сверху. Скорость второй моды при стремлении частоты к частоте ее зарождения (\bar{h}_{kp}) стремится к скорости волны звука в жидкости \bar{a}_0 ($\bar{a}_0 = 0,97$).

Анализ графиков, полученных для этой гидроупругой системы и представленных на рис. 10, показывает, что начальное растяжение ($\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$) упругого слоя оказывает существенное влияние на величину фазовой скорости моды 1, в основном, в окрестности частоты ее записания. В дальнейшем с ростом частоты предварительные деформации оказывают влияние на фазовые скорости обеих мод на всем частотном интервале.

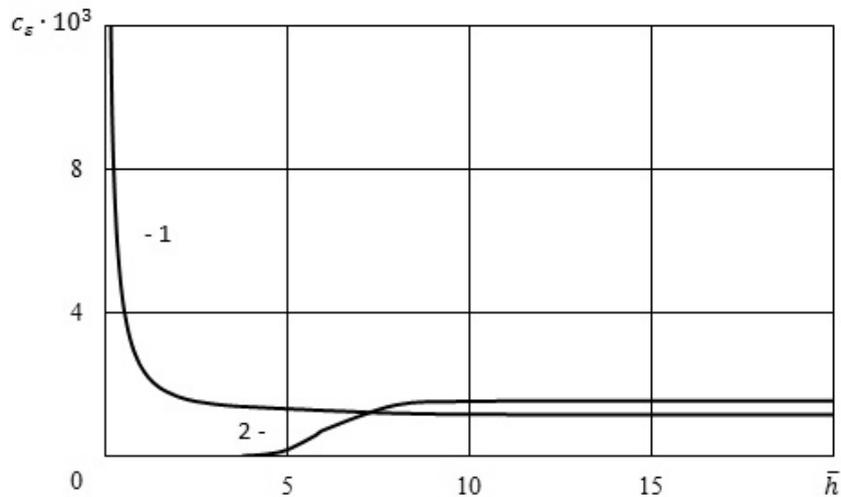


Рис. 10

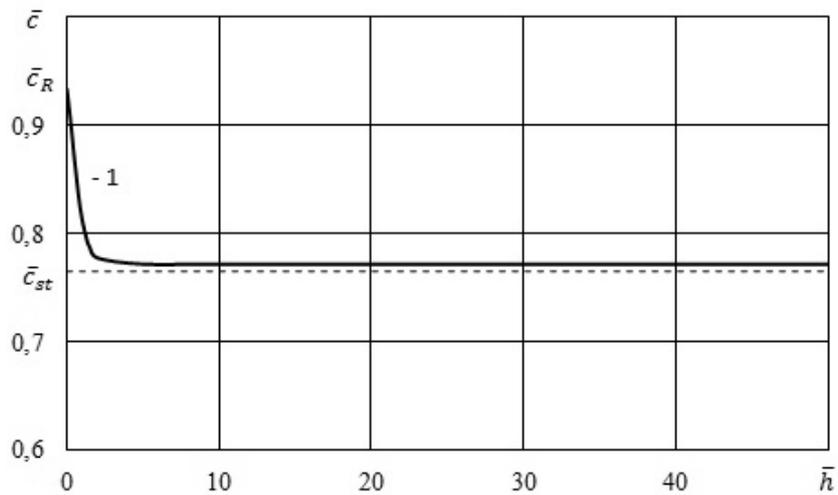


Рис. 11

На рис. 11 – 19 приведены результаты численных расчетов для упруго-жидкостной системы, состоящей из упругого полупространства и жидкого слоя.

На рис. 11, 13, 15, 16 и 18 изображены дисперсионные кривые для гидроупругих волноводов, отражающие зависимости безразмерных величин фазовых скоростей квазиэмпловских мод \bar{c} от безразмерной величины толщины слоя жидкости (частоты) \bar{h}

при отсутствии начальных напряжений. В частности, на рис. 11 представлены графики для упругого полупространства из органического стекла (менее жесткий материал) и воды ($\bar{a}_0 = a_0/c_s = 1,152595$), на рис. 13 – для оргстекла и гипотетической жидкости, скорость распространения звуковой волны в которой равна $\bar{a}_0 = 0,97$. На рис. 15, 16 приведены графики для упругого полупространства из стали марки 09Г2С (более жесткий материал) и воды, а на рис. 18 – для стали и гипотетической жидкости со скоростью звука в ней $\bar{a}_0 = 1,05$. Штриховыми линиями на рисунках отмечены асимптотики, к которым стремятся фазовые скорости первой моды при возрастании толщины (частоты) жидкого слоя \bar{h} .

Нетрудно видеть (рис. 11), что скорость единственной существующей поверхностной волны в упругом полупространстве из оргстекла (менее жесткий материал), взаимодействующем со слоем воды, изменяется от скорости волны Рэлея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,933557$) при $\bar{h} \rightarrow 0$ до скорости волны Стоунли \bar{c}_{st} ($\bar{c}_{st} = 0,7717101$) при $\bar{h} \rightarrow \infty$. Отметим, что, как известно [2], фазовая скорость и структура волны Стоунли при взаимодействии твердого и жидкого полупространств зависят от механических параметров гидроупругой системы и определяются соотношением между скоростью волны звука в жидкости и скоростью волны Рэлея в твердом полупространстве. В рассматриваемом случае механические параметры гидроупругой системы «оргстекло – вода» таковы, что скорость распространения звуковой волны в жидкости \bar{a}_0 ($\bar{a}_0 = 1,152595$) больше скорости рэлеевской волны \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,933557$). Как следует из результатов, полученных в работе [24], это приводит к тому, что в коротковолновой части спектра мода 1, распространяясь вдоль границы раздела сред, локализуется в приконтактных областях как жидкости, так и упругого полупространства. При этом глубина проникновения движений этой поверхностной волны (волна типа Стоунли) в упругое тело немного превышает глубину проникновения их в жидкость.

Начальное растяжение ($\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$), как следует из графика на рис. 12, оказывает влияние на фазовую скорость поверхностной волны во всем частотном интервале. При этом происходит повышение величины фазовой скорости этой волны во всем диапазоне частот. Наибольшее влияние предварительные деформации оказывают на скорость поверхностной волны в окрестности частоты ее зарождения.

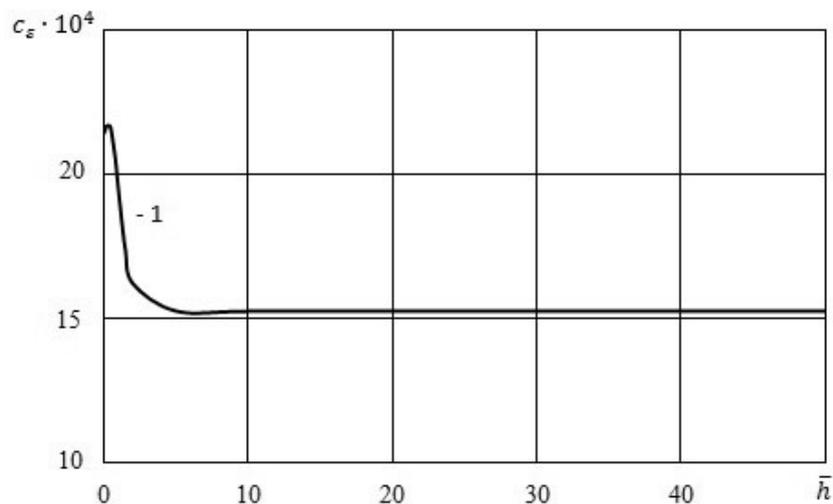


Рис. 12

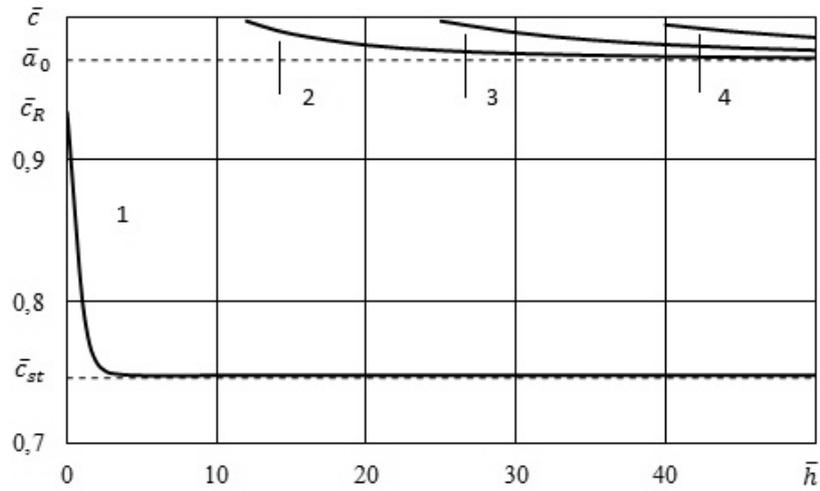


Рис. 13

В случае гипотетической жидкости ($\bar{a}_0 = 0,97$) (см. рис. 13) в гидроупругом волноводе распространяется множество мод. При этом скорость первой моды изменяется от скорости волны Рэлея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,933557$) при $\bar{h} \rightarrow 0$ до скорости волны Стоунли \bar{c}_{st} ($\bar{c}_{st} = 0,747764$) при $\bar{h} \rightarrow \infty$. С ростом толщины слоя жидкости мода 1 трансформируется в поверхностную волну Стоунли. Нетрудно видеть, что при зарождении мод высокого порядка их скорости равны скорости волны сдвига в материале упругого полупространства \bar{c}_s . Далее с ростом частоты (толщины жидкого слоя) \bar{h} их скорости стремятся к скорости волны звука в жидкости \bar{a}_0 ($\bar{a}_0 = 0,97$). Учитывая результаты, полученные в работе [24], в данной гидроупругой системе при $\bar{a}_0 = 0,97 > \bar{c}_R = 0,933557$ в коротковолновой части спектра мода 1, распространяясь вдоль границы раздела сред, локализуется в приконтактных областях не только жидкости, но и упругого полупространства.

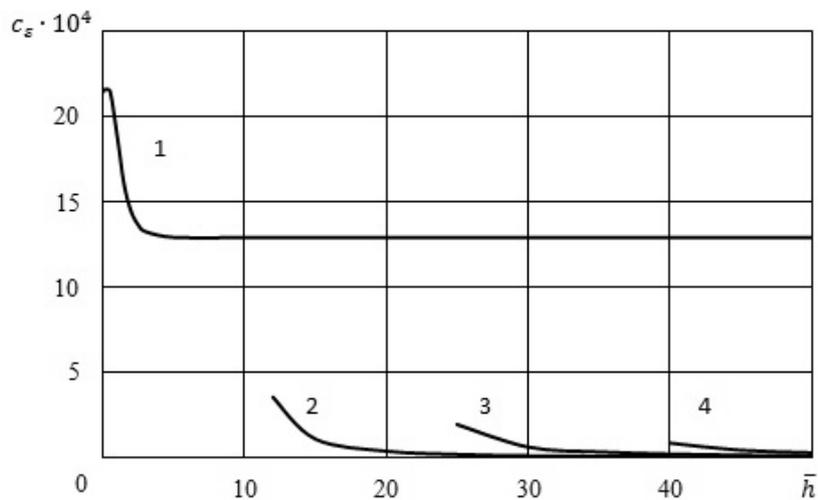


Рис. 14

Из графиков, приведенных на рис. 14, следует, что начальное растяжение ($\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$) оказывает влияние, в основном, на фазовую скорость квазиповерхностной

моды 1 (волна типа Стоунли). Предварительные деформации оказывают небольшое влияние на скорости мод высокого порядка, преимущественно, в окрестности их критических частот (\bar{h}_{kp}). Далее с ростом толщины слоя жидкости воздействие начальных напряжений заметно ослабевает.

На рис. 15, 16 приведены дисперсионные кривые для системы «упругое полупространство из стали (более жесткий материал) – слой воды».

Как видно из графиков, фазовая скорость первой моды изменяется от скорости волны Рэлея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,923007$) при $\bar{h} \rightarrow 0$ до скорости волны Стоунли \bar{c}_{st} ($\bar{c}_{st} = 0,462886$) при $\bar{h} \rightarrow \infty$. Скорости мод высокого порядка при частотах их зарождения (\bar{h}_{kp}) равны скорости волны сдвига в материале упругого полупространства \bar{c}_s и в дальнейшем с увеличением толщины жидкого слоя \bar{h} стремятся к скорости волны звука в жидкости \bar{a}_0 ($\bar{a}_0 = 0,463021$). Отметим, что при $\bar{a}_0 = 0,463021 < \bar{c}_R = 0,923007$, как показано в работе [24], при увеличении частоты (толщины слоя жидкости) низшая мода, распространяясь вдоль границы раздела сред, локализуется в приконтактной области жидкого слоя. Моды высокого порядка с ростом частоты также локализуются в жидком слое. При этом движения в модах высокого порядка при $\bar{h} \rightarrow \infty$ смещаются от поверхностей слоя жидкости в его толщу.

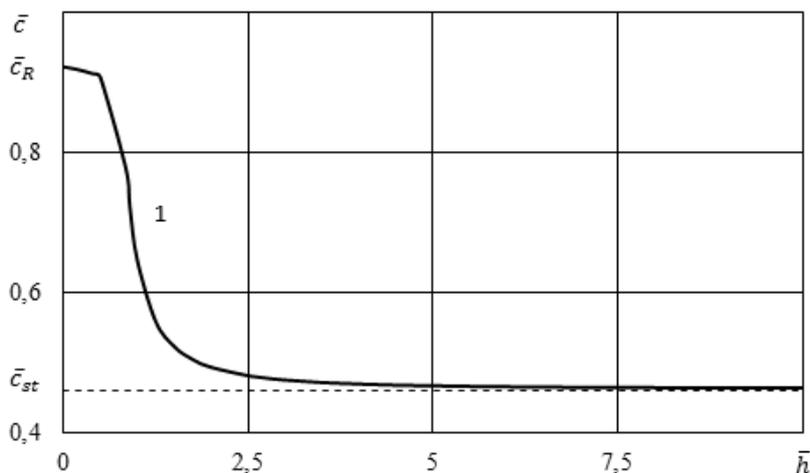


Рис. 15

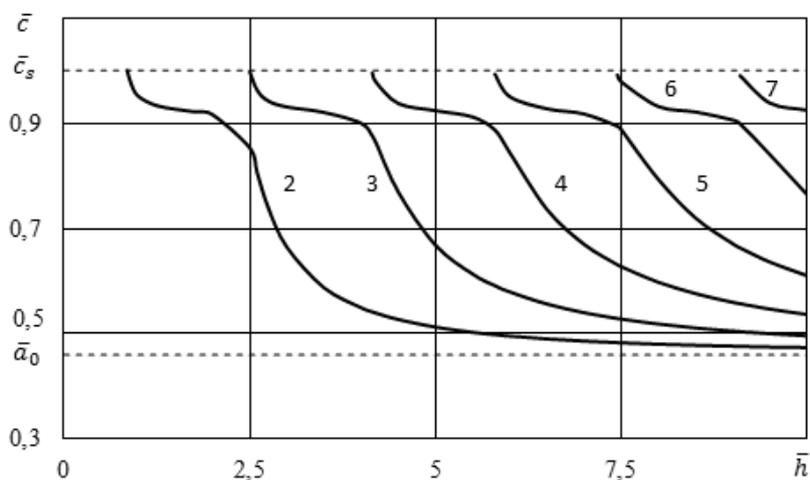


Рис. 16

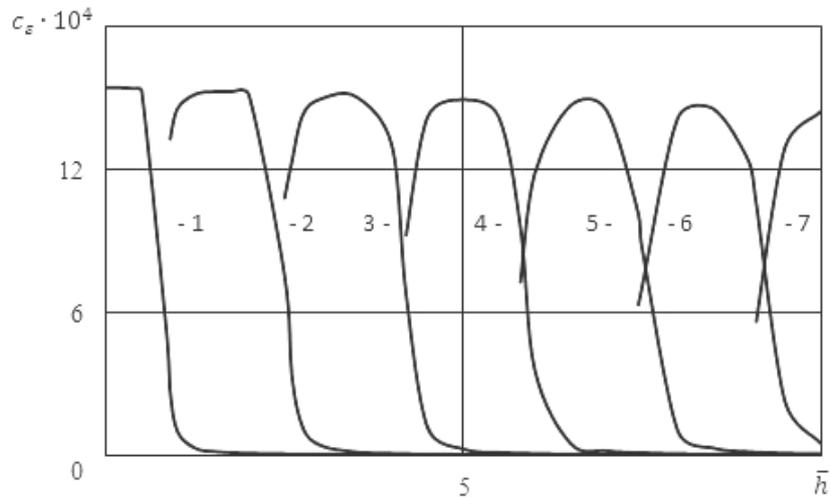


Рис. 17

Из графиков, приведенных на рис. 17, следует, что начальное растяжение ($\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$) оказывает влияние на фазовые скорости всех мод, в основном, в окрестности критических частот (\bar{h}_{kp}). Далее с ростом толщины слоя жидкости \bar{h} воздействие предварительных деформаций значительно ослабевает.

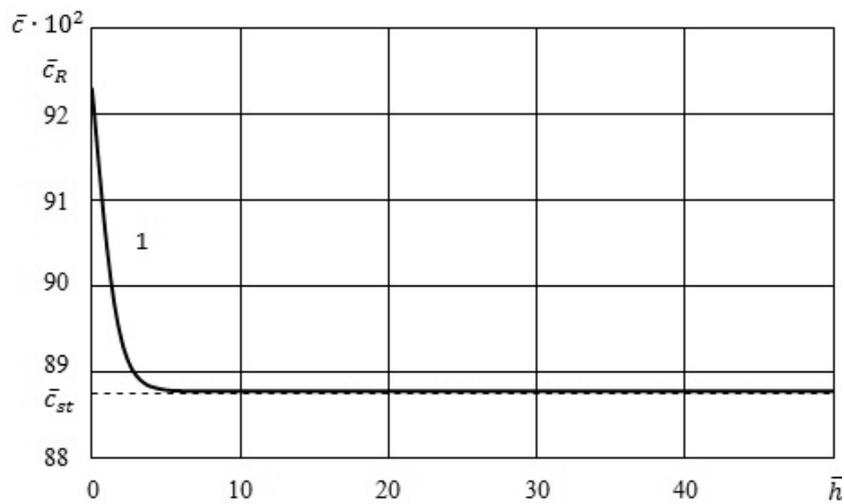


Рис. 18

В случае слоя гипотетической жидкости ($\bar{a}_0 = 1,05$), как следует из графика на рис. 18, в гидроупругой системе распространяется лишь одна волна, скорость которой изменяется от скорости волны Рэлея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,923007$) при $\bar{h} \rightarrow 0$ до скорости волны Стоунли \bar{c}_{st} ($\bar{c}_{st} = 0,887755$) при $\bar{h} \rightarrow \infty$. В рассматриваемом случае механические параметры гидроупругой системы таковы, что скорость распространения звуковой волны в жидкости \bar{a}_0 ($\bar{a}_0 = 1,05$) больше скорости рэлеевской волны \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,923007$). Учитывая результаты, полученные в работе [24], в данной гидроупругой системе это приводит к тому, что в коротковолновой части спектра поверхностная мода 1 (волна типа Стоунли), распространяясь вдоль границы раздела сред, локализуется в приконтактных областях как слоя жидкости, так и упругого полупространства.

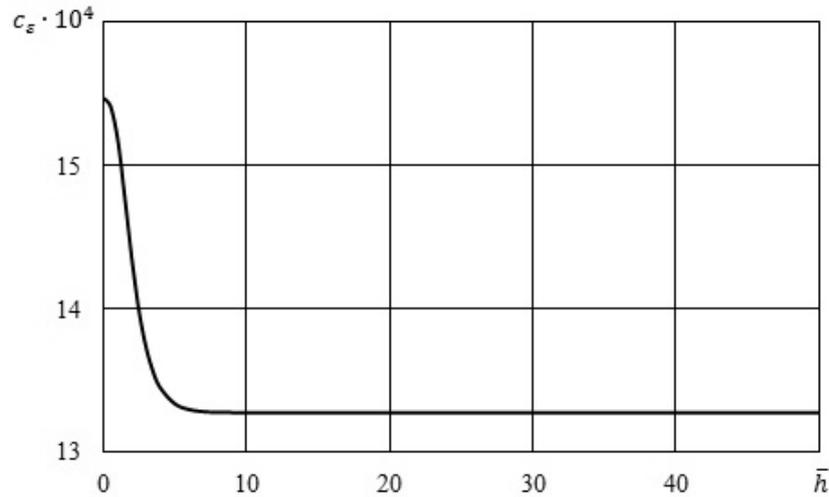


Рис. 19

Начальное растяжение ($\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$), как следует из рис. 19, приводит к повышению фазовой скорости этой волны во всем интервале частот. Наибольшее влияние предварительные деформации оказывают на скорость поверхностной волны в окрестности частоты ее зарождения.

§4. Критерии существования квазилэмбовских мод в гидроупругих волноводах.

Анализ дисперсионных уравнений, проведенные дополнительные расчеты и полученные в данной работе числовые результаты, позволяют установить критерии существования квазилэмбовских мод в упруго-жидкостных волноводах.

В системе, состоящей из упругого слоя и полупространства жидкости, такими критериями могут служить соотношения между скоростями волны Рэлея в упругом слое \bar{c}_R , волны звука в жидкости \bar{a}_0 и волны сдвига в материале упругого слоя \bar{c}_s . В случае выполнения условия $\bar{a}_0 < \bar{c}_R$ идеальная жидкость не способствует генерированию продольной и сдвиговой волн и взаимодействию их на поверхностях упругого слоя. Поэтому в упругом слое не формируются незатухающие квазилэмбовские моды высокого порядка. В гидроупругом волноводе возникает лишь одна низшая первая мода, которая распространяется без демпфирования вдоль границы контакта сред. Ее скорость изменяется от нуля (при $\bar{h} \rightarrow 0$) до скорости волны Стоунли \bar{c}_{st} (при $\bar{h} \rightarrow \infty$). Это подтверждают графики, представленные на рис. 4 (оргстекло – гипотетическая жидкость $\bar{a}_0 = 0,9 < \bar{c}_R = 0,933558$) и рис. 7 (сталь – вода $\bar{a}_0 = 0,463021 < \bar{c}_R = 0,923007$). Если $\bar{c}_R < \bar{a}_0 < \bar{c}_s$, то в волноводе формируются две моды [рис. 9 (сталь – гипотетическая жидкость $\bar{c}_R = 0,923007 < \bar{a}_0 = 0,97 < \bar{c}_s = 1$)]. При этом скорость первой моды изменяется от нуля (при $\bar{h} \rightarrow 0$) до скорости волны Стоунли \bar{c}_{st} (при $\bar{h} \rightarrow \infty$), а скорость второй моды – от скорости волны звука \bar{a}_0 (при $\bar{h} \rightarrow \bar{h}_{кр}$) к скорости волны Рэлея \bar{c}_R (при $\bar{h} \rightarrow \infty$). В случае выполнения условия $\bar{a}_0 > \bar{c}_s$, как видно из графиков, представленных на рис. 2 (оргстекло – вода $\bar{a}_0 = 1,152595 > \bar{c}_s = 1$), идеальная сжимаемая жидкость не препятствует взаимодействию продольной и сдвиговой волн на поверхностях упругого слоя. Вследствие этого в упругом слое возникает полный спектр незатухающих квазилэмбовских мод высокого порядка. При этом скорость первой моды изменяется от нуля при $\bar{h} \rightarrow 0$ до скорости волны Стоунли \bar{c}_{st}

при $\bar{h} \rightarrow \infty$. Скорость второй моды при $\bar{h} \rightarrow 0$ стремится к скорости волны звука в жидкости \bar{a}_0 , а при $\bar{h} \rightarrow \infty$ – к скорости волны Рэлея \bar{c}_R . Скорости мод высокого порядка изменяются от скорости звуковой волны в жидкости \bar{a}_0 до скорости волны сдвига в материале упругого тела \bar{c}_s . Случай $\bar{a}_0 \gg \bar{c}_s$ на примере упругого слоя из резины рассмотрен и подробно изложен в работе [24]. В ней показано, что дисперсионная картина волнового поля гидроупругой системы, несмотря на ряд различий, похожа на картину волн Лэмба в упругом слое, не взаимодействующем с жидкостью. Здесь отметим лишь одно из отличий, состоящее в том, что в гидроупругом волноводе фазовые скорости мод высокого порядка, начиная с третьей моды, при стремлении частот \bar{h} к их частотам зарождения $\bar{h}_{кр}$ стремятся к скорости волны звука в жидкости \bar{a}_0 ($\bar{c}_i \rightarrow \bar{a}_0$). В чисто упругом же слое, не взаимодействующем с жидкостью, при $\bar{h} \rightarrow \bar{h}_{кр}$ фазовые скорости мод Лэмба высокого порядка неограниченно возрастают ($\bar{c}_i \rightarrow \infty$).

В системе, компонентами которой является упругое полупространство и слой жидкости, таким критерием может служить соотношение между скоростью волны звука в жидком слое \bar{a}_0 и скоростью волны сдвига в материале упругого тела \bar{c}_s . При $\bar{a}_0 > \bar{c}_s$, как видно из графиков, представленных на рис. 11 (оргстекло – вода $\bar{a}_0 = 1,152595 > \bar{c}_s = 1$) и рис. 17 (сталь – гипотетическая жидкость $\bar{a}_0 = 1,05 > \bar{c}_s = 1$), в гидроупругой системе распространяется лишь одна поверхностная волна, скорость которой изменяется от скорости волны Рэлея \bar{c}_R (при $\bar{h} \rightarrow 0$) до скорости волны Стоунли \bar{c}_{st} (при $\bar{h} \rightarrow \infty$). В случае выполнения условия $\bar{a}_0 < \bar{c}_s$ в гидроупругом волноводе распространяется множество квазилэмбовских мод. При этом, как следует из графиков на рис. 13, в системе «оргстекло – гипотетическая жидкость» с параметрами $\bar{a}_0 = 0,97 < \bar{c}_s = 1$ на интервале изменения частоты \bar{h} от 0 до 50 генерируется четыре моды, а в системе «сталь – вода» при $\bar{a}_0 = 0,463021 < \bar{c}_s = 1$ (рис. 15, 16) на частотном интервале 0 – 10 распространяется без демпфирования 7 мод. При этом скорость первой моды изменяется от скорости волны Рэлея \bar{c}_R при $\bar{h} \rightarrow 0$ до скорости волны Стоунли \bar{c}_{st} при $\bar{h} \rightarrow \infty$. Скорости мод высокого порядка изменяются от скорости волны сдвига в материале упругого полупространства \bar{c}_s при $\bar{h} \rightarrow \bar{h}_{кр}$ до скорости волны звука в жидкости \bar{a}_0 при $\bar{h} \rightarrow \infty$.

§5. Особенности влияния начальных напряжений на квазилэмбовские волны в гидроупругих системах.

В гидроупругой системе, состоящей из упругого слоя и полупространства жидкости, начальные напряжения вызывают изменение частот зарождения нормальных волн и смещение их дисперсионных кривых. Как видно из графиков, представленных на рис. 3, 5, 8 и 10, начальное растяжение ($\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$) приводит к сдвигу критических частот и дисперсионных кривых мод в коротковолновую часть частотного спектра. Следствием этого является повышение величин фазовых скоростей квазилэмбовских волн. При этом наибольшее влияние начальные напряжения оказывают на скорости низших мод в окрестности их частот записания. Характер и степень воздействия начальных напряжений на фазовые скорости мод в данной гидроупругой системе тесно связаны со свойствами их локализации. При $\bar{a}_0 > \bar{c}_R$, как отмечалось, низшие моды, распространяясь вдоль границы раздела сред, проникают в упругий слой [13]. Этим и обусловлено влияние упругого тела и предварительных деформаций на фазовые скорости этих мод во всем интервале частот. Если между механическими пара-

метрами гидроупругой системы выполняется условие $\bar{a}_0 < \bar{c}_R$, то низшая мода локализуется в жидкости [13]. Поэтому упругое тело и начальные напряжения оказывают существенное влияние на величину фазовой скорости этой моды, в основном, в окрестности частоты ее зарождения. В дальнейшем с ростом частоты их влияние ослабевает.

В случае жидкого слоя, взаимодействующего с упругим полупространством, начальные напряжения также вызывают изменение частот зарождения мод и смещение их дисперсионных кривых. Как видно из графиков, приведенных на рис. 12, 14, 17 и 19, начальное растяжение ($\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$) смещает критические частоты и дисперсионные кривые мод в высокочастотную часть спектра. Это приводит к повышению величин фазовых скоростей всех нормальных волн. При этом начальное растяжение оказывает значительное влияние на величины фазовых скоростей низших мод, в основном, в окрестности частот их зарождения. Различия в закономерностях воздействия предварительных деформаций на скорости первых мод для гидроупругих систем при $\bar{a}_0 > \bar{c}_R$ и $\bar{a}_0 < \bar{c}_R$ связаны с локализацией этих мод в разных средах. При $\bar{a}_0 > \bar{c}_R$ первая мода распространяется как в жидкости, так и в упругом теле. Этим обусловлено влияние начальных напряжений на скорость этой моды во всем частотном диапазоне. При $\bar{a}_0 < \bar{c}_R$, как показано в работе [24], с ростом частоты мода 1 локализуется в жидком слое. Поэтому упругое тело и начальные напряжения не оказывают значительного влияния на величину фазовой скорости этой моды.

В случае многомодовых волноводов (рис. 14 и 17) наибольшее влияние начальные напряжения оказывают на фазовые скорости мод высокого порядка в окрестности критических частот. Характер влияния начальных напряжений на скорости этих мод при увеличении толщины слоя жидкости (частоты) вызван тем, что при $\bar{h} \rightarrow \infty$, движения в модах высокого порядка, начиная со второй (рис. 14 и 17), смещаются от поверхностей слоя жидкости в его толщу. Этим и объясняется незначительное влияние упругого полупространства и начальных напряжений на фазовые скорости, а также дисперсию этих мод в коротковолновой части частотного спектра.

Заключение.

В рамках трехмерных уравнений линеаризованной теории упругости конечных деформаций для упругого тела и трехмерных линеаризованных уравнений Эйлера для идеальной сжимаемой жидкости даны постановки и решение задач о распространении квазилэмбовских нормальных волн в системах, состоящих из идеального сжимаемого жидкого полупространства и предварительно напряженного сжимаемого упругого слоя, а также из слоя жидкости и предварительно деформированного сжимаемого упругого полупространства. С использованием представлений общих решений получены характеристические уравнения и построены дисперсионные кривые мод в широком диапазоне частот.

Анализ полученных результатов показал, что основными критериями существования незатухающих квазилэмбовских нормальных волн в гидроупругой системе «идеальное сжимаемое жидкое полупространство – упругий слой» являются соотношения между величинами скоростей волны звука в жидкости, сдвига в материале упругого тела и квазирэлееской волны, распространяющейся вдоль свободной поверхности упругого слоя. В случае системы, компонентами которой являются слой жидкости и упругое полупространство, таким критерием может служить соотношение между скоростью волны звука в жидкости и скоростью волны сдвига в материале упругого тела.

Показано, что в гидроупругих волноводах начальное растяжение вызывает изменение частот зарождения квазилэмбовских мод, конфигурации их дисперсионных кривых, а также смещение их в коротковолновую часть спектра. Характер влияния начальных напряжений на скорости мод обусловлен их свойствами локализации в средах.

Развитый подход и полученные результаты позволяют установить пределы применения моделей волновых процессов, основанных на различных вариантах теории малых начальных деформаций и классической теории упругости.

РЕЗЮМЕ. Досліджено поширення квазілембових хвиль у попередньо деформованому стисли- вому пружному шарі, що взаємодіє з півпростором ідеальної стисливої рідини, а також у шарі ріди- ни, що контактує з попередньо напруженим стисливим пружним півпростором. Результати отримано на основі тривимірних рівнянь лінеаризованої теорії пружності скінченних деформацій для стисливо- го пружного тіла та тривимірних лінеаризованих рівнянь Ейлера для ідеальної стисливої рідини. Застосовано постановку задачі та підхід, оснований на використанні представлень загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь для пружного тіла та рідини. Отримано дисперсійні рівняння, які описують поширення квазілембових хвиль у гідропружних системах у широкому діапазоні частот. Проаналізо- вано вплив початкових напружень, а також товщини пружного шару та шару ідеальної стисливої рідини на фазові швидкості квазілембових мод. Запропоновано критерії існування квазілембових мод в гідропружних хвилеводах. Розвинутий підхід та отримані результати дозволяють встановити границі застосування моделей хвильових процесів, оснований на різних варіантах теорії малих початко- вих деформацій, а також на класичній теорії пружності. Числові результати наведено у вигляді гра- фіків та дано їх аналіз.

1. *Викторов И.А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. – М.: Наука, 1981. – 288 с.
2. *Волькенштейн М.М., Левин В.М.* Структура волны Стоунли на границе вязкой жидкости и твердо- го тела // Акуст. журнал. – 1988. – **34**, № 4. – С. 608 – 615.
3. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными напряжениями: в 2-х томах. Т.1. Общие вопросы – К.: Наук. думка, 1986. – 374 с.
4. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными напряжениями: в 2-х томах. Т.2. Закономерности распространения. – К.: Наук. думка, 1986. – 536 с.
5. *Гузь А.Н.* Динамика сжимаемой вязкой жидкости. – К.: А.С.К., 1998. – 350 с.
6. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – К.: А.С.К., 2004. – 672 с.
7. *Гузь А.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в 2-х частях. Ч. 1. Общие вопросы. Волны в бесконечных телах и поверхностные волны. – Saarbrucken: LAP LAM- BERT Academic Publishing, 2016. – 501 с.
8. *Гузь А.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в 2-х частях. Ч. 2. Волны в частичноограниченных телах. – Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. – 505 с.
9. *Гузь А.Н.* Введение в динамику сжимаемой вязкой жидкости. – Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing RU, 2017. – 244 с.
10. *Гузь А.Н., Жук А.П., Махорт Ф.Г.* Волны в слое с начальными напряжениями. – К.: Наук. думка, 1976. – 104 с.
11. *Жук А.П.* Волны Стоунли в среде с начальными напряжениями // Прикл. механика. – 1980. – **16**, № 1. – С. 113 – 116.
12. *Bagno A.M.* Effect of Prestresses on the Dispersion of Quasi-Lamb Waves in the System Consisting of an Ideal Liquid Layer and a Compressible Elastic Layer // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 2. – P. 139 – 148.
13. *Bagno A.M.* Dispersion Properties of Lamb Waves in an Elastic Layer–Ideal Liquid Half-Space System // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 6. – P. 609 – 616.
14. *Bagno A.M., Guz A.N.* Elastic Waves in Pre-stressed Bodies Interacting with a Fluid (survey) // Int. Appl. Mech. – 1997. – **33**, N 6. – P. 435 – 463.
15. *Bagno A.M., Guz A.N.* Effect of Prestresses on the Dispersion of Waves in a System Consisting of a Viscous Liquid Layer and Compressible Elastic Layer // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 4. – P. 333 – 341.
16. *Drinkwater B.W., Wilcox P.D.* Ultrasonic arrays for non-destructive evaluation: A review // NDT and E Int. – 2006. – **39**, N 7. – P. 525 – 541.
17. *Gibson A., Popovics J.* Lamb wave basis for impact-echo method analysis // J. Engng. Mech. – 2005. – **131**, N 4. – P. 438 – 443.
18. *Guz A.N.* Aerohydroelasticity Problems for Bodies with Initial Stresses // Int. Appl. Mech. – 1980. – **16**, N 3. – P. 175 – 190.
19. *Guz A.N.* Elastic Waves in Bodies with Initial (Residual) Stresses // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, N 1. – P. 23 – 59.
20. *Guz A.N.* Dynamics of Compressible Viscous Fluid. – Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2009. – 428 p.
21. *Guz A.N.* On the foundations of the ultrasonic non-destructive determination of stresses in near-the- surface layers of materials. Review // J. Phys. Science and Application. – 2011. – **1**, N 1. – P. 1 – 15.

22. *Guz A.N.* Ultrasonic Nondestructive Method for Stress Analysis of Structural Members and Near-Surface Layers of Materials: Focus on Ukrainian Research (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2014. – **50**, N 3. – P. 231 – 252.
23. *Guz A.N., Bagno A.M.* Effect of Prestresses on the Dispersion of Lamb Waves in a System Consisting of a Viscous Liquid Layer and a Compressible Elastic Layer // *Int. Appl. Mech.* – 2018. – **54**, N 3. – P. 249 – 258.
24. *Guz A.N., Bagno A.M.* Effect of Prestresses on Lamb Waves in a System Consisting of an Ideal Liquid Half-Space and an Elastic Layer // *Int. Appl. Mech.* – 2018. – **54**, N 5. – P. 495 – 505.
25. *Guz A.N., Bagno A.M.* Effect of Prestresses on Quasi-Lamb Waves in a System Consisting of a Compressible Viscous Liquid Half-Space and an Elastic Layer // *Int. Appl. Mech.* – 2018. – **54**, N 6. – P. 617 – 627.
26. *Guz A.N., Zhuk A.P., Bagno A.M.* Dynamics of Elastic Bodies, Solid Particles, and Fluid Parcels in a Compressible Viscous Fluid (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2016. – **52**, N 5. – P. 449 – 507.
27. *Jhang K.Y.* Nonlinear ultrasonic techniques for nondestructive assessment of micro damage in material: a review // *Int. J. Precision Engng. and Manufacturing.* – 2009. – **10**, N 1. – P. 123 – 135.
28. *Kessler S.S., Spearing S.M., Soutis C.* Damage detection in composite materials using Lamb wave methods // *Smart Materials and Structures.* – 2002. – **11**, N 2. – P. 269 – 279.
29. *Kobayashi M., Tang S., Miura S., Iwabuchi K., Oomori S., Fujiki H.* Ultrasonic nondestructive material evaluation method and study on texture and cross slip effects under simple and pure shear states // *Int. J. Plasticity.* – 2003. – **19**, N 6. – P. 771 – 804.
30. *Leonard K.R., Malyarenko E.V., Hinders M.K.* Ultrasonic Lamb wave tomography // *Inverse Problems.* – 2002. – **18**, N 6. – P. 1795 – 1808.
31. *Liu L., Ju Y.* A high-efficiency nondestructive method for remote detection and quantitative evaluation of pipe wall thinning using microwaves // *NDT and E Int.* – 2011. – **44**, N 1. – P. 106 – 110.
32. *Ottenio M., Destrade M., Ogden R.W.* Acoustic waves at the interface of a pre-stressed incompressible elastic solid and a viscous fluid // *Int. J. Non-Linear Mech.* – 2007. – **42**, N 2. – P. 310 – 320.
33. *Ramadas C., Balasubramaniam K., Joshi M., Krishnamurthy C.V.* Interaction of the primary anti-symmetric Lamb mode (Ao) with symmetric delaminations: numerical and experimental studies // *Smart Materials and Structures.* – 2009. – **18**, N 8. – P. 1 – 7.
34. *Rossini N.S., Dassisti M., Benyounis K.Y., Olabi A.G.* Methods of measuring residual stresses in components // *Materials and Design.* – 2012. – **35**, March. – P. 572 – 588.
35. *Spies M.* Analytical methods for modeling of ultrasonic nondestructive testing of anisotropic media // *Ultrasonics.* – 2004. – **42**, N 1 – 9. – P. 213 – 219.

Поступила 17.01.2018

Утверждена в печать 05.11.2019