

С.Ю.Бабич¹, Н.Н.Дихтярук², С.В.Дегтяр²

**КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУХ ОДИНАКОВЫХ ПОЛОС
С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ, УСИЛЕННЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИ
РАСПОЛОЖЕННЫМИ КРЕПЛЕНИЯМИ**

¹*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,*

ул. Нестерова, 3, 0357, Киев, Украина; e-mail: mega-dihtyaruk@ukr.net;

²*Хмельницкий национальный университет,*

ул. Институтская, 11, 29016, Хмельницкий, Украина; e-mail: mega-dihtyaruk@ukr.net

Abstract. Within the framework of the linearized theory of elasticity, the plane contact problem on the transfer of loading from the periodically arranged elastic finite laps to two identical elastic stripes with initial stresses. The study is carried out in the general form for the theory of large initial deformations and different variants of the theory of small initial deformations for the arbitrary form of elastic potential. An effect of presence of the initial (residual) stresses on distribution of the contact forces in elastic stripes on the law of distribution of contact stresses over the contact line with the elastic periodically arranged finite laps is investigated.

Key words: contact problems, the linearized theory of elasticity, elastic protective stripe, initial (residual) tension, initial deformation.

Введение.

Важным фактором, оказывающим существенное влияние на надежность и долговечность инженерных сооружений, механических конструкций и деталей машин, является наличие в них начальных (остаточных) напряжений [1, 7]. В реальных конструкциях и деталях машин практически всегда существуют начальные или остаточные напряжения. Причины их возникновения могут быть различными. Зачастую начальные напряжения в деталях и конструкциях создаются специально при их изготовлении или сборке для компенсации тех напряжений, которые возникают в элементах конструкций и повышения их прочностных характеристик.

Один из наиболее распространенных способов передачи внешних усилий — это контактное взаимодействие, поэтому исследование этого вопроса является весьма актуальной проблемой на протяжении многих лет. В данное время в нашей стране и за рубежом всё более актуальным является исследование вопросов контактных взаимодействий, связанных с передачей нагрузки от упругих накладок разной формы и длины к массивным телам. Исследования в этом направлении нашли своё дальнейшее отображение в монографиях [1, 6]. Вопросам контактного взаимодействия предварительно напряжённой полуплоскости и накладок посвящены работы [1, 7, 9, 22]. Влияние начальных напряжений, присутствующих в упругой полосе, на контактное взаимодействие с упругими накладками исследуется в работах [3, 15]. Материалы данной работы отличаются от ранее известных авторов тем, что здесь впервые рассматривается исследование контактного взаимодействия периодически расположенных накладок конечной длины не с одной, а уже с двумя предварительно напряжёнными полосами. Это, в свою очередь, расширяет класс контактных задач, для постановки и решения которых можно использовать линеаризованную теорию упругости.

1. Постановка задачи. Основные соотношения.

В рамках линеаризованной теории упругости [1, 16, 18] изложим постановку и решение задачи о передаче нагрузки от периодически расположенных упругих накладок конечной длины к двум одинаковым, защемленным по одному краю, полосам с начальными напряжениями.

Предположим, что две бесконечные упругие полосы изготовлены из одинаковых сжимаемых или несжимаемых материалов с потенциалом произвольной структуры, а также, что в данных полосах действуют одинаковые начальные (остаточные) напряжения. Предполагается, что они соединены между собой на конечных отрезках $[-a + 2kl; a + 2kl]$ ($l > a$, $k = 0 \pm 1, \pm 2, \dots$) периодически повторяющимися упругими накладками малой толщины h . Начальные напряжения в упругих накладках отсутствуют, модуль упругости материала накладок E_1 и коэффициент Пуассона ν_1 и они находятся в условиях плоской деформации. Толщина предварительно напряжённых полос H .

Необходимо определить влияние начальных напряжений в упругих полосах на закон распределения нормальных $p(y_1)$ и тангенциальных $q(y_1)$ контактных напряжений в области контакта упругих накладок с упругими полосами, когда на них действует горизонтальная периодическая нагрузка с периодом $2l$ и интенсивностью $q_0(y_1)$ (рис. 1).

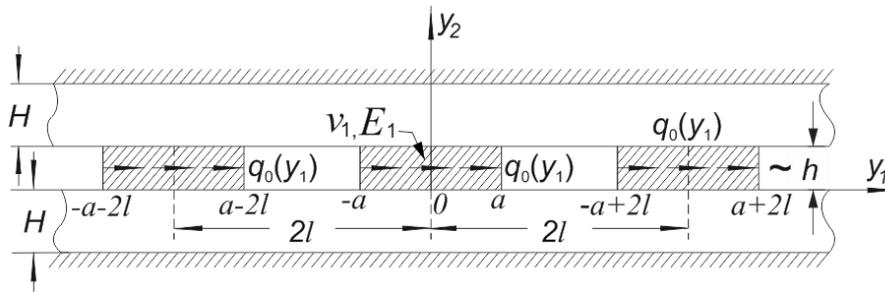


Рис. 1

В силу периодичности рассматриваемой задачи влияние начальных (остаточных) напряжений под каждой из упругих тонких накладок будет одинаковым, поэтому можно ограничиться рассмотрением только одной из них. Рассмотрим, например, накладку, которая размещена на отрезке $[-a, a]$.

Следует отметить, что упругая накладка в вертикальном направлении Oy_2 изгибается как обычная балка, а в горизонтальном направлении оси Oy_1 сжимается или растягивается, как обычный стержень с конечной жесткостью, который находится в одноосном напряженно-деформированном состоянии [4, 17]. Исходя из этого, для поставленной задачи будут иметь место следующие уравнения:

$$\frac{du(y_1)}{dy_1} = \frac{1}{E_1 h} \int_{-a}^{y_1} [2q(\xi) - q_0(\xi)] d\xi \quad (-a < y_1 < a); \quad (1)$$

$$\frac{dv(y_1)}{dy_1} = 0, \quad \forall y_1 \in (-a < y_1 < a),$$

где $u(y_1)$, $v(y_1)$ – перемещения граничных точек стрингера.

2. О преобразовании сингулярных интегральных уравнений.

Условия контакта стрингера и полосы с начальными (остаточными) напряжениями имеют вид:

$$u(y_1) = u_1(y_1); \quad v(y_1) = u_2(y_1), \quad (-a < y_1 < a). \quad (2)$$

Здесь $u_1(y_1)$, $u_2(y_1)$ – перемещения граничных точек упругой полосы с начальными (остаточными) напряжениями.

Граничные условия на концах упругой накладки (стрингера) вследствие отсутствия внешних усилий можно записать в виде: $Q(y_1) = 0$; $P(y_1) = 0$; $M(y_1) = 0$ при $y_1 = \pm a$, где

$$Q(y_1) = \int_{-a}^{y_1} [q(\tau) - q_0(\tau)] d\tau, \quad |y_1| \leq a;$$

$$P(y_1) = \int_{-a}^{y_1} [p(\tau) - p_0(\tau)] d\tau, \quad |y_1| \leq a;$$

$$M(y_1) = \int_{-a}^{y_1} (y_1 - \tau)[p(\tau) - p_0(\tau)] d\tau, \quad |y_1| \leq a.$$

Здесь $Q(y_1)$ – продольная сила; $P(y_1)$ – поперечная сила; $M(y_1)$ – изгибающий момент в сечении стрингера.

Если учесть (2) и выражения для вычисления перемещений граничных точек в области контакта $y_1 \in [-a, a]$ на грани $y_2 = 0$ упругой полосы с начальными (остаточными) напряжениями [15], получаем известную систему интегро-дифференциальных уравнений.

Если для этой системы ввести новую функцию и произвести замену

$$X(\tau) = \tilde{p}(\tau) + i\tilde{q}(\tau); \quad (\tau = \xi, \eta); \quad \delta = \pi a / l, \quad (3)$$

то после некоторых преобразований получаем сингулярное интегральное уравнение с ядром Гильберта [3, 4]:

$$\begin{aligned} & i\beta_1 X(\xi) + \int_{-\delta}^{\delta} X(\eta) \operatorname{ctg} \frac{\xi - \eta}{2} d\eta - \int_{-\delta}^{\delta} \tilde{L}_{11}(\xi - \eta) X(\eta) d\eta - \\ & - i \int_{-\delta}^{\delta} \tilde{L}_{12}(\xi - \eta) X(\eta) d\eta - \int_{-\delta}^{\delta} \tilde{L}_{22}(\xi - \eta) \bar{X}(\eta) d\eta + \beta_2 \int_{-\delta}^{\delta} [X(\eta) - \bar{X}(\eta)] d\eta = \\ & = i[\beta_2 \tilde{Q}_1(\xi) + \lambda_4] d\tau - \frac{\beta_1}{2\pi} \quad (-\delta < \xi < \delta) \end{aligned} \quad (4)$$

с граничным условием

$$\int_{-\delta}^{\delta} X(\eta) d\eta = \frac{i\pi}{l}. \quad (5)$$

Здесь $\bar{X}(\eta)$ – функция комплексно сопряженная функции $X(\eta)$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_1(\xi) &= \int_{-\delta}^{\delta} \tilde{q}_0(\eta) d\eta; \quad Q_0 = \int_{-a}^a q(\eta) d\eta; \quad M_0 = \int_{-a}^a \xi p(\xi) d\xi; \\ \tilde{p}(\tau) &= p\left(\frac{l\tau}{\pi}\right) \frac{1}{Q_0}; \quad \tilde{q}(\tau) = q\left(\frac{l\tau}{\pi}\right) \frac{1}{Q_0}; \quad \tilde{q}_0(\tau) = q_0\left(\frac{l\tau}{\pi}\right) \frac{1}{Q_0}. \end{aligned} \quad (6)$$

Величины $\tilde{L}_{ij}(\tau)$, β_i , λ_4 характеризуют начальное (остаточное) напряжённое состояние и определяются для сжимаемых и несжимаемых тел в случае конкретных упругих потенциалов отдельно для равных и неравных корней определяющего уравнения выражениями [1]. $\tilde{Q}_1(\xi)$ – функция распределения тангенциальных контактных напряжений вдоль линии контакта стрингера и упругой полосы с начальными напряжениями.

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению сингулярного интегрального уравнения (4) с граничным условием (5).

Решение этого уравнения ищем в виде ряда по функциям Якоби [4, 6]:

$$X(\xi) = w(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{X}_n P_n^{(\alpha, \beta)} \left(\operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \operatorname{tg} \frac{\xi}{2} \right) \quad (|\xi| < \delta), \quad (7)$$

где $\left\{ P_n^{(\alpha, \beta)}(\operatorname{ctg} \delta / 2 - \operatorname{tg} \xi / 2) \right\}_{n=0}^{\infty}$ – многочлены Якоби, ортогональные на отрезке

$$[-\delta; \delta] \text{ относительно веса } w(\xi) = \sec \frac{\xi}{2} \left(\sin \frac{\delta - \xi}{2} \right)^{\alpha} \left(\sin \frac{\delta + \xi}{2} \right)^{\beta},$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} - i\alpha_1; \quad \beta = -\frac{1}{2} + i\alpha_1; \quad \alpha_1 = \frac{\ln(3 - 4c_{44})}{2\pi}.$$

Здесь c_{44} – параметр, который определяет начальное напряжённое состояние в полосе.

Отметим, что \tilde{X}_n – это бесконечный ряд неизвестных комплексных коэффициентов, которые необходимо определить. Для их определения подставляем значения (7) в уравнение (4). Далее, используя свойства ортогональности многочленов Якоби [5, 6], для определения неизвестных величин \tilde{X}_n получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$l_m \tilde{X}_m + \sum_{n=1}^{\infty} \left[D_{m,n}^{(1)} \tilde{X}_n + D_{m,n}^{(2)} \bar{\tilde{X}}_n \right] = - \left[D_m^{(0)} + D_m^{(1)} X_0 + D_m^{(2)} \bar{X}_0 \right] \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (8)$$

Здесь введены обозначения

$$l_m = \frac{4\pi \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \Gamma(m - \alpha) \Gamma(m - \beta)}{\operatorname{ch} \pi \alpha_1 (m!)^2};$$

$$D_{m,n}^{(1)} = L_{m,n}^{(11)} + L_{m,n}^{(12)} + L_{m,n}^{(13)}; \quad D_{m,n}^{(2)} = L_{m,n}^{(22)} + L_{m,n}^{(23)}; \quad D_m^{(1)} = L_m^{(11)} + L_m^{(12)} - L_m^{(13)}; \quad D_m^{(2)} = L_m^{(22)} + L_m^{(23)};$$

$$D_m^{(0)} = \int_{-\delta}^{\delta} Q_1^*(\xi) w_1(\xi) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)} \left(\operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\xi}{2} \right) d\xi;$$

$$L_{m,n}^{(j3)} = \lambda_1 \int_{-\delta}^{\delta} \left\{ \int_{-\delta}^{\xi} \left[(2-j)w(\eta) \cdot P_n^{(\alpha, \beta)} \left(\operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\eta}{2} \right) + (j-1)\bar{w}(\eta) \bar{P}_n^{(\alpha, \beta)} \left(\operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \operatorname{tg} \frac{\eta}{2} \right) \right] d\eta \right\} w_1(\xi) \times \\ \times P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)} \left(\operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\xi}{2} \right) d\xi;$$

$$L_m^{(j3)} = \lambda_1 \int_{-\delta}^{\delta} \left\{ \int_{-\delta}^{\xi} [(2-j)w(\eta) + (j-1)\bar{w}(\eta)] d\eta \right\} w_1(\xi) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)} \left(\operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\xi}{2} \right) d\xi;$$

$$\begin{aligned}
L_{m,n}^{(1j)} &= [(2-j) + i(j-1)] \int_{-\delta}^{\delta} \left\{ \tilde{L}_{ij}(\xi - \eta) w(\eta) \cdot P_n^{(\alpha, \beta)} \left(\operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\xi}{2} \right) d\xi \right\} \times \\
&\quad \times w_1(\xi) \cdot P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)} \left(\operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\xi}{2} \right) d\xi, \quad j = 1, 2; \\
L_{m,n}^{(22)} &= \int_{-\delta}^{\delta} \left\{ \int_{-\delta}^{\delta} \tilde{L}_{22}(\xi - \eta) \bar{w}(\eta) d\eta \right\} w_1(\xi) P_n^{(-\alpha, -\beta)} \left(\operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \operatorname{tg} \frac{\xi}{2} \right) d\xi; \\
L_m^{(22)} &= \int_{-\delta}^{\delta} \left\{ \int_{-\delta}^{\delta} [\beta_2(\xi - \eta)^2 + \beta_3] \bar{w}(\eta) d\eta \right\} w_1(\xi) P_{m-1}^{(-\alpha, -\beta)} \left(\operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\xi}{2} \right) d\xi,
\end{aligned}$$

где β_i, λ_1 – параметры, которые определяют начальное напряжённое состояние в полосе, $w_1(\xi) = \sec \frac{\xi}{2} \left(\sin \frac{\delta - \xi}{2} \right)^\alpha \left(\sin \frac{\delta + \xi}{2} \right)^\beta$.

Для использования численных методов при решении системы (8) необходимо ещё определить коэффициент X_0 , который входит в правую часть системы [4, 6, 18]. Коэффициент X_0 можно найти из граничного условия (5) при помощи ряда (7). В результате получим

$$X_0 = \frac{\operatorname{ch} \pi \alpha_1 \cdot \cos \frac{\delta}{2}}{2l} i. \quad (9)$$

Система (8) квазирегулярна, так как суммы

$$L_m = l_m m^\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\varepsilon} \left[|D_{m,n}^{(1)}| + |D_{m,n}^{(2)}| \right] \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (10)$$

и свободный член $d_m = l_m^* m^\varepsilon \left[|D_m^0| + |D_m^{(1)}| + |D_m^{(2)}| \right]$, где $l_m^* = (ml_m)^{-1} = O(1)$, имеют порядок $O(m^{-(1/2)+\varepsilon})$ при $m \rightarrow \infty$. Такие оценки дают возможность утверждать, что система квазирегулярна для произвольных значений физических и геометрических параметров широкого класса конструкционных материалов. Это значит, что коэффициенты матрицы системы быстро уменьшаются с ростом m и n от диагональных элементов и её можно решить известными численными методами.

Исследования, приведённые в этой статье, дают возможность сделать ряд обобщающих выводов, относящихся к влиянию начальных напряжений на закон распределения контактных усилий под накладками, взаимодействующими с предварительно напряжёнными полосами.

Рассматриваемый случай подтверждает то предположение, что напряжения под упругими, периодически расположенными накладками, усиливающими полосы с начальными напряжениями и без них, при действии одинаковых внешних усилий будут идентичны. В этом легко убедиться, сравнивая формулы для перемещений в упругих полосах [6] без начальных напряжений и полосах [1, 4] с начальными напряжениями при действии идентичных внешних усилий.

Как известно, расстояние между накладками является важным параметром влияния их друг на друга. Однако выяснилось, что на закон распределения контактных напряжений, кроме расстояния между накладками существенное влияние оказывают начальные напряжения в полосах. Эти влияния можно определить для конкретного вида упругого потенциала с помощью известных параметров [1, 4]. Закон изменения перемещений под накладками согласно [4 – 6] для потенциалов простейшей структу-

ры в случае сжимаемых тел (гармонический потенциал) и несжимаемых тел (потенциал Бартенева – Хазановича), которые выражаются формулами [1], приведен на (рис. 2, 3), соответственно

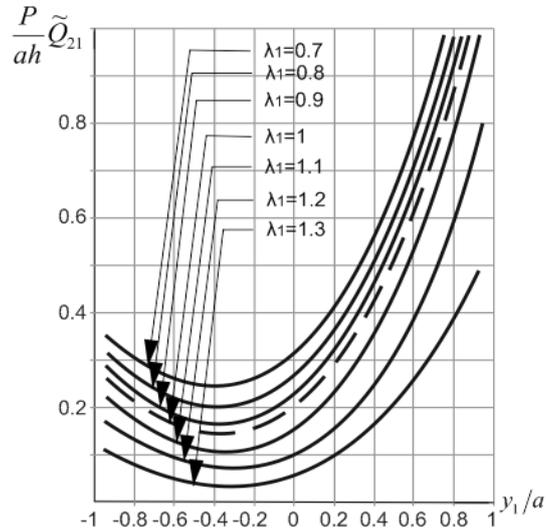


Рис. 2

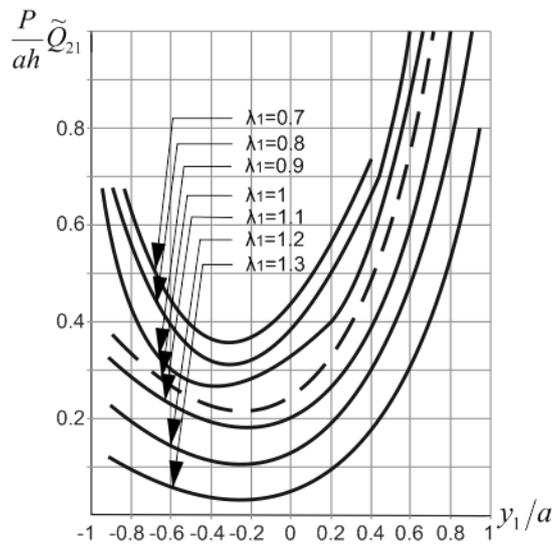


Рис. 3

Здесь $\frac{P}{ah} \tilde{Q}_{21}$ – безразмерные контактные тангенциальные напряжения; λ_1 – начальные удлинения вдоль оси Oy_1 , которые определяют перемещения начального состояния; P – вертикальная нагрузка приложенная к накладке; $\tilde{Q}_{21} = q_0(y_1)\delta(y_1)$ – тангенциальная сила действующая на накладку, где $\delta(y_1)$ – известная функция Дирака.

Значение $\lambda_1 = 1$ (на графиках пунктирная линия) соответствует классической теории упругости и совпадает с результатами работы [7]; $\lambda_1 = 0,7; 0,8; 0,9$ соответствуют начальным напряжениям сжатия; $\lambda_1 = 1,1; 1,2; 1,3$ соответствуют начальным напряже-

ниям растяжения; y_1/a – безразмерная координата начального напряжённого состояния в упругих полосах с начальными напряжениями.

Из графиков следует, что в случае сжатия ($\lambda_1 < 1$) перемещения под накладками возрастают значительно, в случае растяжения ($\lambda_1 > 1$) отмечается их уменьшение. Качественная картина в случае обоих потенциалов сохраняется. Отметим, что аналогичная закономерность влияния начальных напряжений на перемещения отмечена ранее и для упругих штампов [1].

Следует отметить, что особенности напряжений на концах накладок аналогичны особенностям, которые имеют место в классическом случае, т.е. в случае отсутствия начальных напряжений [6]. Анализ поведения интеграла типа Коши вблизи концов линии интегрирования, а также вид решения в форме (7) (весовая функция) указывают на осциллирующую особенность контактных напряжений вблизи концов накладки. [1, 6].

Заключение.

В работе в рамках линеаризованной теории упругости получено решение плоской задачи о передаче горизонтальной нагрузки от упругих периодически расположенных накладок конечной длины к двум зашпелённым по одному краю одинаковым полосам с начальными напряжениями. Исследования проведены в общем виде для теории больших начальных деформаций и разных вариантов теории малых начальных деформаций при произвольной структуре упругого потенциала. Решение задачи сведено к решению сингулярного интегрального уравнения, решение которого строится в виде ряда по полиномам Якоби. После ряда преобразований [6, 12] получаем квазирегулярную бесконечную систему линейных алгебраических уравнений, которая в дальнейшем решается известными численными методами [6].

В результате исследований установлено, что наличие начальных напряжений в упругих полосах приводят к существенному изменению закона распределения контактных напряжений; при этом в случае сжатия контактные напряжения значительно уменьшаются (в случае растяжения – увеличиваются), а перемещения в случае сжатия значительно возрастают (при растяжении – уменьшаются). Более существенное влияние (количественного характера) начальные (остаточные) напряжения оказывают в высокоэластических материалах по сравнению с более жесткими материалами; качественное влияние за результатами исследований – имеет идентичный характер.

Научные исследования, результаты которых опубликованы в данной статье, выполнены за счет средств бюджетной программы «Поддержка приоритетных направлений научных исследований» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. В рамках линеаризованої теорії пружності розглянуто плоску контактну задачу про передачу навантаження від пружних періодично розміщених скінчених накладок до двох однакових смуг з початковими напруженнями. Дослідження проведені в загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій і різних варіантів теорії малих початкових деформацій для довільної структури пружного потенціалу. Досліджено вплив наявності початкових (залишкових) напружень у смугах на закон розподілу контактних напружень по лінії контакту з пружними періодично розміщеними скінченими накладками.

1. Гузь О.М., Бабич С.Ю., Рудницький В.Б. Контактна взаємодія пружних тіл з початковими напруженнями. – К.: Вища шк., 1995. – 305 с.
2. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 468 с.
3. Діхтярук М.М. Визначення функції впливу для пружної смуги з початковими (залишковими) напруженнями // Праці 4-го Міжнародного симпозіуму з трибофатики (ISTF), 23 – 27 вересня 2002 р. Тернопіль (Україна) / Відп.ред. В.Т.Трошенко. – Тернопіль: Терноп. держ. техн. ун-т ім. Івана Пулюя, 2002. – С. 426 – 431.

4. Діхтярук М.М. Періодична контактна задача для пружної смуги з початковими (залишковими) напруженнями // Доп. НАН України. – 2004. № 3. – С. 46 – 49.
5. Рудницький В.Б., Діхтярук Н.Н. Упругая полоса с начальными напряжениями, усиленная упругими накладками // Прикл. механика. – 2002. – **38**, № 11. – С. 81 – 88.
6. Саркисян В.С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. – Ереван: Изд. Ереван. ун-та, 1983. – 260 с.
7. Akopyan V.N., Mirzoyan S.A., Mkhitaryan S.M. The Problem of the Contact Between a Broken Stringer and an Elastic Infinite Strip Containing a Vertical Edge Crack // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 2. – P. 176 – 186.
8. Aleksandrov V.M. Optimal control of linear systems with interval constraints // Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. – 2015. – **55**, №:5. – P. 758 – 775.
9. Babich S.Yu., Glukhov Yu.P. Bending a Plate on Prestressed Elastic Foundation Under Live Static Load // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 3. – P. 287 – 299.
10. Babich S.Yu., Guz A.N., Rudnitsky V.B. Contact Problems for Prestressed Elastic Bodies and Rigid and Elastic Punches // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, N 7. – P. 744 – 765.
11. Bosakov S.V. Finite Integral Transform Method in Static Problems for Inhomogeneous Plates // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 6. – P. 651 – 663.
12. Guz A.N. Ultrasonic Nondestructive Method for Stress Analysis of Structural Members and Near-Surface Layers of Materials: Focus on Ukrainian Research (Review) // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 3. – P. 231– 252.
13. Guz A.N. Establishing the Foundations of the Mechanics of Fracture of Materials Compressed Along Cracks (Review) // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 1. – P. 1 – 57.
14. Guz A.N. Recognition of the Achievements of the S. P. Timoshenko Institute of Mechanics by the World's Scientific Community // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 1. – P. 1 – 11.
15. Dikhtyaruk N.N. Equilibrium of a Prestressed Strip Reinforced with Elastic Plates // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, N 3. – P. 290 – 296.
16. Dikhtyaruk N.N. Load transfer from the infinite stringer to the two jammed along one edge identical stripes with initial (residual) stresses // Scientific Journal of the Ternopil National Technical University. – 2016 – **83**, N 3. – P. 51 – 61.
17. Rudnitsky V.B., Dikhtyaruk N.N. A Prestressed Elastic Strip with Elastic Reinforcements // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, N 11. – P. 1354 – 1360.
18. Rudnitsky V.B., Dikhtyaruk N.N. Interaction Between an Infinite Stringer and Two Identical Prestressed Strips: Contact Problem. // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 2. – P. 149 – 155.
19. Moses O.P., Adewale A.O., Olusegun O.A. Numerical Analysis of Thermo-Elastic Contact Problem of Disc Brakes for Vehicle on Gradient Surfaces. // World J. of Engineering and Technology. – 2016. – **4**, N 1. – P. 51 – 58.
20. Yaretskaya N.A. Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 4. – P. 378 – 388.
21. Yaretskaya N.A. The impact of the initial (residual) stresses on the contact interaction of elastic cylindrical punch and an elastic layer // Bulletin of NAS of Ukraine. – 2014. – N 1. – P. 57 – 62.
22. Yaretskaya N.F. Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 5. – P. 539 – 543.
23. Yuan W.K., Long J.M., Ding Y., Wang G.F. Micro/Nanocontact Between a Rigid Ellipsoid and an Elastic Substrate With Surface Tension // ASME. J. Appl. Mech. – 2017. – **84**, N 1. – P. 011012-1 – 011012-7.

Поступила 11.09.2018

Утверждена в печать 04.06.2019