

Е. Я. Антонюк, А. Т. Забуга

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УСТРОЙСТВА ИЗМЕНЕНИЯ СКОРОСТЕЙ НА ОСНОВЕ ПЕРЕКЛЮЧАЕМЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МЕХАНИЗМОВ

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: atzabuga@gmail.com*

**Abstract.** The geometry and kinematics of dynamical system with several degrees of freedom containing driving frictionals is considered. The inclusion of frictional attains a necessary kinematical transmittable relation between the input and output links. In this model, a smooth approximation of the discontinuous function of the frictional forces moment is used. This allows to carry out a continuous numerical integration of motion equations without changing their structure (that is, preserving their number). The operation of switching from one rotational speed of the outputted link to other one is carried out by fixing the functions of time which are controlled by pressure on frictional disks. A numerical example of the mechanism consisting of three differentials and four frictionals is considered. An analysis of dynamical processes in this system is given.

**Key words:** mathematic model, degree of freedom, variable structure, approximation, dynamic process.

### Введение.

Одна из важных задач исследования многих машин – является определение нагруженности и кинематических характеристик (скоростей, ускорений) звеньев движущейся системы при переключении коробки передач. В связи с этим имеет существенное значение знание динамических процессов, возбуждаемых в системе. При такой перестройке скачкообразно изменяется структура, и, соответственно, некоторые коэффициенты дифференциальных уравнений движения, определяемые массами, моментами инерции и частными передаточными отношениями. Значительный эффект в деле снижения интенсивности переходного процесса достигается использованием коробок передач, сформированных на основе  $k$  дифференциальных механизмов, определенным образом соединенных друг с другом и с корпусом машины. При этом между некоторыми звеньями смежных дифференциалов встраиваются фрикционные муфты (или тормозные устройства между звеном дифференциала и корпусом коробки передач), управляемые (т.е. включаемые и выключаемые) усилием нажатия дисков фрикционов, что легко осуществляется, например, гидравлическими устройствами. В результате по мере снижения скольжения во включенных фрикционных муфтах (тормозах) последовательно снижается количество степеней свободы, пока не достигнет заданного значения. Различными комбинациями включения фрикционов [6] осуществляется то или иное передаточное отношение между входным и выходным валами коробки передач. С большим успехом такие устройства применяются в транспортных, строительных, военно-гусеничных и других машинах [8, 10, 11]. При синтезе подобных систем должна быть обеспечена неповторяемость структурных связей кинематических контуров, чтобы исключить статическую неопределимость.

При аналитическом описании движения таких систем приходится иметь дело со скачкообразным изменением структуры дифференциальных уравнений движения [3, 4], что заставляет иметь несколько вариантов описания исследуемой динамической системы и условий перехода между ними. Динамическая система коробки передач такого типа образуется  $k$  зубчатыми дифференциалами, каждый из которых обладает двумя степенями свободы. Ввиду того, что некоторые из звеньев смежных дифференциалов в коробке передач определенным образом неподвижно соединяются друг с другом, в систему вносится  $S$  условий голономных связей. В результате подвижность  $W$  объединенной системы дифференциалов (без учета упругости звеньев и относительного проскальзывания дисков) будет равна  $W = 2k - S$ .

Для передачи движения от входного к выходному валу коробки передач в большинстве случаев необходимо, чтобы в наличии оставалась только одна степень свободы, т.е. было дополнительно наложено  $S_1$  условий связи, удовлетворяющих равенству  $S_1 = 2k - S - 1$ .

Связи  $S_1$  фрикционного типа реализуются посредством включения фрикционных элементов (муфт и тормозов) в количестве  $S_1$ . Каждая из комбинаций включаемых фрикционных элементов формирует конкретное кинематическое передаточное отношение коробки передач. Как было отмечено выше, при синтезе коробок передач должна быть обеспечена неповторяемость структурных связей, отмеченных участков кинематической цепи. Если это не будет выполнено, то часть подвижной механической цепи станет статически неопределимой (однократно, дважды и т.д.), а подвижность ее контуров увеличится на такое же количество единиц, т.е. будет функционально непригодной для поставленной цели.

### 1. Постановка задачи. Основные уравнения.

В качестве примера отмеченной коробки передач рассмотрим систему, изображенную на рис. 1 [2], с входным **1** и выходным **3** валами, а также управляемыми фрикционными муфтами  $A$ ,  $B$  и тормозами  $C$  и  $D$ .

Дифференциал  $I$  непосредственно соединен с  $II$  (их центральные колеса 2 и 2' внутреннего зацепления являются одним звеном), а  $II$  – дважды с дифференциалом  $III$  (объединены их поводки 5 и центральные колеса 4 и 4' внешнего и внутреннего зацеплений), т.е.  $S = 3$ , а число степеней свободы  $W = 2 \cdot 3 - 3 = 3$ . Поэтому для работы коробки передач по рис. 1 в стационарном режиме необходимо включение каких-либо двух из четырех ( $A, B, C, D$ ) фрикционных элементов.

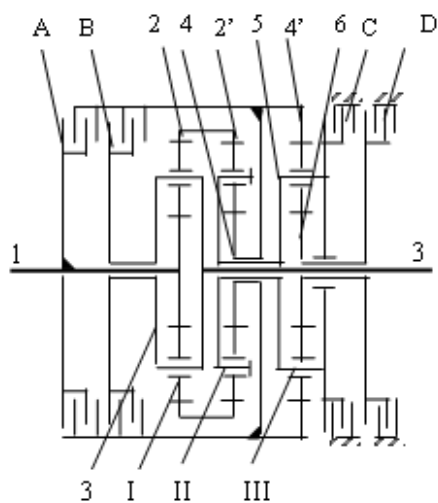


Рис. 1

Уравнения движения системы по рис. 1 с учетом проскальзывания во включенных фрикционах (т.е. с тремя степенями свободы), характеризуемых выбранными обобщенными координатами  $\varphi_1, \varphi_3, \varphi_5$  звеньев 1, 3 и 5, составим на основе уравнений Лагранжа второго рода [1]. В результате получим

$$A\ddot{\Phi} = Q; \quad \ddot{\Phi} = [\ddot{\varphi}_1 \quad \ddot{\varphi}_3 \quad \ddot{\varphi}_5]^T, \quad Q = [Q_1 \quad Q_3 \quad Q_5]^T, \quad (1)$$

где  $A$  квадратная матрица  $3 \times 3$ ,  $\ddot{\Phi}$  – матрица-столбец обобщенных ускорений,  $Q$  – матрица-столбец обобщенных сил, индекс «Т» означает операцию транспонирования.

Коэффициенты матрицы  $A$ :

$$\begin{aligned} A_{11} &= J_1 + \frac{J_2}{u_{12}^2} + \frac{J_4 u_{42'}^2}{u_{12}^2} + \frac{J_6 u_{42'}^2 u_{64'}^2}{u_{12}^2}; \\ A_{12} &= - \left( \frac{J_2 (1-u_{12})}{u_{12}^2} + \frac{J_4 u_{42'}^2 (1-u_{12})}{u_{12}^2} + \frac{J_6 u_{42'}^2 u_{64'}^2 (1-u_{12})}{u_{12}^2} \right); \\ A_{13} &= \frac{J_4 u_{42'} (1-u_{42'})}{u_{12}} + \frac{J_6 u_{42'} u_{64'} (1-u_{42'} u_{64'})}{u_{12}}; \quad A_{21} = A_{12}; \\ A_{22} &= \frac{J_2 (1-u_{12})^2}{u_{12}^2} + J_3 + \frac{J_4 (1-u_{12})^2 u_{42'}^2}{u_{12}^2} + \frac{J_6 (1-u_{12})^2 u_{42'}^2 u_{64'}^2}{u_{12}^2}; \\ A_{23} &= - \left( \frac{J_4 (1-u_{12}) (1-u_{42'}) u_{42'}}{u_{12}} + \frac{J_6 (1-u_{12}) (1-u_{42'} u_{64'}) u_{42'} u_{64'}}{u_{12}} \right); \\ A_{31} &= A_{13}; \quad A_{32} = A_{23}; \quad A_{33} = J_4 (1-u_{42'})^2 + J_5 + J_6 (1-u_{42'} u_{64'})^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Обобщенные силы:

$$\begin{aligned} Q_1 &= M_1 - M_{14}^A \left( 1 - \frac{u_{42'}}{u_{12}} \right) + M_{34}^B \frac{u_{42'}}{u_{12}} - M_{60}^D \frac{u_{64'} u_{42'}}{u_{12}}; \\ Q_3 &= -M_{14}^A \frac{(1-u_{12}) u_{42'}}{u_{12}} - M_{34}^B \left( 1 + \frac{(1-u_{12}) u_{42'}}{u_{12}} \right) - M_3 + M_{60}^D \left( \frac{(1-u_{12}) u_{64'} u_{42'}}{u_{12}} \right); \end{aligned} \quad (3)$$

$$Q_5 = M_{14}^A (1-u_{42'}) + M_{34}^B (1-u_{42'}) - M_{50}^C - M_{60}^D (1-u_{42'} u_{64'}).$$

Момент  $M_{i,k}^j, j = A, B, C, D, i = 1, 3, 5, 6; k = 4$  и  $0$  сил трения в (3), передаваемый фрикционной муфтой  $j$  со звена  $i$  на звено  $k$ , определяется двумя фазами кинематического состояния: 1-я, когда проскальзывание дисков отсутствует ( $(\dot{\varphi}_i - \dot{\varphi}_k) = 0$ ) и 2-я фаза, когда вследствие наличия проскальзывания  $(\dot{\varphi}_i - \dot{\varphi}_k) \neq 0$ , между полумуфтами действует момент сил трения

$$M_{i,k}^j = M_{i,k}^0 \text{sign}(\dot{\varphi}_i - \dot{\varphi}_k). \quad (4)$$

Разрывные функции в (4) обуславливают необходимость использовать различные системы уравнений движения для значений  $\dot{\varphi}_i - \dot{\varphi}_k$  больше нуля, равных нулю и меньше нуля.

Чтобы исключить необходимость в различных системах дифференциальных уравнений и избежать формирования условий перехода между ними, удобно воспользоваться операцией сглаживания [8], представив

$$\text{sign}(\dot{\phi}_i - \dot{\phi}_k) \approx \frac{2}{\pi} \arctg\left(\frac{\dot{\phi}_i - \dot{\phi}_k}{\varepsilon}\right), \quad (5)$$

т.е. гладкой функцией, к тому же имеющей неограниченное количество производных;  $\varepsilon$  – малая величина порядка  $10^{-2}, 10^{-3}$ .

Принимая во внимание операцию сглаживания в (5), моменты сил взаимодействия в фрикционах, входящие в (3), будут представлены зависимостями

$$\begin{aligned} M_{14}^A &= M_0^A \frac{2}{\pi} \arctg\left(\frac{\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_4}{\varepsilon_A}\right) + M_{14}^P \left[1 - \frac{2}{\pi} \arctg\left|\frac{\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_4}{\varepsilon_A}\right|\right]; \\ M_{34}^B &= M_0^B \frac{2}{\pi} \arctg\left(\frac{\dot{\phi}_3 - \dot{\phi}_4}{\varepsilon_B}\right) + M_{34}^P \left[1 - \frac{2}{\pi} \arctg\left|\frac{\dot{\phi}_3 - \dot{\phi}_4}{\varepsilon_B}\right|\right]; \\ M_{50}^C &= M_0^C \frac{2}{\pi} \arctg\frac{\dot{\phi}_5}{\varepsilon_C}; \quad M_{60}^D = M_0^D \frac{2}{\pi} \arctg\frac{\dot{\phi}_6}{\varepsilon_D}. \end{aligned} \quad (6)$$

Расчетные моменты сил  $M_{14}^P$  и  $M_{34}^P$  в сечениях 1, 4 и 3, 4 полумуфт  $A$  и  $B$  при отсутствии проскальзывания дисков определяются зависимостями [3]

$$M_{14}^P = \frac{M_1 J_4^{np} - M_4 J_1^{np}}{J_1^{np} + J_4^{np}}; \quad M_{34}^P = \frac{M_3 J_4^{np} - M_4 J_3}{J_3 + J_4^{np}},$$

в которых  $J_1^{np}$  и  $J_4^{np}$  – приведенные моменты инерции соответствующих звеньев кинематических цепей.

В (6)  $M_0^A, M_0^B, M_0^C, M_0^D$ , зависящие от коэффициентов трения скольжения, расчетных диаметров, усилий прижатия фрикционных дисков и их количества, положительные максимальные моменты сил трения, которые могут передаваться фрикционными муфтами и тормозами. Эти моменты могут быть постоянными или зависеть от изменяющихся величин коэффициентов трения скольжения [4], а также времени в случае изменения усилий прижатия дисков; малые параметры  $\varepsilon_i = 10^{-2}, 10^{-3}$ .

Система (1) включает линейно зависимые от ускорений  $\ddot{\phi}_1, \ddot{\phi}_3, \ddot{\phi}_5$  левые части уравнений (1) [12]. Разрешим систему (1) относительно ускорений  $\ddot{\phi}_i$  (умножим левую и правую части уравнений на обратную матрицу  $A^{-1}$ )

$$\ddot{\Phi} = A^{-1}Q. \quad (7)$$

Таким образом, (1) сводится к системе

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_1 &= f_1(\dot{\phi}_1, \dot{\phi}_3, \dot{\phi}_5, Q_1, Q_3, Q_5, t); \\ \ddot{\phi}_3 &= f_3(\dot{\phi}_1, \dot{\phi}_3, \dot{\phi}_5, Q_1, Q_3, Q_5, t); \\ \ddot{\phi}_5 &= f_5(\dot{\phi}_1, \dot{\phi}_3, \dot{\phi}_5, Q_1, Q_3, Q_5, t), \end{aligned} \quad (8)$$

где  $f_1, f_3, f_5$  – функции, полученные в результате преобразования (1) согласно (7).

Моменты  $M_1$  (двигателя) и  $M_3$  (внешней нагрузки), действующие на входное 1 и на выходное 3 звенья системы принимаем в виде

$$M_1 = \begin{cases} a - b\dot{\phi}_1, & 0 \leq \dot{\phi}_1 < \omega_1; \\ 0, & \omega_1 \leq \dot{\phi}_1 \end{cases}; \quad M_3 = \begin{cases} M_{3,0}, & 0 \leq t < t_2 \\ M_{3,0} + \frac{M_{4,0}(t - t_2)}{t_4 - t_2}, & t_4 \leq t \end{cases};$$

$$\omega_1 = 100 c^{-1}; M_{3,0} = 80 \text{ Нм}; M_{4,0} = 70 \text{ Нм}.$$

Режим функционирования принят следующим: муфта  $A$  работает постоянно, муфта  $B$  работает в интервале времени  $0 \leq t < t_1$ ; ее выключение начинается при  $t = t_1$ , после чего момент линейно понижается и при  $t = t_2$  становится равным 0 и сохраняет это значение впоследствии. При  $t = t_3$  включается тормоз  $C$ , его предельная нагрузка линейно нарастает до времени  $t = t_4$ , после чего остается постоянной.

Передаваемые фрикционными максимальные моменты (Нм) сил трения приняты следующими:

$$M_0^A = 100, M_0^B = \begin{cases} 100, & 0 \leq t < t_1; \\ 100 - \frac{100(t-t_1)}{t_2-t_1}, & t_1 \leq t < t_2; \\ 0, & t_2 \leq t; \end{cases}$$

$$M_0^C = \begin{cases} 0, & t_3 \leq t; \\ 150 \cdot \frac{t-t_3}{t_4-t_3}, & t_3 \leq t < t_4; \\ 150, & t_4 \leq t; \end{cases} M_0^D = 0.$$

## 2. Геометрические, кинематические и инерционные параметры объекта.

Моменты инерции звеньев (кгм<sup>2</sup>):

$$J_1 = 1; J_2 = 2; J_3 = 2; J_4 = 1,5; J_5 = 2; J_6 = 1,5.$$

Массы и моменты инерции спутников не учитывались.

Угловые скорости звеньев 2, 4, 6 механической системы по рис. 1, выраженные через обобщенные угловые скорости:  $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_3, \dot{\varphi}_5$ , имеют вид: [5]

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{\dot{\varphi}_1}{u_{12}} - \frac{\dot{\varphi}_3(1-u_{12})}{u_{12}}; \quad \dot{\varphi}_4 = \frac{\dot{\varphi}_1 u_{42'}}{u_{12}} - \frac{\dot{\varphi}_3(1-u_{12})u_{42'}}{u_{12}} + \dot{\varphi}_5(1-u_{42'});$$

$$\dot{\varphi}_6 = \frac{\dot{\varphi}_1 u_{42'} u_{64'}}{u_{12}} - \frac{\dot{\varphi}_3(1-u_{12})u_{42'} u_{64'}}{u_{12}} + \dot{\varphi}_5(1-u_{42'} u_{64'}).$$

Передаточные отношения зубчатых пар дифференциалов  $j = A, B, C, D$  при условно неподвижных осях вращения спутников приняты следующими:

$$u_{12} = -4; u_{42'} = -2; u_{64'} = -4,5; \varepsilon_j = 10^{-2} \div 10^{-3}.$$

Параметры момента  $M_1$  на входном валу:  $a = 700$  Нм,  $b = 7$  Нмс.

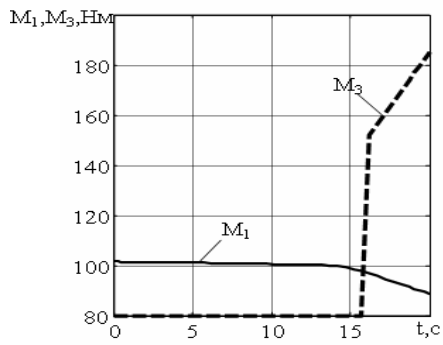
Момент  $M_3$  задан таким образом, чтобы сформировать проскальзывание дисков в фрикционных  $A, B, C$  и проверить их нагруженность при различных режимах работы.

## 3. Анализ результатов численных исследований.

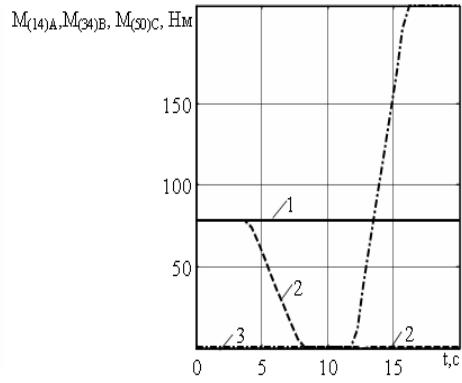
Для решения нелинейной системы уравнений (1), (8) используем следующие начальные условия:

$$\varphi_1(0) = 0, \dot{\varphi}_1(0) = 85,5 c^{-1}; \varphi_3(0) = 0, \dot{\varphi}_3(0) = 80 c^{-1}; \varphi_5(0) = 0, \dot{\varphi}_5(0) = 75,1 c^{-1}.$$

Полученные на ЭВМ результаты моделирования движения системы (1), (8) графически изображены на рис. 2, 3, 4. Нагрузки  $M_1$  и  $M_3$ , действующие на входное (1) и выходное (3) звенья, представлены на рис. 2, а, соответственно. Моменты сил трения  $M_{14}^A, M_{34}^B, M_{50}^C$  в фрикционных  $A, B$  и  $C$  даны на рис. 2, б.

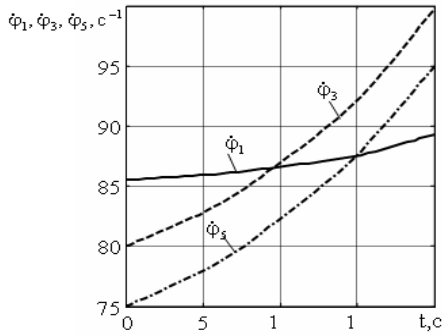


*a*

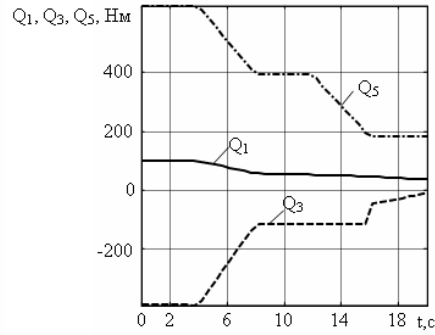


*б*

*Рис. 2*

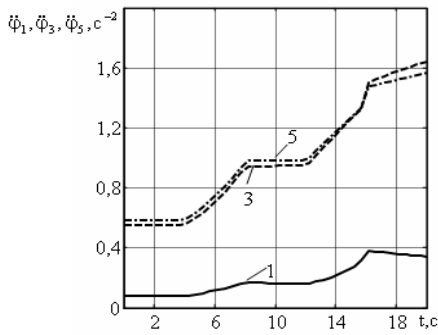


*a*

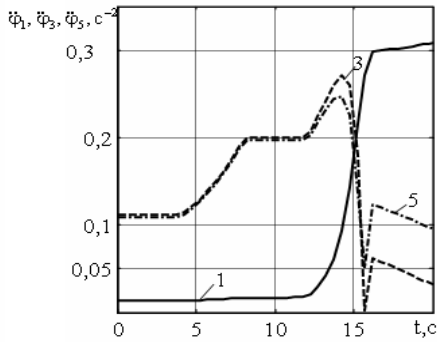


*б*

*Рис. 3*



*a*



*б*

*Рис. 4*

На рис. 3, *a*, изображены угловые скорости вращения обобщенных координат звеньев 1, 3, 5. График изменения обобщенных сил  $Q_1, Q_3, Q_5$  представлен на рис. 3, *б*. Угловые ускорения звеньев 1, 2, 3 показаны, соответственно, на рис. 4, *a*. Параметры варианта:  $M_{A_0} = 40, M_{B_0} = 40, k_0 = 1,4$ ; зависимости для значений моментов  $M_{A_0z} = M_{A_0} \cdot k_0$ ;  $M_{B_0z} = M_{B_0} \cdot k_0$ . На рис. 4, *б* представлен график ускорений для варианта системы со следующими параметрами:  $M_{A_0} = 4, M_{B_0} = 4, k_0 = 10$ .

Из представленных материалов следует, что динамические процессы в рассматриваемой коробке передач носят достаточно спокойный характер, несмотря на значи-

тельное увеличение величин усилий  $M_0^A, M_0^B$  и  $M_0^C$  прижатия дисков в фрикционах  $A, B$  и  $C$ . При прочих равных условиях повышает возбуждение в коробке передач (рис. 4, б), что свидетельствует о необходимости тщательного выбора предельных моментов сил трения фрикционов в статическом состоянии и скачкообразный (негладкий) закон изменения сил трения. Такой эффект объясняется сглаживающими свойствами фрикционов, допускающих относительное проскальзывание их дисков. Следует отметить, что при переключении скоростей (фрикционы  $A$  и  $B$  заменяются на  $A$  и  $C$ ) не происходит существенного изменения величин угловых ускорений.

Подтверждается возможность использования гладкой аппроксимации для составления динамической модели коробки передач такого типа и исследования динамических процессов.

#### **Заключение.**

Разработано описание динамической системы с несколькими степенями свободы, содержащей управляемые фрикционы. Включением фрикционов достигается необходимое кинематическое передаточное отношение между входным и выходным звеньями. В данной модели используется гладкая аппроксимация разрывной функции момента сил фрикционного взаимодействия. Это позволяет осуществлять непрерывное численное интегрирование уравнений движения без изменения их структуры, т.е. сохраняя их количество. Управление переключением с одной скорости вращения выходного звена на другую осуществляется заданием функций времени, которые реализуют усилия прижатия фрикционных дисков. Рассматривается пример численного исследования этого механизма с тремя дифференциалами и четырьмя фрикционами. Представлен анализ динамических процессов в этой системе.

Р Е З Ю М Е . Розглянуто питання геометрії і кінематики руху динамічної системи з декількома ступенями вільності, яка містить керовані фрикціони. Включенням фрикціонів отримується необхідне кінематичне передаточне відношення між входною і вихідною ланками. В моделі використовується гладка апроксимація розривної функції моменту сил фрикційної взаємодії. Це дозволяє виконати неперервне чисельне інтегрування рівнянь руху без зміни їхньої структури, тобто зберігаючи їх кількість. Керування переключенням з однієї швидкості обертання вихідної ланки на іншу виконується заданням функцій часу, які реалізують зусилля притиску дисків фрикціонів. Розглянуто приклад чисельного дослідження такого механізму, який складається з трьох диференціалів і чотирьох фрикціонів. Проаналізовано динамічні процеси для такої системи.

1. Бухгольц Д. Р. Курс теоретической механики. Т. 2. – М.: Наука, 1979. – 544 с.
2. Кирдяев Ю.Н. Многопоточные передачи дифференциального типа. – Л.: Машиностроение, 1969. – 176 с.
3. Кожевников С.Н. Динамика машин с упругими звеньями. – К.: Изд-во АН УССР, 1961. – 160 с.
4. Филитов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985. – 224 с.
5. Antonyuk E.Ya., Zabuga A.T. Dynamics of a Two-Link Vehicle in an L-Shaped Corridor Revisited // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 2. – P. 222 – 230.
6. Antonyuk E.Ya., Zabuga A.T. Motion of an Articulated Vehicle with Two-Dimensional Sections Subject to Lateral Obstacles // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 4. – P. 404 – 412.
7. Hussein I.I., Bloch A.M. Optimal Control of Underactuated Nonholonomic Mechanical Systems // IEEE Trans. Automat. Control. – 2008. – **53**, N. 3. – P. 668 – 682.
8. Khoroshun A.S. Stability of the Horizontal Flight of an Aircraft // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 1. – P. 96 – 104.
9. Larin V.B., Tunik A.A. On Problem of Synthesis of Control System for Quadcopter // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 3. – P. 342 – 348.
10. Martynyuk A.A., Nikitina N.V. On the Quantitative Analysis of One Model of Transport Vehicle // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 2. – P. 231 – 238.
11. Nikitina N.V. Analyzing the Mechanisms of Loss of Orbital Stability in Mathematical Models of Three-Dimensional Systems // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 6. – P.716 – 726.
12. Pars L.A. A Treatise on Analytical Dynamics. – London: Heinemann, 1964. – 641 p.

Поступила 28.02.2017

Утверждена в печать 05.03.2019