

Н. П. Семенюк¹, В. М. Трач², Н. Б. Жукова¹

**УСТОЙЧИВОСТЬ И НАЧАЛЬНОЕ ЗАКРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ
ТРЕХСЛОЙНЫХ ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК
С ОДНОНАПРАВЛЕННО УПРУГИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ**

¹*Институт механики им. С. П. Тимошенко НАНУ,*

ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: compos@inmech.kiev.ua;

²*Национальный университет водного хозяйства и природопользования,
ул. Соборная, 11, 33018, Ровно, Украина; e-mail: trach-vm@ukr.net*

Abstract. A solution of the problem of stability and initial post-buckling behavior of the three-layer shells with a lightweight filler that is elastic only in the transverse direction is obtained. The resolving system of nonlinear equations is derived taking into account the discreteness of the structure, which allows the independent deformation of the inner and outer layers. To solve this system, the Koiter – Budiansky asymptotic method is used. An analysis is performed for the structures consisting of two cylindrical carbon-fiber shells which interact by means of a spring filler. It is shown that at axial compression by the same forces, the value of critical structure load lies in the interval between the critical loads of the separately taken inner and outer shells. In the initial post-buckling state, the buckling mode may be different. The increase of the filler rigidity is advisable up to the certain level.

Key words: stability, post-buckling behavior, sandwich shell, axial compression, transversely elastic filler, Koiter's asymptotic method.

Введение.

Трехслойные оболочки – особый вид оболочек с неоднородной структурой, средний слой которых существенно отличается от внешних не только толщиной, но и механическими свойствами. Как правило, средний слой (заполнитель) имеет большую толщину, но значительно меньшие по величине модули упругости и жесткости [1 – 3]. Роль заполнителя сводится к тому, чтобы существенно увеличить изгибную жесткость оболочки за счет разнесения высокомодульных тонких внешних слоев при незначительном увеличении веса. Такого рода заполнитель должен иметь соответствующие модули поперечной упругости, чтобы обеспечить совместность работы внешних слоев. Разработке методов расчета прочности и устойчивости трехслойных оболочек посвящено значительное число работ [1, 3]. Существенное углубление и уточнение исследования трехслойных и других типов составных оболочек получено в [7, 9, 11 – 17].

В настоящее время возникла необходимость в изучении другого вида трехслойных оболочек, когда средний слой можно представить как тело, обладающее упругостью только в трансверсальном направлении [16]. Если внешние слои взаимодействуют посредством перпендикулярных к их поверхности пружин, то эквивалентное континуальное тело будет обладать указанными свойствами. В работе [16] модель пружин между слоями двухслойной нанотрубки используется для учета взаимодействия, обусловленного силами отталкивания-притяжения Ван дер Ваальса. Устойчивость и начальное закритическое поведение однослойных цилиндрических оболочек с заполнителем рассмотрены в работе [5].

Ниже исследуем устойчивость трехслойных оболочек со средним слоем пружинного типа. Внешние слои могут иметь различные размеры, а также быть изготовлены из материалов с различными механическими свойствами, в том числе – из композитов. Влияние пружинного заполнителя на критические загрузки бифуркации и характер начального закритического поведения трехслойных оболочек является предметом изучения данной работы.

1. Нелинейные уравнения равновесия трехслойных оболочек.

При выводе нелинейных уравнений равновесия трехслойных оболочек исходим из вариационного принципа Лагранжа

$$\delta V - \delta A = 0, \quad (1)$$

где V – потенциальная энергия деформации оболочки; A – работа внешней нагрузки. Энергия V состоит из энергий двух внешних слоев V_1 и V_2 , а также среднего слоя V_3 . В соответствии с гипотезами Тимошенко для потенциальной энергии деформации V_i ($i=1, 2$) имеет место выражение

$$V_i = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left(T_{11,i} \varepsilon_{11,i} + T_{12,i} \varepsilon_{2,i} + T_{22,i} \varepsilon_{22,i} + T_{13,i} \varepsilon_{31,i} + T_{23,i} \varepsilon_{231,i} + \right. \\ \left. + M_{11,i} k_{11,i} + M_{12,i} k_{12,i} + M_{22,i} k_{22,i} \right) R_i dx d\varphi, \quad (2)$$

где L – длина оболочки; R_i – радиус срединной поверхности i -го слоя; $T_{mn,i}$, $M_{mn,i}$ – усилия и моменты, эквивалентные действующим в слоях напряжениям; $\varepsilon_{mn,i}$ – деформации; m, n – обозначения индексов; $k_{mn,i}$ – приращения кривизн и кручения.

Связь между силовыми и деформационными величинами задается в виде закона Гука

$$T_{11} = C_{11} \varepsilon_{11} + C_{12} \varepsilon_{12}; \quad T_{12} = C_{66} \varepsilon_{12}; \quad T_{22} = C_{12} \varepsilon_{11} + C_{22} \varepsilon_{22}; \quad T_{13} = C_{55} \varepsilon_{13}; \quad T_{23} = C_{44} \varepsilon_{23}; \quad (3) \\ M_{11} = D_{11} \varepsilon_{11} + D_{12} \varepsilon_{12}; \quad M_{12} = D_{66} k_{12}; \quad M_{22} = D_{12} k_{11} + D_{22} k_{22},$$

где C_{ij} , D_{ij} – жесткости оболочки на растяжение и изгиб [1].

Нелинейные выражения деформаций через перемещения принимаем в виде, соответствующем теории Муштари – Доннелла – Власова (МДВ)

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \theta_1^2; \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \theta_1 \theta_2; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R_i} + \frac{1}{2} \theta_2^2; \\ \varepsilon_{13} = \theta + \theta_1; \quad \varepsilon_{23} = \psi + \theta_2; \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \theta_1 = \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \theta_2 = \frac{\partial w}{\partial y}; \quad (4) \\ k_{11} = \frac{\partial \theta}{\partial x}; \quad k_{12} = \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad k_{22} = \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

где u, v – тангенциальные перемещения; w – перемещение по нормали, положительное направление которой определено к центру окружности; θ, ψ – углы поворота; $y = R_i \varphi$ – для i -го слоя.

Средний слой (3-й) предполагается абсолютно податливым во всех направлениях, кроме трансверсального (ось z). Начало оси лежит на срединной поверхности этого слоя. В этом случае потенциальная энергия 3-го слоя определяется выражением

$$V_3 = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-t_3/2}^{t_3/2} \sigma_{33} \varepsilon_{33} R_3 dx d\varphi dz. \quad (5)$$

Из соотношений теории упругости имеем

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \sigma_{33} = E_3 \varepsilon_{33}; \quad \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} = 0. \quad (6)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0; \quad w = w_0 + z \chi.$$

Условия контакта при $z = -t_3/2$ и $z = t_3/2$ будут такими:

$$w_1 = w_0 - \frac{t_3}{2} \chi; \quad w_2 = w_0 + \frac{t_3}{2} \chi.$$

Для перемещений среднего слоя имеем

$$w_0 = \frac{w_1 + w_2}{2}; \quad \chi = \frac{w_2 - w_1}{t_3}. \quad (7)$$

Следовательно, в этом случае имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{33} &= \frac{w_2 - w_1}{t_3}; \quad T_{33} = t_3 \sigma_{33} = E_3 t_3 \varepsilon_{33} = E_3 (w_2 - w_1); \\ V_3 &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{E_3}{t_3} (w_2 - w_1)^2 R_3 dx d\varphi. \end{aligned} \quad (8)$$

В работе [4] показано, что отношение E_3/t_3 равно коэффициенту постели двумерного основания толщиной t_3 без учета поперечных напряжений. Пусть

$$C_3 = \frac{E_3}{t_3}.$$

С использованием соотношений (2) – (8) из вариационного принципа (1), когда в качестве независимых функций принимаются перемещения u, v, w и углы θ, ψ , получим 10 уравнений в частных производных от указанных величин. В применяемом варианте теории оболочек использование выражения тангенциальных деформаций через перемещения (4) позволяет упростить разрешающую систему дифференциальных до 8-ми уравнений. Эта система имеет смешанный вид (содержит производные не только от перемещений, но и от функции усилий). Положим, что в функционале (2), кроме перемещений u, v, w , независимыми будут также тангенциальные усилия T_{11}, T_{12}, T_{22} . Для деформаций ε_{ij} ($i, j = 1, 2$) будем иметь равенства:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{\Delta} (T_{11} C_{22} - T_{12} C_{12}); \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{\Delta} (-T_{11} C_{12} + T_{22} C_{11}); \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{C_{66}} T_{12}; \quad \Delta = C_{11} C_{22} - C_{12}^2. \end{aligned}$$

Составляющую функционала (2) V_i преобразуем к виду

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \theta_1^2 \right) T_{11} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \theta_1 \theta_2 \right) T_{12} + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \theta_2^2 \right) T_{22} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{C_{11} C_{22} - C_{12}^2} (C_{22} T_{11}^2 + C_{11} T_{22}^2 - 2 C_{12} T_{11} T_{22}) - \frac{1}{C_{66}} T_{12}^2 + C_{13} \left(\theta + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + C_{23} \left(\psi + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] R_3 dx d\varphi \end{aligned}$$

$$+D_{11}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2+2D_{12}\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}+D_{22}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2+D_{66}\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\Big]dx d\varphi. \quad (9)$$

Здесь индекс «2» опущен, так как выражение (9) справедливо для обоих несущих слоев. Введем функцию усилий F , приняв

$$T_{11}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; T_{12}=-\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}; T_{22}=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}. \quad (10)$$

Учитывая, что перемещения среднего слоя, деформации ε_{33} и усилия T_{33} выражаются с помощью соотношений (5) – (7), варьируемыми в функционале вариационного принципа Лагранжа (1) будут функции F_1 и F_2 , прогибы w_1 и w_2 , функции θ_1, θ_2 и ψ_1, ψ_2 . Вследствие этого вариационное уравнение примет вид

$$\sum_{i=1}^2 \int_0^L \int_0^{2\pi} \left\{ \left[L_1(w_i, F_i) + \frac{1}{R_i} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} - \frac{1}{2}(w_i, w_i) \right] \delta F_i + [L_2(w_i, F, \theta_i, \psi_i) + (F_i, w_i) + q_i] \delta w_i + \right. \\ \left. + L_3(\theta_i, \psi_i, w_i) \delta \theta_i + L_3(\theta_i, \psi_i, w_i) \delta \psi_i + L_4(\theta_i, \psi_i, w_i) \delta \psi_i \right\} R_i dx d\varphi - \quad (11)$$

$$-\sum_{i=1}^2 \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{1}{R_i} \frac{\partial^2 F_i}{\partial \psi^2} + T_{11,0}^i \right) \delta w \right] \Big|_0^L R_i d\varphi = 0.$$

Предполагаем, что к торцевым сечениям каждого слоя приложены сжимающие усилия $T_{11,i} = T_{11}^0$, а поверхностное давление q только к поверхности первого слоя. В (11) использованы обозначения дифференциальных операторов $L_i(\)$ разрешающих функций:

$$L_1(\) = \left(A_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2A_{12} \frac{\partial^4}{R^2 \partial x^2 \partial \varphi^2} + A_{22} \frac{\partial^4}{R^4 \partial \varphi^4} \right) F_i + \frac{1}{R_i} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2}; \\ L_2(\) = \left[D_{11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{1}{R^2} (D_{12} + 2D_{16}) \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial \varphi^2} \right] \theta_i + \left[\frac{1}{R_i} (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \varphi} + \frac{1}{R_i^3} \frac{\partial^3}{\partial \varphi^3} \right] \psi_i + \\ + \frac{1}{R_i} \frac{\partial^2 F_i}{\partial x^3} - (-1)^i C (w_2 - w_1) \frac{R_3}{R_i}; \quad (12)$$

$$L_3(\) = \left(D_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R_i^2} D_{66} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \theta_i + \frac{1}{R_i} (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x \partial \varphi} - C_{55} \left(\theta_i + \frac{\partial w_i}{\partial x} \right);$$

$$L_4(\) = \frac{1}{R_i} (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial x \partial \varphi} + \left(D_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R_i^2} D_{22} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \psi_i - C_{44} \left(\psi_i + \frac{1}{R_i} \frac{\partial w_i}{\partial \varphi} \right).$$

В выражении L_1 имеются коэффициенты:

$$A_{11} = \frac{C_{11}}{\Delta}; A_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{C_{66}} - \frac{2C_{12}}{\Delta} \right); A_{66} = \frac{C_{22}}{\Delta}; \Delta = C_{11}C_{22} - C_{12}^2.$$

Оператор $(\)$ имеет вид

$$(F, w) = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \varphi} \frac{\partial w}{\partial x \partial \varphi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}.$$

Из вариационного уравнения (11) получаем (приравнявая к нулю выражения при вариациях $\delta F_i, \delta w_i, \delta \theta_i, \delta \psi_i$) восемь нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} L_1(F_i, w_i) + \frac{1}{2}(w_i, w_i) &= 0; \quad L_2(\theta_i, \psi_i, F_i) + (F_i, w_i) = q; \\ L_3(\theta_i, \psi_i, w_i) &= 0; \quad L_4(\theta_i, \psi_i, w_i) = 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (13)$$

Используя эти уравнения, исследуем напряженно-деформированное состояние оболочки на всей траектории деформирования, включая предельные точки, точки бифуркации, закритическое поведение. Ниже, полагая докритическое состояние безмоментным, ограничимся расчетом критической нагрузки и начального закритического поведения в окрестности критической точки. Для этого воспользуемся асимптотическим методом Койтера [10] в альтернативном варианте Будянского [6, 7]. Полагаем, что нагрузка на оболочку изменяется пропорционально параметру λ . Нагрузка бифуркации определяется значением этого параметра λ_c . Равновесное состояние оболочки после прохождения критической точки определяется изменившимся значением параметра λ , характер которого можно описать с помощью асимптотического разложения

$$\lambda = \lambda_c (1 + a\xi + b\xi^2 + \dots). \quad (14)$$

Таким образом, при известном значении параметра λ_c , согласно теории [10], закритическое поведение оболочки можно определить, если иметь значения коэффициентов ряда (14), т.е. a и b .

2. Асимптотический анализ нелинейных уравнений.

Следуя [7], представим разрешающие функции, относительно которых записаны уравнения (13) в виде асимптотических рядов по степеням малого параметра

$$\begin{bmatrix} F_i \\ w_i \\ \theta_i \\ \psi_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{i,0} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \xi \begin{bmatrix} F_{i,1} \\ w_{i,1} \\ \theta_{i,1} \\ \psi_{i,1} \end{bmatrix} + \xi^2 \begin{bmatrix} F_{i,2} \\ w_{i,2} \\ \theta_{i,2} \\ \psi_{i,2} \end{bmatrix} + \xi^3 \begin{bmatrix} F_{i,3} \\ w_{i,3} \\ \theta_{i,3} \\ \psi_{i,3} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

где ξ – малый параметр, амплитуда моды выпучивания, первый индекс i определяет номер слоя ($i = 1, 2$), второй – номер члена в разложении. При осевом сжатии усилиями $T_{11,0}^i$ и внешнем давлении интенсивностью q , для докритического напряженного состояния оболочки будем иметь формулы:

$$\frac{\partial^2 F_{i,0}}{R_i^2 \partial \varphi^2} = -\lambda a_i; \quad \frac{\partial^2 F_{i,0}}{\partial x^2} = -\lambda a_q; \quad \frac{\partial^2 F_{i,0}}{R_i \partial x \partial \varphi} = 0, \quad (16)$$

где параметр λ имеет размерность усилия, а коэффициенты a_i и a_q определяют соотношение между усилиями в осевом и окружном направлениях, знак «минус» обозначает, что усилия – сжимающие.

Подставим ряды (15) в вариационное уравнение (11). Приравнявая к нулю выражения при степенях параметра ξ , получим последовательность формулировок задач относительно функций, являющихся коэффициентами указанных рядов (15). При пер-

вой степени будем иметь вариационное уравнение равновесия в точке, где основная траектория пересекается с траекторией другого решения нелинейных уравнений. Однородная задача относительно функций с индексом «1» выводится из уравнения

$$\sum_{i=1}^2 \int_0^L \int_0^{2\pi} \left\{ L_1(F_{i,1}, \dots) \delta F_{i,1} + [L_2(F_{i,1}, \dots) + \lambda_c(F_{i,0}, w_{i,1})] \delta w_{i,1} + L_3(w_{i,1}, \dots) \delta \theta_{i,1} + L_4(w_{i,1}, \dots) \delta \psi_{i,1} \right\} R_i dx d\varphi = 0. \quad (17)$$

При учете выражения (16) скобка (,) принимает вид

$$\lambda(F_{i,0}, w_{i,1}) = -\lambda_c \left(a_i \frac{\partial^2 w_{i,1}}{\partial x^2} + a_q \frac{\partial^2 w_{i,1}}{R_i^2 \partial \varphi^2} \right). \quad (18)$$

Вариации функции в уравнении (17) могут принимать значения коэффициентов в разложениях (15). В результате получим соотношения их ортогональности в таком виде:

$$\sum_{i=1}^2 \int_0^L \int_0^{2\pi} \left\{ L_1(F_{i,1}, w_{i,1}) F_{i,n} + [L_2(F_{i,1}, \dots) - \lambda(F_{i,1}, w_{i,1})] w_{i,n} + L_3(w_{i,1}, \dots) \theta_{i,n} + L_4(w_{i,1}, \dots) \psi_{i,n} \right\} R_i dx d\varphi = 0. \quad (19)$$

Из этого условия следует также другой вид этого соотношения

$$\sum_{i=1}^2 \int_0^L \int_0^{2\pi} \left\{ L_1(F_{i,n}, w_{i,n}) F_{i,1} + [L_2(F_{i,n}, \dots) - \lambda(F_{i,n}, w_{i,1})] w_{i,1} + L_3(w_{i,n}, \dots) \theta_{i,1} + L_4(w_{i,n}, \dots) \psi_{i,1} \right\} R_i dx d\varphi = 0. \quad (20)$$

Используем условия (20) для определения коэффициентов a и b в разложении (14). Рассмотрим соотношение, из которого можно получить значение коэффициента a . При ξ^2 будем иметь

$$\sum_{i=1}^2 \int_0^L \int_0^{2\pi} \left\{ \left[L_1(F_{i,2}, \dots) + \frac{1}{2}(w_{i,1}, w_{i,1}) \right] F_{i,1} + [L_2(w_{i,2}, \dots) - a\lambda_c(F_{i,0}, w_{i,2}) + (F_{i,1}, w_{i,2})] w_{i,1} + L_3(w_{i,2}, \dots) \theta_{i,1} + L_4(w_{i,2}, \dots) \psi_{i,1} \right\} R_i dx d\varphi = 0. \quad (21)$$

Учитывая условия (20) при $n = 2$, а также, что

$$\int_0^{2\pi} \int_0^L \left[\frac{1}{2}(w_{i,1}, w_{i,1}) F_{i,1} + (F_{i,1}, w_{i,1}) w_{i,1} \right] R_i dx d\varphi = 0,$$

из (21) находим $a = 0$.

Аналогичный интеграл при ξ^3 приобретает вид

$$\sum_{i=1}^2 \int_0^L \int_0^{2\pi} \left\{ \left[L_1(F_{i,3}, \dots) + (w_{i,1}, w_{i,2}) \right] F_{i,1} + [L_2(w_{i,3}, \dots) - \lambda_c(F_{i,0}, w_{i,3}) + (F_{i,1}, w_{i,2}) + (F_{i,2}, w_{i,1}) - \lambda_c b(F_{i,0}, w_{i,1})] w_{i,1} + L_3(w_{i,3}, \dots) \theta_{i,1} + L_4(w_{i,3}, \dots) \psi_{i,1} \right\} R_i dx d\varphi = 0.$$

Если учесть условия ортогональности, из (20) получим

$$\sum_{i=1}^2 \int_0^L \int_0^{2\pi} \left\{ (w_{i,1}, w_{i,2}) F_{i,1} + \left[(F_{i,1}, w_{i,2}) + (F_{i,2}, w_{i,1}) \right] w_{i,1} - \lambda_c b (F_{i,0}, w_{i,1}) w_{i,1} \right\} R_i dx d\varphi = 0.$$

Эти уравнения позволяют вычислить коэффициент b , определяющий характер начального закритического поведения рассматриваемой оболочки. При известных решениях однородной задачи (17) и неоднородной (21), получим

$$b = -\frac{B}{\lambda_c A}, \quad (22)$$

где

$$B = \sum_{i=1}^2 \int_0^L \int_0^{2\pi} \left\{ \left[(w_{i,1}, w_{i,2}) F_{i,1} + (F_{i,1}, w_{i,2}) \right] w_{i,1} + (F_{i,2}, w_{i,1}) w_{i,1} \right\} R_i dx d\varphi;$$

$$A = \sum_{i=1}^2 \int_0^L \int_0^{2\pi} (F_{i,0}, w_{i,1}) w_{i,1} R_i dx d\varphi. \quad (23)$$

3. Решение задачи устойчивости и начального закритического поведения.

Для расчета критического значения параметра нагрузки λ_c воспользуемся вариационным уравнением (17). При заданных граничных условиях, ввиду постоянства коэффициентов при искомым функциях, решение можно представить в виде одного члена тригонометрического ряда. Тогда будем иметь формулы:

$$F_{i,1} = B^i \sin l_m x \cos n\varphi; \quad w_{i,1} = C^i \sin l_m x \cos n\varphi;$$

$$\theta_{i,1} = D^i \cos l_m x \cos n\varphi; \quad \psi_{i,1} = E^i \sin l_m x \sin n\varphi \quad (24)$$

для первого ($i=1$) и второго ($i=2$) слоев ($l_m = m\pi / L$, $m=1, 2, \dots$, $n=2, 3, \dots$).

После подстановки (24) в уравнения (17) и выполнения необходимых процедур получим систему однородных алгебраических уравнений

$$[X_{ij}] \bar{Y} = 0, \quad i, j = 1, \dots, 8; \quad \bar{Y} = (B^1, C^1, D^1, E^1, B^2, C^2, D^2, E^2), \quad (25)$$

где

$$X_{11} = A_{11} l_m^4 + 2A_{12} l_m^2 n_1^2 + A_{26} n_1^3; \quad X_{12} = \frac{1}{R_1} l_m^2; \quad X_{21} = X_{12}; \quad X_{22} = -\frac{R_3}{R_1} C_3;$$

$$X_{23} = D_{11} l_m^3 + (D_{12} + 2D_{66}) l_m n_1^2; \quad X_{24} = -(D_{12} + 2D_{66}) l_m^2 n_1; \quad X_{26} = -\frac{R_3}{R_1} C_3;$$

$$X_{32} = -C_{55} l_m; \quad X_{33} = -D_{11} l_m^2 - D_{66} n_1^2; \quad X_{34} = (D_{12} + D_{66}) l_m n_1;$$

$$X_{42} = C_{44} n_1; \quad X_{43} = X_{34}; \quad X_{44} = -D_{66} l_m^2 - D_{22} n_1^2; \quad n_1 = \frac{n}{R_1}.$$

Коэффициенты X_{ij} при $i=5, \dots, 8$ вычисляются по таким же формулам, но с заменой R_1 на R_2 , а также i, j на $i+4, j+4$, кроме X_{26} , так как $X_{62} = -(R_3 / R_2) C_3$. Восемь уравнений системы (25) сведем к двум уравнениям

$$\left[-\frac{X_{12}^2}{X_{11}} + X_{22} + X_{23} \frac{\Delta'_1}{\Delta'} + X_{24} \frac{\Delta'_2}{\Delta'} + \lambda (a'_t l_m^2 + a'_q n_1^2) \right] C^1 + X_{26} C^2 = 0;$$

$$X_{26}C^1 + \left[-\frac{X_{56}^2}{X_{55}} + X_{66} + X_{67} \frac{\Delta_1''}{\Delta''} + X_{68} \frac{\Delta_2''}{\Delta''} + \lambda(a_l l_m^2 + a_q n^2) \right] C^2 = 0. \quad (26)$$

Здесь $\Delta' = X_{33}X_{44} - X_{34}^2$; $\Delta_1' = -X_{32}X_{34} + X_{42}X_{43}$; $\Delta_2' = -X_{33}X_{42} + X_{32}X_{43}$.

Выражения для Δ'' , Δ_1'' , Δ_2'' будут такими же при замене индексов i, j на $i+4, j+4$.

Уравнения (26) используем для определения критического значения параметра λ_c и волновых чисел m и n , определяющих форму выпучивания при бифуркации.

При записи системы уравнений относительно функций с индексом «2» ограничимся только 1-м и 2-м, 5-м и 6-м, так как уравнения 3, 4, 7, 8 остаются однородными такого же вида, что и в предыдущей задаче. При $a = 0$ будем иметь:

$$L_1(F_{i,2}) = \frac{1}{2}(w_{i,1}, w_{i,1}); \quad L_2(w_{i,2}, \dots) - \lambda_c(F_{i,0}, w_{i,1}) = -(F_{i,1}, w_{i,1}). \quad (27)$$

При $i=1$ это будет 1-е и 2-е уравнения исходной системы, а при $i=2$ – 5-е и 6-е уравнения. При подстановке выражений (24) для бифуркационных функций $w_{i,1}$ и $F_{i,1}$ в (27) для правых частей получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(w_{i,1}, w_{i,1}) &= \gamma_1^{(i)} \left(\sum_k b_k \sin l_k x - \cos 2n\varphi \sum_k c_k \sin l_k x \right); \\ (F_{i,1}, w_{i,1}) &= \gamma_2^{(i)} \left(\sum_k b_k \sin l_k x - \cos 2n\varphi \sum_k c_k \sin l_k x \right), \end{aligned} \quad (28)$$

где $\gamma_1^{(i)} = \frac{1}{2}(C^i)^2 l_m^2 n^2$; $\gamma_2^{(i)} = B^i C^i l_m^2 n^2$; $b_k = \frac{4k}{\pi(k^2 - 4m^2)}$; $c_k = \frac{4}{n\pi}$, $k = 1, 3, \dots$

Решение уравнений (27) задаем в таком виде:

$$\begin{aligned} F_{i,2} &= \sum_k B_{k,0}^{(i)} \sin l_k x + \cos 2n\varphi \sum_k B_{k,2n}^{(i)} \sin l_k x; \quad w_{i,2} = \sum_k C_{k,0}^{(i)} \sin l_k x + \cos 2n\varphi \sum_k C_{k,2n}^{(i)} \sin l_k x; \\ \theta_{i,2} &= \sum_k D_{k,0}^{(i)} \cos l_k x + \cos 2n\varphi \sum_k D_{k,2n}^{(i)} \cos l_k x; \quad \psi_{i,2} = \sin 2n\varphi \sum_k E_{k,2n}^{(i)} \sin l_k x. \end{aligned} \quad (29)$$

Это решение состоит из осесимметричной и неосесимметричной частей, причем последняя имеет форму с удвоенным количеством волн, имевших место при бифуркации. Система алгебраических уравнений относительно коэффициентов рядов (29) распадается на независимые системы для каждого значения k . Матрица подсистем будет иметь вид (26). Тем же путем получим систему 2-х уравнений, которая в данном случае будет неоднородной. Коэффициенты осесимметричной составляющей в разложениях (29) находим при решении системы

$$\begin{aligned} \left(\lambda_{k,0}^{(1)} - \lambda_c T_{11,0}^{(1)} l_k^2 \right) C_{k,0}^{(1)} - \frac{R_3}{R_1} C_3 C_{k,0}^{(2)} &= -\left(\gamma_2^{(1)} + A_{11} l_k^2 \gamma_1^{(1)} \right); \\ -\frac{R_3}{R_2} C_3 C_{k,0}^{(1)} + \left(\lambda_{k,0}^{(2)} - \lambda_c T_{11,0}^{(2)} l_k^2 \right) C_{k,0}^{(1)} &= -\left(\gamma_2^{(2)} + A_{11} l_k^2 \gamma_1^{(2)} \right), \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$\lambda_{k,0}^{(i)} = \frac{D_{11} l_k^4}{1 + \frac{D_{11} l_k^3}{C_{55}}} + \frac{1}{A_{11} R_i^2} + \frac{R_3}{R_i} C_3. \quad (31)$$

Для определения коэффициентов $B_{k,0}^{(i)}$ служит выражение

$$B_{k,0}^{(i)} = \frac{1}{R_i A_{11} l_k^4} C_{k,0}^i + \frac{\gamma_1^{(i)}}{A_{11} l_k^4}. \quad (32)$$

Аналогичная система для решения неосесимметричной задачи имеет вид

$$\begin{aligned} & \left[\lambda_{k,2n}^{(1)} - \lambda_c \left(T_{11,0}^{(1)} l_k^2 + T_{22,0}^{(1)} (2n_1^2)^2 \right) \right] C_{m,2n}^{(1)} - \frac{R_3}{R_1} C_3 C_{k,2n}^{(2)} = \gamma_2^{(2)} + \frac{X_{12}}{X_{11}} \gamma_1^{(1)}; \\ & - \frac{R_3}{R_1} C_3 C_{k,2n}^{(1)} + \left[\lambda_{k,2n}^{(2)} - \lambda_c \left(T_{11,0}^{(2)} l_m^2 + T_{22,0}^{(2)} (2n_2)^2 \right) \right] C_{m,2n}^{(2)} = \gamma_2^{(2)} + \frac{X_{56}}{X_{55}} \gamma_1^{(2)}, \end{aligned} \quad (33)$$

где $\lambda_{k,2n}^{(1)} = \frac{X_{12}^2}{X_{11}} - X_{22} - X_{33} \frac{\Delta'_1}{\Delta'}$; $\lambda_{k,2n}^{(2)}$, $X_{i,j}$ вычисляются путем замены, аналогичной использованной выше.

Получив решение однородной (17) и неоднородной (27) систем уравнений, можем применить выражение (23) для определения коэффициента b , по величине и знаку которого можно судить о характере начального закритического поведения рассматриваемых оболочек [10]. Числитель уравнения (22) представим в таком виде:

$$\begin{aligned} B_i = & \sum_{i=1}^2 \int_0^L \int_0^{2\pi} \left[\frac{R}{R_i^2} \left(\frac{\partial^2 F_{i,1}}{\partial \varphi^2} \frac{\partial w_{i,1}}{\partial x} - \frac{\partial^2 F_{i,1}}{\partial x \partial \varphi} \frac{\partial w_{i,1}}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial w_{i,2}}{\partial x} + \right. \\ & + \frac{2}{R_i^2} \left(\frac{\partial^2 F_{i,1}}{\partial x^2} \frac{\partial w_{i,1}}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 F_{i,1}}{\partial x \partial \varphi} \frac{\partial w_{i,1}}{\partial x} \right) \frac{\partial w_{i,2}}{\partial \varphi} + \frac{1}{R_i^2} \left(\frac{\partial w_{i,1}}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 F_{i,2}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{R_i^2} \left(\frac{\partial w_{i,1}}{\partial \varphi} \right)^2 \frac{\partial^2 F_{i,2}}{\partial x^2} - \\ & \left. - \frac{2}{R_i^2} \left(\frac{\partial w_{i,1}}{\partial \varphi} \frac{\partial w_{i,1}}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 F_{i,2}}{\partial x \partial \varphi} \right] R_i dx d\varphi. \end{aligned} \quad (34)$$

Для знаменателя в случае действия осевого λa_i и окружного λa_q усилий имеем выражения

$$A_i = -\lambda_c \sum_{i=1}^2 \int_0^L \int_0^{2\pi} \left[a_i^i \left(\frac{\partial w_{i,1}}{\partial x} \right)^2 + a_q^i \left(\frac{\partial w_{i,1}}{R_i \partial \varphi} \right)^2 \right] R_i dx d\varphi. \quad (35)$$

С учетом этих обозначений получим

$$b = - \frac{(B_1 + B_2)}{(A_1 + A_2)}. \quad (36)$$

Функции $w_{i,1}$, $w_{i,2}$, $F_{i,1}$, $F_{i,2}$, заданные в виде тригонометрических функций (24) и тригонометрических рядов (29), становятся известными после решения однородной системы алгебраических уравнений (26) и неоднородной системы (33). Подстановка этих функций в выражения (34) и (35) с последующим интегрированием приводит к таким выражениям для числителя и знаменателя дроби (22):

$$\begin{aligned} B = & -2n^2 l_m^2 \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{1}{R_i^2} \sum_k \left[2 \left(2 \frac{B^i}{C^i} C_{k,0} + B_{k,0} \right) \frac{k}{4m^2 - k^2} + \left(2 \frac{B^i}{C^i} C_{k,2n} + B_{k,2n} \right) \frac{1}{k} \right] \right\}; \\ A = & \frac{\pi}{2} \sum_i (C^i)^2 \left(a_i^i l_m^3 + \frac{n^2}{R_i^2} a_q^i \right). \end{aligned}$$

При известном коэффициенте b можно вычислить критические значения нагрузки λ_s оболочки с геометрическими несовершенствами в виде моды выпучивания [10]

$$\left(1 - \frac{\lambda_s}{\lambda_c}\right)^{3/2} = \frac{3}{2} \sqrt{-3b} \bar{\xi} \frac{\lambda_s}{\lambda_c},$$

где $\bar{\xi}$ – амплитуда начального прогиба.

4. Числовые результаты расчета и их анализ.

Используем полученное решение для анализа особенностей выпучивания трехслойных оболочек, средний слой которых препятствует только сближению или удалению внешних слоев, но не оказывает сопротивления их взаимному проскальзыванию. Полагаем, что несущие внешние слои изготовлены из армированного углеродными волокнами эпоксидного связующего. Объемное содержание волокон в композите составляет 0,6. Модуль упругости углеродного волокна E_a принят равным 420 ГПа, связующего – $E = 3,5$ ГПа, коэффициенты Пуассона, соответственно, равны $\nu_a = 0,21$ и $\nu = 0,35$. Полученные по формулам [2] механические характеристики углепластика будут такими:

$$E_{11} = 253,42 \text{ ГПа}; \quad E_{22} = 17,41 \text{ ГПа}; \quad G_{12} = G_{13} = 5,04 \text{ ГПа}; \\ G_{23} = 4,36 \text{ ГПа}; \quad \nu_{12} = 0,257; \quad \nu_{21} = 0,011.$$

При анализе критических нагрузок и особенностей закритического поведения трехслойных оболочек рассмотрим три варианта, отличающиеся радиусом внутреннего слоя при заданной длине L . Радиус внешнего слоя $R_1 = 100$ мм полагаем неизменным. Внутренний слой будет иметь радиус $R_2 = 75$ мм, 50 мм, 25 мм. Радиус среднего слоя R_3 в каждом варианте определяется полусуммой $(R_1 + R_2)/2$. Толщины внешнего и внутреннего слоев $t = 5$ мм. Для среднего слоя толщину t_3 вычисляем, соответственно, рассматриваемому варианту: $t_3 = R_1 - R_2 - t$. Модуль упругости среднего слоя E_3 принимаем равным 20 МПа, жесткость $C_3 = E_3 / t_3$ уменьшается обратно пропорционально толщине. Эта жесткость (при исследовании ее влияния на устойчивость оболочки) будет увеличиваться кратно целому коэффициенту k .

Если между слоями связи нет или она очень незначительна, то критические осевые усилия каждого слоя будут различными. Для оболочки радиусом 100 мм имеем $T_{11,c} = 3604$ Н/мм, а для оболочки с радиусами 75 мм, 50 мм, 25 мм эти усилия будут равны, соответственно, 4927 Н/мм, 7642 Н/мм, 13650 Н/мм.

При наличии между слоями углепластика линейных пружин или радиально армированного легкого материала, нормальные перемещения w_1 и w_2 взаимосвязаны. Учет этого фактора в разработанной модели позволяет выявить ряд особенностей, сопутствующих потере устойчивости рассматриваемых оболочек, включая бифуркацию равновесного состояния и начальное закритическое поведение.

На рис. 1 приведены кривые, иллюстрирующие зависимость критических значений осевых усилий $T_{11,kr}$ от жесткости C_3 . На этом рисунке по оси абсцисс отложены значения коэффициента k , кратно которому увеличивается трансверсальная жесткость заполнителя. По оси орди-

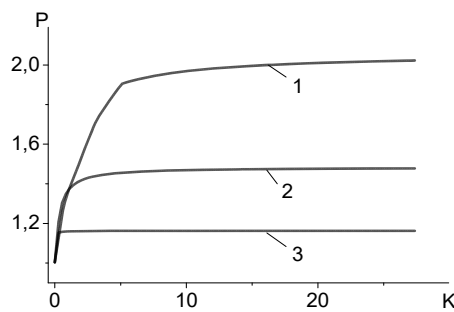


Рис. 1

нат – значения $P = T_{11,kr} / T_{11,c}$, где $T_{11,c}$ – критическое усилие однослойной оболочки радиусом R_1 . Кривая 1 получена для варианта с $R_2 = 25$ мм, кривая 2 – при $R_2 = 50$ мм, кривая 3 – при $R_2 = 75$ мм. Каждая из этих кривых имеет два характерных участка. Первый участок соответствует значительному влиянию жесткости C_3 на критические усилия, хотя максимальная ордината для каждого варианта трехслойной оболочки различна.

На кривой 1 эта ордината незначительно больше 1,9; на кривой 2 – 1,5; на кривой 3 – 1,2. Второй участок каждой кривой почти параллелен оси абсцисс. Зависимости коэффициента b от геометрических параметров слоев в рассматриваемых вариантах и трансверсальной жесткости C_3 в виде кривых показаны на рис. 2. Номерами 1, 2, 3 обозначены графики для тех же оболочек, что и на рис. 1. Для всех рассмотренных оболочек коэффициент b – отрицательный, что свидетельствует о том, что критическое состояние этих оболочек будет неустойчивым.

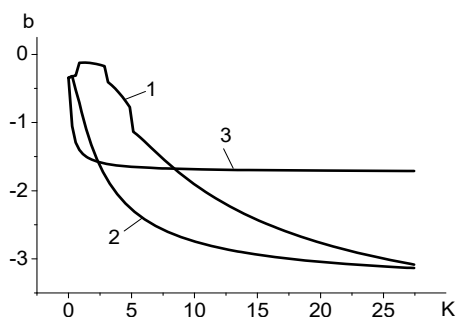


Рис. 2

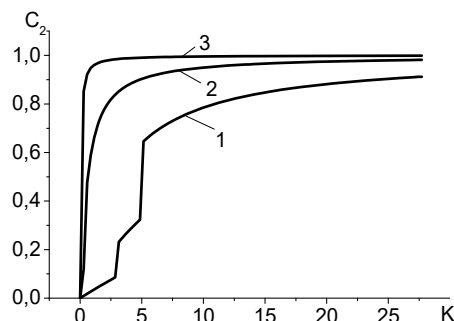


Рис. 3

Представление о том, как деформируется внутренний слой оболочки при бифуркации, дает рис. 3. Здесь C_2 – амплитуда волны второго слоя при потере устойчивости. Согласно постановке задачи следует, что волнообразование обеих несущих оболочек одинаково по форме, но может различаться по амплитуде. Если амплитуда моды выпучивания внешней оболочки равняется единице, то амплитуда моды внутренней оболочки в зависимости от жесткости C_3 будет для рассматриваемых вариантов изменяться так, как показано на рис. 3. Амплитуда возрастает от 0 до 1, но в каждом случае с различной скоростью. Из этого следует, что при некоторой жесткости среднего слоя, разнесенные углепластиковые слои, несмотря на различие в их радиусах, будут терять устойчивость по одинаковой форме. Критическое усилие для трехслойной оболочки $T_{11,kr} > T_{11,c}$ – для оболочки с радиусом R_1 и $T_{11,kr} < T_{11,c}$ – для оболочки с радиусом R_2 .

В принятой расчетной модели при нулевой жесткости среднего слоя критическое усилие $T_{11,kr} = T_{11,c}$ внешнего слоя.

На рис. 4 – 6 приведены графики, иллюстрирующие форму, которую приобретают образующие внешнего и внутреннего цилиндров в окрестности критической точки (начальное закритическое состояние). Кривые 1 на этих рисунках относятся к внешней оболочке, кривые 2 – к внутренней.

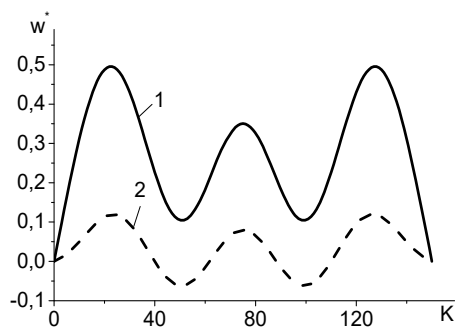


Рис. 4

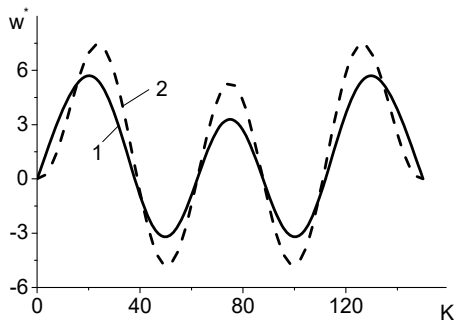


Рис. 5

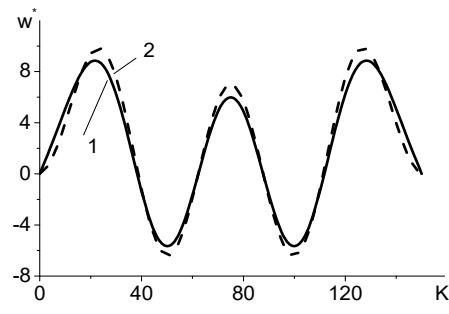


Рис. 6

На рис. 4 приведены графики для $C_3 = 1,704$ Н/мм, на рис. 5 – для $C_3 = 13,43$ Н/мм, на рис. 6 – для $C_3 = 42,67$ Н/мм. С ростом трансверсальной жесткости формы выпучивания слоев, как при бифуркации, так и в начальном закритическом состоянии сближаются. Такой характер потери устойчивости трехслойных оболочек наблюдается в том случае, если в исходной расчетной модели используется гипотеза ломаной линии [3].

Заключение.

Исследована устойчивость ранее не изучавшегося типа трехслойных оболочек из композитов с трансверсально упругим легким наполнителем. Его отличительной особенностью является то, что он обладает незначительной сдвиговой жесткостью, которой можно пренебречь. При этом возникает возможность изучения влияния поперечного обжатия на критические нагрузки независимо от других механических параметров наполнителя.

Получена разрешающая система нелинейных уравнений равновесия ортотропных трехслойных оболочек без привлечения единой гипотезы о распределении перемещений по толщине. Тем самым учитывается не только дискретность структуры оболочки, но и возможность почти независимого деформирования слоев.

Разработана процедура решения задачи устойчивости и закритического поведения трехслойной оболочки с использованием асимптотического метода Койтера – Будянского. Рассматриваем вариант, когда критической нагрузке соответствует наименьшее изолированное собственное число однородной задачи.

Проведен расчет на устойчивость оболочек, состоящих из двух коаксиальных взаимодействующих углепластиковых цилиндров различного радиуса при осевом сжатии. Показано, что потеря устойчивости составной конструкции рассматриваемого типа происходит при усилии, большем критического усилия отдельно взятой внешней оболочки и меньшем – внутренней. Начиная с некоторого значения трансверсальной жесткости наполнителя, критическая нагрузка на оболочку не растет, несмотря на рост жесткости. Чувствительности к несовершенствам также стабилизируются, но не так резко, как критические нагрузки. Отметим, что условия применимости асимптотического метода в рассмотренной задаче выполняются.

РЕЗЮМЕ. Отримано розв'язок задачі про стійкість та початкову закритичну поведінку тришарових оболонок з легким заповнювачем, що є пружним тільки в трансверсальному напрямку. Розв'язувальну систему нелінійних рівнянь отримано з врахуванням дискретності структури, що дозволяє незалежно деформуватися несучим шарам. Для розв'язку цієї системи використовується асимптотичний метод Койтера – Будянского. Виконано розрахунок конструкцій, які складаються з двох циліндричних вуглепластикових оболонок, що взаємодіють за допомогою пружинного заповнювача. Показано, що при осьовому стиску однаковими зусиллями значення критичного навантаження конструкції знаходиться в інтервалі між критичними значеннями окремо взятих внутрішньої та зовнішньої оболонок. У закритичному стані форми вигину можуть відрізнятись. Збільшення жорсткості заповнювача доцільне до деякого рівня.

1. *Ванин Г.А., Семенюк Н.П.* Устойчивость оболочек из композиционных материалов с несовершенствами. – К.: Наук. думка, 1987. – 200 с.
2. *Ванин Г.А., Семенюк Н.П., Емельянов Р.Ф.* Устойчивость оболочек из армированных материалов. – К.: Наук. думка, 1978. – 212 с.
3. *Григолюк Э.И., Чулков П.П.* Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. – М.: Машиностроение, 1973. – 172 с.
4. *Пастернак П.Л.* Основы метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. – М.: Стройиздат, 1954. – 56 с.
5. *Семенюк Н.П.* О начальном закритическом поведении стеклопластиковых цилиндрических оболочек с наполнителем при осевом сжатии // Прикл. механика. – 1988. – **24**, № 5. – С. 54 – 60.
6. *Ямаки Н.* Закритическое поведение и чувствительность к несовершенствам круглой цилиндрической оболочки, подверженной сжатию // Теоретическая и прикладная механика: Тр. XIV международ. конгр. IUTAM. – М.: Мир, 1979. – С. 715 – 750.
7. *Bespalova E.I., Boreyko N.P.* Determination of the Natural Frequencies of Compound Anisotropic Shell Systems Using Various Deformation Models // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, № 1. – P. 41 – 54.
8. *Budiansky B.* Theory of Buckling and Post-buckling Behavior of Elastic Structures // Adv. Appl. Mech. – 1974. – **14**. – P. 2 – 65.
9. *Hunt G.W., Wadee M.A.* Localization and Mode Interaction in Sandwich Structures // Proc. Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – 1998. – **454**, N 1972. – P. 1197 – 1216.
10. *Koiter W.T.* Elastic stability and post-buckling behavior // Proc. Symp. Nonlinear Problems. – Madison: Univ. of Wisconsin Press. – 1963. – P. 257 – 275.
11. *Leonenko D.V., Starovoitov E.I.* Vibrations of Cylindrical Sandwich Shells with Elastic Core Under Local Loads // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 4. – P. 359 – 367.
12. *Meish V.F., Meish Yu.A., Pavlyuk F.V.* Dynamics of a Three-Layer Elliptic Cylindrical Shells Reinforced with Discrete Rings // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 2. – P. 172 – 179.
13. *Meish V.F., Pavlyuk F.V.* Nonstationary Vibrations of Elliptic Cylindrical Sandwich Shells Reinforced with Discrete Stringers // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 1. – P. 67 – 75.
14. *Vinson J.R.* Sandwich Structures: Past, Present, Future / Sandwich Structures 7: Advancing in Sandwich Structures and Materials: Proc. of the 7th Int. Conf. on Sandwich Structures. – Aalborg Univ., Denmark, 2005. – P. 29 – 31.
15. *Wadee M.A., Yiatros S., Theofanous M.* Comparative Studies of Localized Bending of Sandwich Struts with Different Core Bending Models // Int. J. Non-linear Mech. – 2010. – **45**. – P. 111 – 120.
16. *Wang C.M., Ma Y.Q., Zhang Y., Ang K.* Buckling of double-walled carbon nanotubes modeled by solid shell elements // J. Appl. Physics. – 2006. – **99**(11). – P. 114317 – 114328.
17. *Yuan C., Bergsma O., Koussios S., Zu L., Beukers A.* Optimization of Sandwich Composites Fuselages under Flight Loads // Appl. Compos. Mater. – 2012. – **19**, N 1. – P. 47 – 64.

Поступила 13.04.2018

Утверждена в печать 04.06.2019