А.Я.Григоренко, С.Н.Яремченко

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ПОЛЫХ ЦИЛИНДРОВ В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПОСТАНОВКЕ НА ОСНОВАНИИ РАЗЛИЧНЫХ ПОДХОДОВ

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: ayagrigorenko1991@gmail.com

Abstract. The equations of three-dimensional theory of elasticity is used for a study of the stress-strain state in an inhomogeneous hollow cylinder with rigidly clamped ends. The corresponding problem is solved by the spline-approximation and finite elements methods. The two dimension splines are used to reduce the system of partial differential equations to a system of ordinary differential equations of higher order for the radial coordinate, which is then solved by using the stable discrete orthogonalization method. A comparison of results obtained by the spline-approximation and finite elements method for an inhomogeneous unclosed cylinder with increasing or decreasing Young's module is presented.

Keywords: stress-strain state, three-dimensional theory of elasticity, hollow cylinder, finite length, spline-collocation, finite element method.

Введение.

Исследование механического поведения тел, изготовленных из материалов с плавно изменяющимися характеристиками (функционально-градиентных материалов), представляет интерес для исследователей, о чем свидетельствуют многочисленные публикации, например [2 – 4, 14 – 16].

В данной статье рассмотрено неосесимметричное напряженно-деформированное состояние (НДС) цилиндрических оболочек с изменяющимся вдоль радиуса модулем упругости, используя метод сплайн-коллокации и метод конечных элементов.

Осесимметричные задачи для неоднородных цилиндров рассмотрены в [6, 8] для неоднородного полого шара – в [7]. Некоторые исследования замкнутых цилиндров в трехмерной постановке проведены в [9, 13]; при этом для разделения переменных по окружной координате использованы ряды Фурье, а для сведения полученных двумерных задач к одномерным использованы сплайны. Полученная при этом одномерная задача решена методом дискретной ортогонализации. В [10, 11] для сведения двумерных задач к одномерным используются дискретные ряды Фурье.

Поскольку для незамкнутого цилиндра такие подходы реализовать невозможно, здесь для сведения задачи к одномерной вдоль радиальной координаты использованы двумерные сплайны, как это было сделано в [5] для задачи Ламе в декартовых координатах. Для решения поставленной задачи методом конечных элементов выбраны восьмиузловые и двадцатиузловые элементы в форме параллелепипедов [1].

1. Основные соотношения.

Рассмотрим полый ортотропный цилиндр с внутренним радиусом $R-H,$ внешним радиусом $R+H$ (R – радиус срединной поверхности , $2H$ – толщина цилиндра) и длиной L в цилиндрической системе координат $r, \theta, z.$ Исследуем неосесимметричные цилиндры; в этом случае можно полагать, что $0 \le \theta \le \theta_e.$ НДС такого цилиндра описывают [8]: соотношения Коши –

$$e_r=\frac{\partial u_r}{\partial r};\quad e_\theta=\frac{1}{r}\left(u_r+\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right);\quad e_z=\frac{\partial u_z}{\partial z};$$

$$2e_{rz}=\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r};\quad 2e_{r\theta}=\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-u_\theta\right);\quad 2e_{\theta z}=\frac{\partial u_\theta}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta}; \tag{1}$$

закон Гука –

$$\sigma_r=c_{11}e_r+c_{12}e_\theta+c_{13}e_z;\quad \sigma_\theta=c_{12}e_r+c_{22}e_\theta+c_{23}e_z;$$

$$\sigma_z=c_{13}e_r+c_{23}e_\theta+c_{33}e_z;\quad \sigma_{r\theta}=2c_{44}e_{rz};\quad \sigma_{rz}=2c_{55}e_{rz};\quad \sigma_{\theta z}=2c_{66}e_{rz}, \tag{2}$$

где элементы матрицы жесткости $c_{ij}=c_{ij}(r)$ – непрерывные и дифференцируемые функции координаты r;

уравнения равновесия –

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta}+\sigma_r-\sigma_\theta\right)+\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z}=0;\quad \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+2\sigma_{r\theta}\right)+\frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial z}=0;$$

$$\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial\theta}+2\sigma_{rz}\right)+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=0, \tag{3}$$

где u_r, u_θ, u_z – проекции вектора перемещения точек цилиндра в направлениях r, θ и z; e_r, e_θ, e_z – относительные линейные деформации в направлении координатных линий; $e_{r\theta}$, e_{rz}, $e_{\theta z}$ – деформации сдвига; $\sigma_r,\sigma_\theta,\sigma_z$ – нормальные напряжения; $\sigma_{r\theta}$, σ_{rz}, $\sigma_{\theta z}$ – касательные напряжения.

В случае изотропного тела элементы матрицы жесткости c_{ij} принимают вид

$$c_{11}=c_{22}=c_{33}=\lambda+2\mu;\quad c_{12}=c_{13}=c_{23}=\lambda;\quad c_{44}=\mu;\quad c_{55}=\mu;\quad c_{66}=\mu\,, \tag{4}$$

где $\mu=E/(2(1+\nu))$, $\lambda=(2\mu\nu)/(1-2\nu)$, а ν и E – коэффициент Пуассона и модуль Юнга.

Граничные условия на внутренней $(r=R-H)$ и внешней $(r=R+H)$ поверхностях цилиндра

$$\sigma_r\big|_{r=R-H}=q_1;\quad \sigma_r\big|_{r=R+H}=q_2;\quad \sigma_{rz}\big|_{r=R\pm H}=0;\quad \sigma_{\theta z}\big|_{r=R\pm H}=0. \tag{5}$$

В этом случае потенциальную энергию деформации цилиндра, ограниченного плоскостями $\theta=0$ и $\theta=\theta_e$ можно записать так:

$$\Pi=\int_0^L\int_0^{\theta_e}\int_{R-H}^{R+H}\left\{\frac{1}{2}\left(\sigma_r e_r+\sigma_z e_z+\sigma_\theta e_\theta\right)+\sigma_{r\theta}e_{rz}+\sigma_{rz}e_{rz}+\sigma_{\theta z}e_{\theta z}\right\}r\,dz\,d\theta\,dr+$$
$$+(R-H)\int_0^L\int_0^{\theta_e}q_1u_r dz\,d\theta-(R+H)\int_0^L\int_0^{\theta_e}q_2u_r dz\,d\theta. \tag{6}$$

Если на торцах цилиндра при $z=0$ и $z=L$ или на границе $\theta=\text{const}$ цилиндр жестко закреплен, то

$$u_r=0;\quad u_\theta=0;\quad u_z=0. \tag{7}$$

Условия симметрии для контура $\theta=\text{const}.$:

$$\frac{\partial u_r}{\partial\theta}=0;\quad u_\theta=0;\quad \frac{\partial u_z}{\partial\theta}=0. \tag{8}$$

Для $z=\text{const}$ имеем

$$\frac{\partial u_r}{\partial z}=0;\quad \frac{\partial u_\theta}{\partial z}=0;\quad u_z=0. \tag{9}$$

2. Методы решения.

2.1. Метод сплайн-коллокации. Используя (1) – (3), получены разрешающие уравнения в перемещениях в таком виде:

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} = a_{11}u_r + a_{12}\frac{\partial^2 u_r}{\partial\theta^2} + a_{13}\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + a_{14}\frac{\partial u_r}{\partial r} + a_{15}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + a_{16}\frac{\partial u_\theta}{\partial r\partial\theta} + a_{17}\frac{\partial u_z}{\partial z} + a_{18}\frac{\partial^2 u_z}{\partial r\partial z};$$

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} = a_{21}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} + a_{22}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\partial\theta} + a_{23}u_\theta + a_{24}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial\theta^2} + a_{25}\frac{\partial u_\theta}{\partial z^2} + a_{26}\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + a_{27}\frac{\partial^2 u_z}{\partial\theta\partial z}; \qquad (10)$$

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} = a_{31}\frac{\partial u_r}{\partial z} + a_{32}\frac{\partial^2 u_r}{\partial z\partial r} + a_{33}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial\theta\partial z} + a_{34}\frac{\partial^2 u_z}{\partial\theta^2} + a_{35}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + a_{36}\frac{\partial u_z}{\partial r},$$

где коэффициенты $a_{kl} = a_{kl}(r)$ определяются согласно формул:

$$a_{11} = \frac{c_{22} - c'_{12}r}{c_{11}r^2}; \quad a_{12} = \frac{c_{44}}{c_{11}r^2}; \quad a_{13} = -\frac{c_{55}}{c_{11}}; \quad a_{14} = -\frac{c'_{11}r + c_{11}}{c_{11}r}; \quad a_{15} = \frac{c_{44} + c_{22} - c'_{12}r}{c_{11}r^2};$$

$$a_{16} = -\frac{c_{12} + c_{44}}{c_{11}r}; \quad a_{17} = \frac{c_{23} - c_{12} - c'_{13}r}{c_{11}r}; \quad a_{18} = -\frac{c_{13} + c_{55}}{c_{11}};$$

$$a_{21} = -\frac{c'_{44}r + c_{44} + c_{22}}{c_{44}r^2}; \quad a_{22} = -\frac{c_{44} + c_{12}}{c_{44}r}; \quad a_{23} = -\frac{c'_{44}r + c_{44}}{c_{44}r^2}; \qquad (11)$$

$$a_{24} = -\frac{c_{22}}{c_{44}r^2}; \quad a_{25} = -\frac{c_{66}}{c_{44}}; \quad a_{26} = -\frac{c'_{44}r + c_{44}}{c_{44}r}; \quad a_{27} = -\frac{c_{23} + c_{66}}{c_{44}r};$$

$$a_{31} = -\frac{c'_{55}r + c_{55} + c_{23}}{c_{55}r}; \quad a_{32} = -\frac{c_{55} + c_{13}}{c_{55}}; \quad a_{33} = -\frac{c_{66} + c_{23}}{c_{55}r};$$

$$a_{34} = -\frac{c_{66}}{c_{55}r^2}; \quad a_{35} = -\frac{c_{33}}{c_{55}}; \quad a_{36} = -\frac{c'_{55}r + c_{55}}{c_{55}r}.$$

Граничные условия на внутренней поверхности цилиндра имеют вид:

$$c_{11}\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{c_{12}}{r}\left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right) + c_{13}\frac{\partial u_z}{\partial z} = q_1; \quad \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial\theta} - u_\theta\right) + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} = 0; \quad \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0. \qquad (12)$$

Трехмерную краевую задачу (10) при соответствующих граничных условиях можно привести к одномерной с помощью метода сплайн-коллокации. Для этого разрешающие функции $u_r(r,\theta,z), u_\theta(r,\theta,z), u_z(r,\theta,z)$ представим в таком виде:

$$u_r = \sum_{i=0}^{M}\sum_{j=0}^{N} u_{rij}(r)\varphi_i^{(r)}(\theta)\psi_j^{(r)}(z), \quad u_\theta = \sum_{i=0}^{M}\sum_{j=0}^{N} u_{\theta ij}(r)\varphi_i^{(\theta)}(\theta)\psi_j^{(\theta)}(z),$$

$$u_z = \sum_{i=0}^{M}\sum_{j=0}^{N} u_{zij}(r)\varphi_i^{(z)}(\theta)\psi_j^{(z)}(z), \qquad (13)$$

где $u_{rij}(r),\ u_{\theta ij}(r),\ u_{zij}(r)$ – искомые функции переменной r, $\varphi_j^{(\alpha)}(\theta)$ ($i = 0,1,\ldots,M$; $\alpha = r,\theta,z$) и $\psi_j^{(\alpha)}(\theta)$ ($j = 0,1,\ldots,N$) – линейные комбинации нормализованных B-сплайнов на равномерных сетках $\theta_{-3} < \theta_{-2} < \theta_{-1} < 0 = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_M = \theta_e < \theta_{M+1} < \theta_{M+2} < < \theta_{M+3}$ и $z_{-3} < z_{-2} < z_{-1} < 0 = z_0 < z_1 < \ldots < z_N = L < z_{N+1} < z_{N+2} < z_{N+3}$, соответственно, учитывающие граничные условия при $\theta = 0$ и $\theta = \theta_e$, $z = 0$ и $z = L$. В систему (10) входят производные по координатах θ и z не выше второго порядка и можно ограничиться аппроксимацией сплайн-функциями третьей степени.

Подставляя уравнения (13) в (10), требуем их удовлетворения в заданных точках коллокации $(\xi,\zeta)\in[0,\theta]\times[0,L]$. Примем, что M и N – нечетные, т.е. $M=2m+1$, $N=2n+1$. Выбираем точки коллокации так, что $\{\xi_{2i},\xi_{2i+1}\}\in[\theta_{2i},\theta_{2i+1}]$, $\{\zeta_{2i},\zeta_{2i+1}\}\in$ $\in[z_{2j},z_{2j+1}]$, $(i=0,1,\dots,m)$, $(j=0,1,\dots,n)$; при этом $\xi_{2i}=\theta_{2i}+s_1h_\theta$, $\xi_{2i+1}=\theta_{2i}+s_2h_\theta$, $\zeta_{2j}=z_{2j}+s_1h_z$, $\zeta_{2j+1}=z_{2j}+s_2h_z$, где $s_1=1/2-\sqrt{3}/6$, $s_2=1/2+\sqrt{3}/6$, $h_\theta=\theta_i-\theta_{i-1}$, $h_z=z_i-z_{i-1}$. В этом случае количество точек аппроксимации $-(M+1)(N+1)$. В результате получим систему $6(M+1)(N+1)$ линейных дифференциальных уравнений относительно функций $u_{rij},u'_{rij},u_{\theta ij},u'_{\theta ij},u_{zij},u'_{zij}$ $(i=0,\dots,M;\ j=0,\dots,N)$.

Пусть $u_{rk}=u_{rij},u_{\theta k}=u_{\theta ij},u_{zk}=u_{rij}$, где $k=i(N+1)+j(i=0,\dots,M;\,j=0,\dots,N;\,k=$ $=0,\dots,M(N+1)+N)$. Введем квадратные матрицы $\Phi^{(\alpha)},\Phi^{(\alpha)}_\theta,\Phi^{(\alpha)}_z,\Phi^{(\alpha)}_{\theta\theta},\Phi^{(\alpha)}_{zz},\Phi^{(\alpha)}_{\theta z}$ $(\alpha=r,\theta,z)$ размерности $(M+1)(N+1)$, компоненты которых вычисляются по формулам:

$$\Phi^{(\alpha)}:\ \phi^{(\alpha)}_{i(N+1)+j,m(N+1)+n}=\varphi^{(\alpha)}_m(\xi_i)\psi^{(\alpha)}_n(\zeta_j);\quad \Phi^{(\alpha)}_\theta:\ \phi^{(\alpha)\theta}_{i(N+1)+j,m(N+1)+n}=\left(\varphi^{(\alpha)}_m\right)'(\xi_i)\psi^{(\alpha)}_j(\zeta_j);$$

$$\Phi^{(\alpha)}_z:\ \phi^{(\alpha)z}_{i(N+1)+j,m(N+1)+n}=\varphi^{(\alpha)}_m(\xi_i)\left(\psi^{(\alpha)}_n\right)'(\zeta_j);\quad \Phi^{(\alpha)}_{\theta\theta}:\ \phi^{(\alpha)\theta\theta}_{i(N+1)+j,m(N+1)+n}=\left(\varphi^{(\alpha)}_m\right)''(\xi_i)\psi_n(\zeta_j)$$

и т. д. $(i,m=0,\dots,M;\ \ j,n=0,\dots,N)$.

Пусть $\overline{u}_r=\{u_{r0},u_{r1},\dots,u_{r,M(N+1)+N}\}^T$; $\overline{u}_\theta=\{u_{\theta 0},u_{\theta 1},\dots,u_{\theta,M(N+1)+N}\}^T$,

$\overline{u}_z=\{u_{z0},u_{z1},\dots,u_{z,M(N+1)+N}\}^T$; тогда разрешающую систему обыкновенных дифференциальных уравнений можно записать так:

$$\frac{d\,\overline{u}_r}{dr}=\overline{u}'_r;\quad \frac{d\,\overline{u}_\theta}{dr}=\overline{u}'_\theta;\quad \frac{d\,\overline{u}_z}{dr}=\overline{u}'_z;$$

$$\frac{d\,\overline{u}'_r}{dr}=\left(\Phi^{(r)}\right)^{-1}(a_{11}\Phi^{(r)}+a_{12}\Phi^{(r)}_{\theta\theta}+a_{13}\Phi^{(r)}_{zz})\overline{u}_r+a_{14}\overline{u}'_r+$$

$$+a_{15}\left(\Phi^{(r)}\right)^{-1}\Phi_\theta\overline{u}_\theta+a_{16}\left(\Phi^{(r)}\right)^{-1}\Phi_\theta\overline{u}'_\theta+a_{17}\left(\Phi^{(r)}\right)^{-1}\Phi_z\overline{u}_z+a_{18}\left(\Phi^{(r)}\right)^{-1}\Phi_z\overline{u}'_z;$$

$$\frac{d\,\overline{u}'_\theta}{dr}=a_{21}\left(\Phi^{(\theta)}\right)^{-1}\Phi^{(r)}_\theta\overline{u}_r+a_{22}\left(\Phi^{(\theta)}\right)^{-1}\Phi^{(r)}_\theta\overline{u}'_r+\left(\Phi^{(\theta)}\right)^{-1}(a_{23}\Phi^{(\theta)}+ \tag{14}$$

$$+a_{24}\Phi^{(\theta)}_{\theta\theta}+a_{25}\Phi^{(\theta)}_{zz})\overline{u}_\theta+a_{26}\overline{u}'_\theta+\overline{a}_{27}\left(\Phi^{(\theta)}\right)^{-1}\Phi^{(z)}_{\theta z}\overline{u}_z;$$

$$\frac{d\,\overline{u}'_z}{dr}=a_{31}\left(\Phi^{(z)}\right)^{-1}\Phi^{(r)}_z\overline{u}_r+a_{32}\left(\Phi^{(z)}\right)^{-1}\Phi^{(r)}_z\overline{u}'_r+a_{33}\left(\Phi^{(z)}\right)^{-1}\Phi^{(\theta)}_{\theta z}\overline{u}_\theta+$$

$$+\left(\Phi^{(z)}\right)^{-1}(a_{24}\Phi^{(z)}_{\theta\theta}+a_{25}\Phi^{(z)}_{zz})\overline{u}_z+a_{26}\overline{u}'_z.$$

Подставив (13) в (12) и удовлетворив уравнения в точках коллокации, получим граничные условия для (14):

$$c_{11}\Phi^{(r)}\overline{u}'_r + \frac{c_{12}}{r}\left(\Phi^{(r)}\overline{u}_r + \Phi^{(\theta)}_\theta \overline{u}_\theta\right) + c_{13}\Phi^{(z)}_z u_z = \overline{q}_1;$$

$$\frac{1}{r}\left(\Phi^{(r)}_\theta \overline{u}_r - \Phi^{(\theta)}\overline{u}_\theta\right) + \Phi^{(\theta)}\overline{u}'_\theta = 0;\quad \Phi^{(r)}_z \overline{u}_r + \Phi^{(z)}\overline{u}'_z = 0, \tag{15}$$

где $\overline{q}_1$ – вектор нагрузки размерности $(M+1)(N+1)$, вычисленный в точках коллокации.

Краевую задачу (14), (15) можно решить с помощью устойчивого численного метода дискретной ортогонализации.

2.2. Метод конечных элементов.

Из (1) – (3) и (6) можно получить выражение потенциальной энергии через перемещения:

$$\Pi = \int_0^L \int_0^{\theta_e} \int_{R-H}^{R+H} \left\{ \frac{c_{11}r}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{c_{22}}{2r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{c_{33}r}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2 + \frac{c_{44}}{2r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{c_{44}r}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)^2 + \frac{c_{55}r}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)^2 + \right.$$

$$+ \frac{c_{55}r}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)^2 + \frac{c_{66}r}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)^2 + \frac{c_{66}}{2r}\left(\frac{\partial u_z}{\partial \theta}\right)^2 + c_{12}\frac{\partial u_r}{\partial r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + c_{12}u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{c_{22}u_r}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \tag{16}$$

$$+ c_{23}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\frac{\partial u_z}{\partial z} + c_{23}u_r\frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{c_{44}u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + c_{44}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - c_{44}u_\theta\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + c_{13}r\frac{\partial u_r}{\partial r}\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{c_{22}u_r^2}{2r} + \frac{c_{44}u_\theta^2}{2r} +$$

$$\left. + c_{55}r\frac{\partial u_r}{\partial z}\frac{\partial u_z}{\partial r} + c_{66}\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}\right\} dz\,d\theta\,dr + (R-H)\int_0^L\int_0^{\theta_e} q_1 u_r dz\,d\theta - (R+H)\int_0^L\int_0^{\theta_e} q_2 u_r dz\,d\theta.$$

Тогда система уравнений для определения узловых перемещений u_{ri}, $u_{\theta i}$, u_{zi} в элементе, занимающем объем V и с площадью S грани, на которую действует нагрузка q_1, будет иметь вид:

$$\iiint_V [c_{11}r(u_{ri}N_{ri})N_{rj} + \frac{c_{44}}{r}(u_{ri}N_{\theta i})N_{\theta j} + c_{55}r(u_{ri}N_{zi})N_{zj} + c_{12}(u_{\theta i}N_{\theta i})N_{rj} + c_{12}((u_{ri}N_{ri})N_j +$$

$$+ (u_{ri}N_i)N_{rj}) + \frac{c_{22}}{r}(u_{\theta i}N_{\theta i})N_j + c_{23}r(u_{zi}N_{zi})N_j - \frac{c_{44}}{r}(u_{\theta i}N_i)N_{\theta j} + c_{44}((u_{\theta i}N_{ri})N_{\theta j} +$$

$$+ c_{13}r(u_{zi}N_{zi})N_{rj}\Big) + \frac{c_{22}}{r}(u_{ri}N_i)N_j + c_{55}r(u_{zi}N_{ri})N_{zj}\Big]dzd\theta dr = -(R-H)\iint_S q_1 N_j dz\,d\theta;$$

$$\iiint_V \left[\frac{c_{22}}{r}(u_{\theta i}N_{\theta i})N_{\theta j} + c_{44}r(u_{\theta i}N_{ri})N_{rj} + c_{66}r(u_{\theta i}N_{zi})N_{zj} + c_{12}(u_{ri}N_{ri})N_{\theta j} + \right.$$

$$+ \frac{c_{22}}{r}(u_{ri}N_i)N_{\theta j} + c_{23}r(u_{zi}N_{zi})N_{\theta j} - \frac{c_{44}}{r}(u_{ri}N_{\theta i})N_j + c_{44}(u_{ri}N_{\theta i})N_{rj} - \tag{17}$$

$$\left. - c_{44}((u_{\theta i}N_{ri})N_j + (u_{\theta i}N_i)N_{rj}) + \frac{c_{44}}{r}(u_{\theta i}N_i)N_j + c_{66}(u_{zi}N_{\theta i})N_{zj}\right]dz\,d\theta\,dr = 0;$$

$$\iiint_V [c_{33}r(u_{zi}N_{zi})N_{zj} + c_{55}r(u_{zi}N_{ri})N_{rj} + \frac{c_{66}}{r}(u_{zi}N_{\theta i})N_{\theta j} + c_{23}(u_{\theta i}N_{\theta i})N_{zj} +$$

$$+ c_{23}(u_{ri}N_i)N_{zj} + c_{13}r(u_{ri}N_{ri})N_{zj} + c_{55}r(u_{ri}N_{zi})N_{rj} + c_{66}(u_{\theta i}N_{zi})N_{\theta j}\Big]dz\,d\theta\,dr = 0.$$

В (17) предполагается суммирование по парным индексам; N_i, N_{ri}, $N_{\theta i}$, N_{zi} – функции формы и их частные производные по $r, \theta, z.$ Далее при расчетах использованы восьмиузловые и двадцатиузловые элементы в виде параллелепипедов [1]. Интегралы в (17) вычисляются методом Гаусса (трехмерные – в 27 точках, двумерные – в 9). Полученная после ансамблирования система для совокупности всех элементов была решена методом Гаусса.

3. Анализ числовых результатов.

Сначала проведем сравнение полученных результатов с данными, представленными в статье [9] для замкнутого изотропного цилиндра с размерами $L = 20$, $R = 10$, $H = 2{,}5$ и коэффициентом Пуассона $\nu = 0{,}3$. Торцы $z = 0$ и $z = L$ закреплены жестко; на внутреннюю поверхность цилиндра действует давление $q_1 = -q_0 \cos(k\theta)$. Поскольку задача симметрична, она была решена на отрезках $0 \le z \le L/2$, $0 \le \theta \le \pi$ (при $k = 0{,}1$), $0 \le \theta \le \pi/2$ (при $k = 2$). В таблице приведены значения перемещения $u_r E / q_0$ при $z = L/2$, $r = 7{,}5$, $\theta = 0$, полученные методами сплайн-коллокации при различном количестве точек коллокации (отрезок интегрирования при этом был разбит на 100 частей) и методом конечных элементов (8 узлов) при различном количестве элементов (элементы получены делением отрезков по r, θ, z на одно и то же число; следовательно количество элементов K_e было равно 10^3, 15^3, 20^3). Как видно из таблицы различие результатов, полученных различными методами, составляет не более 2%.

k	$u_r E / q_0$							
	Метод сплайн-коллокации				МКЭ			[9]
	$M = N = 9$	$M = 11$, $N = 9$	$M = N = 11$	$M = 11$, $N = 13$	$K_e = 10^3$	$K_e = 15^3$	$K_e = 20^3$	
0	16,244	16,244	16,199	16,172	16,014	16,050	16,065	16,2
1	23,708	23,716	23,617	23,557	23,174	23,267	23,305	23,9
2	23,178	23,199	23,106	23,050	22,255	22,579	22,700	23,1

С помощью изложенных подходов определим напряженно-деформированное состояние незамкнутых цилиндров с теми же линейными размерами с жестко закрепленными торцами и краями $\theta = 0$, $\theta = \pi$ при равномерно распределенном давлении $q_1 = -q_0$. В этом случае коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}4$, а модуль упругости изменяется по закону $E(r) = ar^2 + br + c$. Рассматривали такие случаи:

1) убывающий модуль Юнга ($E(R-H) = 2E_0$, $E(R) = E_0$, $E(R+H) = 0{,}5E_0$, $a = 0{,}04$, $b = -1{,}1$, $c = 8$);

2) возрастающий модуль Юнга ($E(R-H) = 0{,}5E_0$, $E(R) = E_0$, $E(R+H) = 2E_0$, $a = 0{,}04$, $b = -0{,}5$, $c = 2$).

Из соображений симметрии задача решена на области $0 \le \theta \le \pi/2$, $0 \le z \le L/2$.

На рис. 1 – 3 показаны распределения перемещений u_r при $\theta = \pi/2$, $z = L/2$, u_θ при $r = R - H$, $z = L/2$ $\left(\tilde{r} = \dfrac{r - R + H}{2H}\right)$, u_z при $r = R - H$, $\theta = \pi/2$, линии без маркеров – результаты, полученные методом сплайн-колокации (сплошная – спадающий модуль упругости, пунктирная – возрастающий), линии с маркерами – результаты полученные МКЭ (8 узлов) (круги – спадающий модуль упругости, треугольники – возрастающий). При расчетах методом сплайн-колокации $M = N = 11$ и 100 точек интегрирования, при расчетах МКЭ использовано 15^3 элементов. Как видно из графиков, характер распределения перемещений совпадает для результатов, полученных разными методами, однако различия между ними все же существенны, особенно это

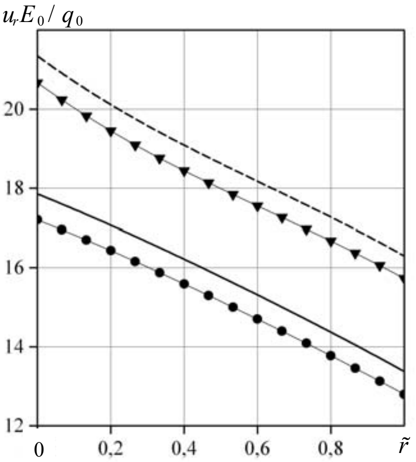

Рис. 1

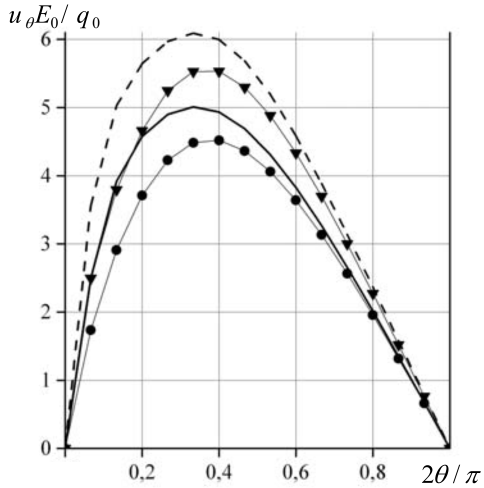

Рис. 2

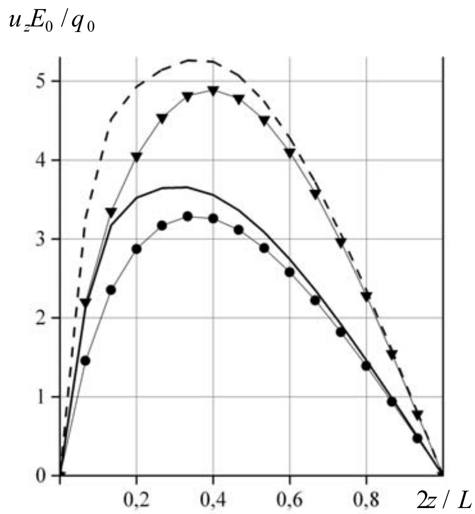

Рис. 3

относится к перемещениям u_θ и u_z. Отметим, что эта задача была решена с использованием 20-ти узловых конечных элементов, при сопоставимом с первым случаем количестве узлов. Однако результаты, полученные этим способом, практически совпадают с результатами для 8-ми узловых элементов (на графиках линии почти неотличимы и для второго случая не приведены). Интересно также было бы получить результаты с использованием элементов более высоких порядков, а также элементов, предложенных в [12]. Возможно, сгущением сеток конечных элементов и сплайнов можно получить более точное совпадение, но следует учитывать, что при этом возрастают требования к вычислительным мощностям и, очевидно, увеличивается время на решение задач.

Выводы.

Для исследования напряженно-деформированного состояния в неоднородном полом цилиндре с жестко закрепленными краями применены уравнения трехмерной теории упругости. Соответствующая задача решена методами сплайн-аппроксимации и конечных элементов. Для сведения системы дифференциальных уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений высшего порядка для радиальной координаты использованы двумерные сплайны, одномерная задача решена с помощью метода дискретной ортогонализации. Приведено сравнение результатов, полученных методом сплайн-аппроксимации и методом конечных элементов для незамкнутого неоднородного цилиндра с возрастающим и убывающим вдоль радиальной координаты модулем упругости.

Р Е З Ю М Е . Для дослідження напружено-деформованого стану в неоднорідному порожнистому циліндрі з жорстко затиснутими краями застосовано рівняння тривимірної теорії пружності. Відповідну задачу розв'язано методами сплайн-апроксимації та скінченних елементів. Для зведення системи диференціальних рівнянь в частинних похідних до системи звичайних диференціальних рівнянь вищого порядку для радіальної координати використано двовимірні сплайни. Одновимірну задачу розв’язано за допомогою методу дискретної ортогоналізації. Наведено порівняння результатів, отриманих методом сплайн-апроксимації та методом скінченних елементів для незамкнутого неоднорідного циліндра з модулем пружності, що зростає або спадає уздовж радіальної координати.

1. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 544 с.
2. *Bahri A., Salehi M., Akhlaghi M.* Three dimensional static and dynamic analyses of the functionally graded cylinder bonded to the laminated plate under general loading // Mech. of Adv. Materials and Struct. – 2016. – **23**, N 12. – P. 1437 – 1453.
3. *Birman V., Byrd L.W.* Modeling and analysis functionally graded materials and structures // Appl. Mech. Reviews. – 2009. – **60** – P. 195 – 215.
4. *Ghafoori E., Asghari M.* Three-dimensional elasticity analysis of functionally graded rotating cylinders with variable thickness profile // Proc. of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: J. of Mech. Engng. Sci. – 2012 – **226**, N 3 – P. 585 – 594.
5. *Grigorenko A.Ya., Bergulev A.S., Yaremchenko S.N.* Numerical Solution of Bending Problems for Rectangular Plates // Int. Appl. Mech. – 2013 – **49**, N 1 – P. 81 – 94.
6. *Grigorenko A.Ya., Müller W.H., Wille R., Yaremchenko S.N.* Numerical solution of the problem of the stress-strain state in hollow cylinders using spline approximations // J. of Math. Sci. – 2012. – **180**, N 2. – P. 135 – 145.
7. *Grigorenko A.Ya., Yaremchenko N.P., Yaremchenko S.N.* Analysis of the Axisymmetric Stress-Strain State of a Continuously Inhomogeneous Hollow Sphere // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 5. – P. 577 – 583.
8. *Grigorenko A.Ya., Yaremchenko S.N.* Analysis of the Stress-Strain State of Inhomogeneous Hollow Cylinders // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 4. – P. 958 – 965.
9. *Grigorenko Ya.M., Kryukov N.N.* Use of Spline Approximation to Study Displacement and Stress Fields in Cylinders with Different Boundary Conditions on the Ends // Int. Appl. Mech. – 1997. –**33**, N 12. – P. 958 – 965.
10. *Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S.* Effect of Change in the Curvature Parametares on the Stress State of Concave Corrugated Hollow Cylinders // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 3. – P. 266 – 273.
11. *Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S.* Layered Inhomogeneous Hollow Cylinders with Concave Corrugations Under Internal Pressure // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 5. – P. 531 – 538.
12. *Karnaukhov V.G., Kozlov V.I., Zavgorodnii A.V., Umrykhin I.N.* Forced Resonant Vibrations and Self-Heating of Solids of Revolution Made of Viscoelastic Piezoelectric Material // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 6. – P. 614 – 622.
13. *Kryukov N.N.* Solution of problems of the stressed state of thick-walled orthotropic cylindrical shells with the aid of spline functions // Int. Appl. Mech. – 1993. – **29**, N 7. – P. 541 – 547.
14. *Miyamoto Y., Kaysser W.A., Rabin B.H., Kawasaki A., Ford R.G.* Functionally Graded Materials, Design, Processing and Applications. – Boston: Kluwer Academic Publishers, 1999.
15. *Suresh S., Mortensen A.* Fundamentals of Functionally Graded Materials. – London: Maney, 1998. – 165 p.
16. *Woodward B., Kashtalyan M.* Three-dimensional elasticity solution for bending of transversely isotropic functionally graded plates // European J. of Mechanics A/Solids. – 2011. – **30**, N 5. – P. 705 – 718.

Поступила 06.06.2018 Утверждена в печать 04.06.2019