

Л. П. Х о р о ш у н

**ЭФФЕКТИВНЫЕ УПРУГИЕ СВОЙСТВА СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТНЫХ  
МАТЕРИАЛОВ С ДЕФЕКТАМИ НА МЕЖФАЗНОЙ ГРАНИЦЕ**

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина: e-mail: lkhoshun@ukr.net*

**Abstract.** A problem of effective elastic properties of stochastic laminated composite is considered. The imperfect interface contact conditions of layers of filler and matrix are assumed in the form of presence of porous interphase layers between the matrix and fillers, which are considered as the third component. On the interface planes of interfacial layer with the matrix and filler layers, the conditions of perfect contact in the form of continuity of displacements and surface stresses are satisfied. An approach is based on the stochastic equations of elasticity for the structurally inhomogeneous material, where the tensor of elastic moduli is a random function of one coordinate and the problem of effective elastic properties has an exact solution. A dependence of the effective elastic properties on the filler volume fraction and the porosity of the interphase layers is studied.

**Key words:** layered composite, stochastic equation, imperfect interface conditions, interphase layers, effective elastic properties.

**Введение.**

Развитие современной техники во многом связано с созданием и непрерывным совершенствованием новых материалов, обладающих определенным комплексом физико-механических свойств, необходимых для обеспечения надежной работы конструкций. Особое место здесь занимают композитные материалы (КМ), представляющие собой определенные системы связанных в монолит некоторых простых компонентов с различными характеристиками жесткости и прочности. В результате формируется материал с новыми свойствами, именуемыми эффективными, которые количественно и качественно отличаются от соответствующих свойств компонентов.

Характерной особенностью КМ является наличие весьма большого числа структурных элементов в элементарном макрообъеме. Совокупность структурных элементов с одними и теми же свойствами образует компонент КМ. В конечном счете эффективные свойства КМ определяются свойствами компонентов, геометрическими параметрами структуры и характером связи между компонентами. Исходя из геометрических параметров структуры КМ можно классифицировать по характеру связности структурных элементов, по характерным размерам и форме структурных элементов, по характеру расположения структурных элементов.

Среди разнообразия видов КМ широкое распространение получили КМ, состоящие из матрицы, армированной наполнителями с высокими характеристиками жесткости и прочности. Если исходить из характерной формы структурных элементов и их относительных размеров, то основные виды КМ можно разделить на зернистые, волокнистые и слоистые. В зависимости от размеров армирующих частиц и их объемного содержания зернистые КМ делятся на материалы, упрочненные частицами, дисперсно-упрочненные материалы [3] и нанокомпозиты [12].

Механизм формирования свойств КМ матричной структуры, отличных от свойств компонентов, связан с тем, что наполнитель вносит основной вклад в жесткость и прочность КМ, а матрица обеспечивает необходимую форму изделию и передает нагрузку наполнителю. Поэтому достижение максимально высоких показателей жесткости и прочности КМ с заданными механическими свойствами компонентов обеспечивается максимальным нагружением армирующих элементов, которое связано с надлежащим сцеплением (адгезией) элементов наполнителя с матрицей. Идеальное сцепление матрицы и элементов наполнителя описывается непрерывностью перемещений и поверхностных напряжений при переходе через границу раздела компонентов и носит название условий совершенного контакта на межфазной границе [15 – 17, 21, 22]. В большинстве работ по прогнозированию эффективных упругих свойств КМ принимаются условия совершенного контакта на межфазной границе.

Однако понятие межфазная граница между компонентами КМ является определенной идеализацией реальных условий контакта двух различных материалов, имеющих разную структуру и разную природу внутренней связи. В действительности при контакте двух различных веществ происходит искажение их структуры в некоторой переходной зоне, которая разделяет участки с неискаженной структурой и может иметь размеры от нескольких нанометров до нескольких тысяч нанометров [2, 5]. Переходная зона между компонентами КМ образуется также в результате поверхностной обработки элементов наполнителя путем нанесения на поверхность аппретирующих веществ для усиления прочности связи между матрицей и наполнителем. При этом в переходной зоне возможно образование микротрещин и микропор, обусловленное недостаточным смачиванием поверхности наполнителя связующим или аппретом, а также повреждаемостью, вызываемой силовыми, температурными и усадочными факторами в процессе изготовления и эксплуатации КМ.

Из вышесказанного следует, что в реальном КМ контактирующие компоненты разделены не поверхностью, а некоторым материальным слоем с дефектами в виде микротрещин и микропор. Поэтому прогнозирование эффективных упругих свойств КМ на основе модели совершенного контакта компонентов в виде непрерывности перемещений и поверхностных напряжений на межфазной границе может приводить к существенным погрешностям. Это обусловило появление различных вариантов формулировки моделей несовершенного контакта матрицы и включений [5 – 7, 9, 10, 13, 20, 22].

Наиболее адекватной представляется модель контакта матрицы и включения, базирующаяся на представлении, что между матрицей и включением существует межфазный материальный слой, свойства которого отличаются от свойств матрицы и включения [7, 14]. При этом на поверхностях раздела межфазного слоя с матрицей и включением выполняются условия совершенного контакта в виде непрерывности перемещений и поверхностных напряжений, что дает основание рассматривать межфазный слой как третью фазу. Такая модель усложняет построение точных аналитических решений задач о напряженно-деформированном состоянии и эффективных свойствах КМ, поэтому появились работы с приближенными моделями [13, 20], где межфазный слой заменяется «несовершенной межфазной поверхностью», на которой формулируются условия, отличные от совершенного контакта в виде непрерывности перемещений и поверхностных напряжений. В одном из таких условий предполагается существование скачка перемещений на «несовершенной границе» [13, 20] и его пропорциональность непрерывным поверхностным напряжениям. Более адекватным представляется подход, основанный на асимптотическом разложении по толщине межфазного слоя уравнений модели соответствующего контакта [7, 14]. Здесь в условиях на «несовершенной границе» могут входить скачки как перемещений, так и поверхностных напряжений.

При моделировании контакта матрицы и включения наличием межфазного материального слоя, который рассматривается как третья фаза, задача о прогнозировании эффективных свойств формулируется для трехфазного КМ, что усложняет ее решение для зернистых и волокнистых КМ. Один из методов ее решения состоит в замене включения с межфазным слоем эквивалентным включением [14], которое имеет эквивалентные или эффективные свойства двухкомпонентного матричного материала, где включения и матрица имеют свойства соответственно реальных включений и меж-

фазных слоев. В результате задача об эффективных свойствах трехфазного КМ сводится к последовательности двух задач об эффективных свойствах двухфазных КМ [19]. Исключением здесь являются КМ слоистой структуры, где задача об эффективных свойствах имеет точное решение независимо от количества фаз.

Согласно представлению об оптимальном поведении КМ как структурном единстве его компонентов (фаз) [3], разрушение компонентов или сцепления между ними ведет к нарушению оптимального поведения КМ. Если сцепление между матрицей и включением моделируется наличием межфазного слоя, то задача об оптимальном поведении КМ в общем случае сводится к исследованию повреждаемости трехкомпонентного КМ, проявляющейся в виде образования микротрещин и микропор в процессе изготовления и эксплуатации в результате воздействия силовых, температурных, усадочных и других факторов. Как частные случаи возможны и целесообразны более простые постановки, где исследуется влияние отдельных конкретных факторов на напряженно-деформированное состояние и эффективные свойства КМ. Одна из таких конкретных постановок задачи состоит в исследовании влияния упругих свойств межфазного слоя и дефектов в виде микротрещин и микропор на напряженно-деформированное состояние и эффективные свойства КМ, что связано с решением задач механики трещин на границе раздела сред [11], систем трещин [8] и механики КМ с дефектами на границе раздела компонентов [19].

В настоящей работе рассматривается задача об эффективных упругих свойствах слоистого композитного материала стохастической структуры, где контактирующие компоненты разделены межфазным слоем с дефектами в виде микропор. Упругие свойства межфазного слоя отличаются от свойств слоев наполнителя и матричного материала. На поверхностях раздела межфазного слоя со слоями наполнителя и матрицы выполняются условия совершенного контакта в виде непрерывности перемещений и поверхностных напряжений. Межфазные слои рассматриваются как третий компонент, состоящий из приповерхностных слоев двух компонентов и аппретирующих покрытий с дефектами в виде микропор.

В основу построения положены стохастические дифференциальные уравнения упругости в перемещениях для многокомпонентного КМ слоистой структуры с анизотропными компонентами. Так как модули упругости КМ слоистой структуры зависят от одной координаты, то при однородных макронапряжениях и макродеформациях флуктуации перемещений, напряжения и деформации также будут функциями одной координаты. В этом случае задача о напряженно-деформированном состоянии и эффективных свойствах КМ имеет точное аналитическое решение. На основе полученного решения исследованы эффективные свойства трехкомпонентного КМ слоистой структуры. Построены кривые зависимостей эффективных упругих постоянных слоистого материала с изотропными компонентами от объемного содержания наполнителя и пористости межфазного слоя.

### §1. Основные уравнения.

Исходим из представления о трехкомпонентном композитном материале слоистой структуры, состоящем из чередующихся слоев наполнителя, матричного материала и находящихся между ними межфазных слоев. Сцепление между межфазным слоем и контактирующими с ним слоями наполнителя и матрицы принимаем совершенным, обеспечивающим на границе непрерывность перемещений и поверхностных напряжений.

В этом случае физико-механические характеристики будут функциями одной координаты. Рассмотрим макрообъем слоистого материала, находящегося в условиях однородных макродеформаций и макронапряжений. Напряженно-деформированное состояние в микрооточке описывается уравнениями равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (1.1)$$

соотношениями упругости

$$\sigma_{ij} = \lambda_{ijmn} \varepsilon_{mn} \quad (1.2)$$

и Коши

$$\varepsilon_{ij} = u_{(i,j)} \equiv (u_{i,j} + u_{j,i}) / 2. \quad (1.3)$$

Пусть ось  $x_3$  направлена по нормали к слоям. Тогда упругие характеристики  $\lambda_{ijmn}$  будут случайными функциями лишь координаты  $x_3$ . Вследствие однородности макронапряжений  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  и макродеформаций  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$  напряжения  $\sigma_{ij}$ , деформации  $\varepsilon_{ij}$  и флуктуации перемещений  $u_i^0 = u_i - \langle \varepsilon_{ij} \rangle x_j$  также будут функциями одной координаты  $x_3$ . В этом случае уравнения равновесия (1.1) упрощаются

$$\sigma_{i3,3} = 0, \quad (1.4)$$

откуда находим

$$\sigma_{i3} = A_i, \quad A_i = \text{const}. \quad (1.5)$$

Выражения для деформаций согласно (1.3) имеют вид

$$\varepsilon_{ij} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \frac{1}{2} (u_{i,3}^0 \delta_{j3} + u_{j,3}^0 \delta_{i3}). \quad (1.6)$$

Подставляя (1.2), (1.6) в интегралы уравнений равновесия (1.5), получаем алгебраические уравнения относительно производных от флуктуаций перемещений

$$\lambda_{i3m3} u_{m,3}^0 = A_i - \lambda_{i3mn} \langle \varepsilon_{mn} \rangle. \quad (1.7)$$

Решения их будут следующими:

$$u_{m,3}^0 = \lambda_{i3m3}^{-1} \left( A_m - \lambda_{m3pq} \langle \varepsilon_{pq} \rangle \right). \quad (1.8)$$

Осредняя соотношения (1.8) и учитывая, что математические ожидания от флуктуаций равны нулю, получаем

$$\langle \lambda_{i3k3}^{-1} \rangle A_k - \langle \lambda_{i3k3}^{-1} \lambda_{m3pq} \rangle \langle \varepsilon_{pq} \rangle = 0. \quad (1.9)$$

Отсюда определяем постоянные интегрирования

$$A_i = \langle \lambda_{i3m3}^{-1} \rangle^{-1} \langle \lambda_{m3n3}^{-1} \lambda_{n3pq} \rangle \langle \varepsilon_{pq} \rangle, \quad (1.10)$$

а из (1.8), (1.10) находим флуктуации производных перемещений

$$u_{i,3}^0 = \lambda_{i3k3}^{-1} \left( \langle \lambda_{k3m3}^{-1} \rangle^{-1} \langle \lambda_{m3n3}^{-1} \lambda_{n3pq} \rangle - \lambda_{k3pq} \right) \langle \varepsilon_{pq} \rangle. \quad (1.11)$$

Подставляя (1.11) в (1.6), получаем выражения микродеформаций через макродеформации

$$\varepsilon_{ij} = \left[ \delta_{ip} \delta_{jq} + \frac{1}{2} (\lambda_{i3m3}^{-1} \delta_{j3} + \lambda_{j3m3}^{-1} \delta_{i3}) \left( \langle \lambda_{m3n3}^{-1} \rangle^{-1} \langle \lambda_{n3k3}^{-1} \lambda_{k3pq} \rangle - \lambda_{m3pq} \right) \right] \langle \varepsilon_{pq} \rangle. \quad (1.12)$$

Микронапряжения находим подстановкой (1.12) в (1.2)

$$\sigma_{ij} = \left[ \lambda_{ijpq} + \lambda_{ijm3} \lambda_{m3n3}^{-1} \left( \langle \lambda_{n3k3}^{-1} \rangle^{-1} \langle \lambda_{k3s3}^{-1} \lambda_{s3pq} \rangle - \lambda_{n3pq} \right) \right] \langle \varepsilon_{pq} \rangle. \quad (1.13)$$

Осредняя выражение (1.13), получаем зависимости между макронапряжениями и макродеформациями

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \lambda_{ijpq}^* \langle \varepsilon_{pq} \rangle, \quad (1.14)$$

где эффективные упругие постоянные определяются формулами

$$\lambda_{ijpq}^* = \langle \lambda_{ijpq} \rangle + \langle \lambda_{ijm3} \lambda_{m3n3}^{-1} \rangle \langle \lambda_{n3k3}^{-1} \rangle^{-1} \langle \lambda_{k3s3}^{-1} \lambda_{s3pq} \rangle - \langle \lambda_{ijm3} \lambda_{m3n3}^{-1} \lambda_{n3pq} \rangle. \quad (1.15)$$

Выражения содержат только одноточечные моменты относительно упругих характеристик материала, поэтому достаточно задать одноточечную плотность упругих характеристик. Для  $N$ -компонентного материала одноточечная плотность имеет вид

$$f(\lambda_{ijmn}) = \sum_{k=1}^N c_k \delta(\lambda_{ijmn} - \lambda_{ijmn}^k), \quad (1.16)$$

где  $c_k, \lambda_{ijmn}^k$  – соответственно объемное содержание и тензор модулей упругости  $k$ -компонента.

Отсюда для  $N$ -компонентного слоистого композитного материала находим

$$\langle \varphi(\lambda_{ijmn}) \rangle = \sum_{k=1}^N c_k \varphi(\lambda_{ijmn}^k). \quad (1.17)$$

Формулы (1.15) – (1.17) позволяют вычислить эффективные постоянные слоистого композита с произвольной симметрией материала слоев. Однако практическое их использование связано с громоздкими операциями обращения, осреднения и свертывания. Так как в реальных материалах слои обладают определенной симметрией, то целесообразно вычислять эффективные постоянные с учетом симметрии слоев.

## §2. Изотропные слои.

Если слои изотропны, то упругие характеристики имеют вид

$$\lambda_{ijmn} = \lambda \delta_{ij} \delta_{mn} + \mu (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm}), \quad (2.1)$$

где  $\lambda, \mu$  – характеристики Ламе.

Подставляя (2.1) в (1.7), находим

$$u_{i,3}^0 = \frac{1}{\mu} A_i - 2 \langle \varepsilon_{i3} \rangle; \quad u_{3,3}^0 = \frac{1}{\lambda + 2\mu} A_3 - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \langle \varepsilon_{kk} \rangle - \langle \varepsilon_{33} \rangle \quad (i, k = 1, 2). \quad (2.2)$$

Осредняя (2.2), определяем постоянные интегрирования

$$A_i = 2 \left\langle \frac{1}{\mu} \right\rangle \langle \varepsilon_{i3} \rangle; \quad A_3 = \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^{-1} \left( \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle \langle \varepsilon_{kk} \rangle + \langle \varepsilon_{33} \rangle \right) \quad (i, k = 1, 2). \quad (2.3)$$

На основе (1.6), (2.2), (2.3) находим микродеформации

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \langle \varepsilon_{ij} \rangle; \quad \varepsilon_{i3} = \frac{1}{\mu} \left\langle \frac{1}{\mu} \right\rangle^{-1} \langle \varepsilon_{i3} \rangle; \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{\lambda + 2\mu} \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^{-1} \left[ \left( \left\langle \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right\rangle - \lambda \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle \right) \langle \varepsilon_{kk} \rangle + \varepsilon_{33} \right] \quad (i, k = 1, 2). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Подставляя (2.1), (2.4) в (1.2), получаем выражения микронапряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2\mu \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \frac{1}{\lambda + 2\mu} \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^{-1} \left( \left\langle \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right\rangle + \right. \\ &\quad \left. + 2\mu \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle \right) \langle \varepsilon_{kk} \rangle \delta_{ij} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle \langle \varepsilon_{33} \rangle \delta_{ij}; \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\sigma_{i3} = 2 \left\langle \frac{1}{\mu} \right\rangle^{-1} \langle \varepsilon_{i3} \rangle; \quad \sigma_{33} = \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^{-1} \left( \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \langle \varepsilon_{kk} \rangle + \langle \varepsilon_{33} \rangle \right) \quad (i, k = 1, 2).$$

Осредняя (2.5), находим зависимости между макронапряжениями и макродеформациями

$$\begin{aligned}\langle \sigma_{ij} \rangle &= (\lambda_{11}^* - \lambda_{12}^*) \langle \varepsilon_{ij} \rangle + (\lambda_{12}^* \langle \varepsilon_{kk} \rangle + \lambda_{13}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle) \delta_{ij}; \\ \langle \sigma_{33} \rangle &= \lambda_{13}^* \langle \varepsilon_{kk} \rangle + \lambda_{33}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle; \quad \langle \sigma_{i3} \rangle = 2\lambda_{44}^* \langle \varepsilon_{i3} \rangle \quad (i, k = 1, 2),\end{aligned}\quad (2.6)$$

где эффективные упругие постоянные определяются формулами

$$\begin{aligned}\lambda_{11}^* &= \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^2 + 4 \left\langle \frac{\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \right\rangle; \\ \lambda_{12}^* &= \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^2 + 2 \left\langle \frac{\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \right\rangle; \\ \lambda_{13}^* &= \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right\rangle; \quad \lambda_{33}^* = \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^{-1}; \quad \lambda_{44}^* = \left\langle \frac{1}{\mu} \right\rangle^{-1}.\end{aligned}\quad (2.7)$$

Если обозначить объемные содержания и характеристики Ламе наполнителя, матричного материала и межфазных слоев соответственно  $c_1, \lambda_1, \mu_1, c_2, \lambda_2, \mu_2, c_3, \lambda_3, \mu_3$ , то эффективные упругие постоянные (2.7) слоистого КМ будут определяться формулами

$$\begin{aligned}\lambda_{11}^* &= \left( \sum_{v=1}^3 \frac{c_v}{\lambda_v + 2\mu_v} \right)^{-1} \left( \sum_{v=1}^3 \frac{c_v \lambda_v}{\lambda_v + 2\mu_v} \right)^2 + 4 \left[ \sum_{v=1}^3 \frac{c_v \mu_v (\lambda_v + \mu_v)}{\lambda_v + 2\mu_v} \right]; \\ \lambda_{12}^* &= \left( \sum_{v=1}^3 \frac{c_v}{\lambda_v + 2\mu_v} \right)^{-1} \left( \sum_{v=1}^3 \frac{c_v \lambda_v}{\lambda_v + 2\mu_v} \right)^2 + 2 \left( \sum_{v=1}^3 \frac{c_v \lambda_v \mu_v}{\lambda_v + 2\mu_v} \right); \\ \lambda_{13}^* &= \left( \sum_{v=1}^3 \frac{c_v}{\lambda_v + 2\mu_v} \right)^{-1} \left( \sum_{v=1}^3 \frac{c_v \lambda_v}{\lambda_v + 2\mu_v} \right); \quad \lambda_{33}^* = \left( \sum_{v=1}^3 \frac{c_v}{\lambda_v + 2\mu_v} \right)^{-1}; \\ \lambda_{44}^* &= \left( \sum_{v=1}^3 \frac{c_v}{\mu_v} \right)^{-1}; \quad k^* = \frac{1}{2} (\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*); \quad m^* = \frac{1}{2} (\lambda_{11}^* - \lambda_{12}^*).\end{aligned}\quad (2.8)$$

### §3. Ортогруппные слои.

Рассмотрим слоистый композит, составленный из ортогруппных слоев, плоскости симметрии которых совпадают с координатными плоскостями. Зависимости между напряжениями и деформациями в микроточке запишем в виде

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \lambda_{11} \varepsilon_{11} + \lambda_{12} \varepsilon_{22} + \lambda_{13} \varepsilon_{33}; \quad \sigma_{23} = 2\lambda_{44} \varepsilon_{23}; \\ \sigma_{22} &= \lambda_{12} \varepsilon_{11} + \lambda_{22} \varepsilon_{22} + \lambda_{23} \varepsilon_{33}; \quad \sigma_{13} = 2\lambda_{55} \varepsilon_{13}; \\ \sigma_{33} &= \lambda_{13} \varepsilon_{11} + \lambda_{23} \varepsilon_{22} + \lambda_{33} \varepsilon_{33}; \quad \sigma_{12} = 2\lambda_{66} \varepsilon_{12}.\end{aligned}\quad (3.1)$$

Согласно (1.5), (1.6) имеем

$$\begin{aligned}\lambda_{55} (2 \langle \varepsilon_{13} \rangle + u_{1,3}^0) &= C_1; \quad \lambda_{44} (2 \langle \varepsilon_{23} \rangle + u_{2,3}^0) = C_2; \\ \lambda_{13} \langle \varepsilon_{11} \rangle + \lambda_{23} \langle \varepsilon_{22} \rangle + \lambda_{33} (\langle \varepsilon_{33} \rangle + u_{3,3}^0) &= C_3.\end{aligned}\quad (3.2)$$

Решая (3.2) относительно производных от флуктуаций перемещений и проводя осреднение, находим

$$\begin{aligned} C_1 &= 2\langle \lambda_{55}^{-1} \rangle^{-1} \langle \varepsilon_{13} \rangle; \quad C_2 = 2\langle \lambda_{44}^{-1} \rangle^{-1} \langle \varepsilon_{23} \rangle; \\ C_3 &= \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} \left( \langle \lambda_{13} \lambda_{33}^{-1} \rangle \langle \varepsilon_{11} \rangle + \langle \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \rangle \langle \varepsilon_{22} \rangle + \langle \varepsilon_{33} \rangle \right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

На основе соотношений (1.6), (3.1) – (3.3) получим выражения микронапряжений через макродеформации

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \left[ \lambda_{11} + \lambda_{13} \lambda_{33}^{-1} \left( \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} \langle \lambda_{13} \lambda_{33}^{-1} \rangle - \lambda_{13} \right) \right] \langle \varepsilon_{11} \rangle + \\ &+ \left[ \lambda_{12} + \lambda_{13} \lambda_{33}^{-1} \left( \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} \langle \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \rangle - \lambda_{23} \right) \right] \langle \varepsilon_{22} \rangle + \lambda_{13} \lambda_{33}^{-1} \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} \langle \varepsilon_{33} \rangle; \\ \sigma_{22} &= \left[ \lambda_{12} + \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \left( \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} \langle \lambda_{13} \lambda_{33}^{-1} \rangle - \lambda_{13} \right) \right] \langle \varepsilon_{11} \rangle + \\ &+ \left[ \lambda_{22} + \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \left( \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} \langle \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \rangle - \lambda_{23} \right) \right] \langle \varepsilon_{22} \rangle + \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} \langle \varepsilon_{33} \rangle; \\ \sigma_{33} &= \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} \left( \langle \lambda_{13} \lambda_{33}^{-1} \rangle \langle \varepsilon_{11} \rangle + \langle \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \rangle \langle \varepsilon_{22} \rangle + \langle \varepsilon_{33} \rangle \right); \\ \sigma_{23} &= 2\langle \lambda_{44}^{-1} \rangle^{-1} \langle \varepsilon_{23} \rangle, \quad \sigma_{13} = 2\langle \lambda_{55}^{-1} \rangle^{-1} \langle \varepsilon_{13} \rangle, \quad \sigma_{12} = 2\lambda_{66} \langle \varepsilon_{12} \rangle. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Осредняя соотношения (3.4), получаем зависимости между макронапряжениями и макродеформациями

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{11} \rangle &= \lambda_{11}^* \langle \varepsilon_{11} \rangle + \lambda_{12}^* \langle \varepsilon_{22} \rangle + \lambda_{13}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle; \quad \langle \sigma_{23} \rangle = 2\lambda_{44}^* \langle \varepsilon_{23} \rangle; \\ \langle \sigma_{22} \rangle &= \lambda_{12}^* \langle \varepsilon_{11} \rangle + \lambda_{22}^* \langle \varepsilon_{22} \rangle + \lambda_{23}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle; \quad \langle \sigma_{13} \rangle = 2\lambda_{55}^* \langle \varepsilon_{13} \rangle; \\ \langle \sigma_{33} \rangle &= \lambda_{13}^* \langle \varepsilon_{11} \rangle + \lambda_{23}^* \langle \varepsilon_{22} \rangle + \lambda_{33}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle; \quad \langle \sigma_{12} \rangle = 2\lambda_{66}^* \langle \varepsilon_{12} \rangle, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где эффективные постоянные определяются формулами

$$\begin{aligned} \lambda_{11}^* &= \langle \lambda_{11} \rangle + \langle \lambda_{13} \lambda_{33}^{-1} \rangle^2 \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} - \langle \lambda_{13}^2 \lambda_{33}^{-1} \rangle; \\ \lambda_{12}^* &= \langle \lambda_{12} \rangle + \langle \lambda_{13} \lambda_{33}^{-1} \rangle \langle \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \rangle \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} - \langle \lambda_{13} \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \rangle; \\ \lambda_{13}^* &= \langle \lambda_{13} \lambda_{33}^{-1} \rangle \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1}; \quad \lambda_{22}^* = \langle \lambda_{22} \rangle + \langle \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \rangle^2 \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} - \langle \lambda_{23}^2 \lambda_{33}^{-1} \rangle; \\ \lambda_{23}^* &= \langle \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \rangle \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1}; \quad \lambda_{33}^* = \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1}; \quad \lambda_{44}^* = \langle \lambda_{44}^{-1} \rangle^{-1}; \quad \lambda_{55}^* = \langle \lambda_{55}^{-1} \rangle^{-1}; \quad \lambda_{66}^* = \langle \lambda_{66} \rangle. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Если слои композита трансверсально изотропны с плоскостью изотропии  $x_1x_2$ , то в зависимостях (3.1), (3.5), (3.6) следует положить

$$\begin{aligned} \lambda_{11} &= \lambda_{22}; \quad \lambda_{13} = \lambda_{23}; \quad \lambda_{44} = \lambda_{55}; \quad \lambda_{11} - \lambda_{22} = 2\lambda_{66}; \\ \lambda_{11}^* &= \lambda_{22}^*; \quad \lambda_{13}^* = \lambda_{23}^*; \quad \lambda_{44}^* = \lambda_{55}^*; \quad \lambda_{11}^* - \lambda_{22}^* = 2\lambda_{66}^*, \end{aligned} \quad (3.7)$$

т.е. в макрообъеме материал также трансверсально изотропен.

Если обозначить объемные содержания и модули упругости наполнителя, матричного материала и межфазных слоев соответственно  $c_\nu, \lambda_{11\nu}, \lambda_{12\nu}, \lambda_{13\nu}, \lambda_{22\nu}, \lambda_{23\nu}, \lambda_{33\nu}, \lambda_{44\nu}, \lambda_{55\nu}, \lambda_{66\nu}$  ( $\nu = 1, 2, 3$ ), то эффективные упругие модули упругости (3.6) слоистого КМ будут определяться формулами

$$\begin{aligned}\lambda_{11}^* &= \sum_{\nu=1}^3 c_\nu \lambda_{11\nu} + \left( \sum_{\nu=1}^3 \frac{c_\nu \lambda_{13\nu}}{\lambda_{33\nu}} \right)^2 \left( \sum_{\nu=1}^3 \frac{c_\nu}{\lambda_{33\nu}} \right)^{-1} - \left( \sum_{\nu=1}^3 \frac{c_\nu \lambda_{13\nu}^2}{\lambda_{33\nu}} \right); \\ \lambda_{12}^* &= \sum_{\nu=1}^3 c_\nu \lambda_{12\nu} + \left( \sum_{\nu=1}^3 \frac{c_\nu \lambda_{13\nu}}{\lambda_{33\nu}} \right) \left( \sum_{\nu=1}^3 \frac{c_\nu \lambda_{23\nu}}{\lambda_{33\nu}} \right) \left( \sum_{\nu=1}^3 \frac{c_\nu}{\lambda_{33\nu}} \right)^{-1} - \left( \sum_{\nu=1}^3 \frac{c_\nu \lambda_{13\nu} \lambda_{23\nu}}{\lambda_{33\nu}} \right); \\ \lambda_{13}^* &= \left( \sum_{\nu=1}^3 \frac{c_\nu \lambda_{13\nu}}{\lambda_{33\nu}} \right) \left( \sum_{\nu=1}^3 \frac{c_\nu}{\lambda_{33\nu}} \right)^{-1}; \quad \lambda_{22}^* = \sum_{\nu=1}^3 c_\nu \lambda_{22\nu} + \left( \sum_{\nu=1}^3 \frac{c_\nu \lambda_{23\nu}}{\lambda_{33\nu}} \right)^2 \left( \sum_{\nu=1}^3 \frac{c_\nu}{\lambda_{33\nu}} \right)^{-1} - \left( \sum_{\nu=1}^3 \frac{c_\nu \lambda_{23\nu}^2}{\lambda_{33\nu}} \right); \\ \lambda_{23}^* &= \left( \sum_{\nu=1}^3 \frac{c_\nu \lambda_{23\nu}}{\lambda_{33\nu}} \right) \left( \sum_{\nu=1}^3 \frac{c_\nu}{\lambda_{33\nu}} \right)^{-1}; \quad \lambda_{33}^* = \left( \sum_{\nu=1}^3 \frac{c_\nu}{\lambda_{33\nu}} \right)^{-1}; \\ \lambda_{44}^* &= \left( \sum_{\nu=1}^3 \frac{c_\nu}{\lambda_{44\nu}} \right)^{-1}; \quad \lambda_{55}^* = \left( \sum_{\nu=1}^3 \frac{c_\nu}{\lambda_{55\nu}} \right)^{-1}; \quad \lambda_{66}^* = \sum_{\nu=1}^3 c_\nu \lambda_{66\nu}.\end{aligned}\tag{3.8}$$

#### §4. Слой с одной плоскостью симметрии.

В практических задачах встречаются композитные материалы, составленные из слоев с одной плоскостью симметрии, параллельной слоям. В этом случае зависимости между микронапряжениями и микродеформациями имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \lambda_{11} \varepsilon_{11} + \lambda_{12} \varepsilon_{22} + \lambda_{13} \varepsilon_{33} + 2\lambda_{16} \varepsilon_{12}; \quad \sigma_{22} = \lambda_{12} \varepsilon_{11} + \lambda_{22} \varepsilon_{22} + \lambda_{23} \varepsilon_{33} + 2\lambda_{26} \varepsilon_{12}; \\ \sigma_{33} &= \lambda_{13} \varepsilon_{11} + \lambda_{23} \varepsilon_{22} + \lambda_{33} \varepsilon_{33} + 2\lambda_{36} \varepsilon_{12}; \quad \sigma_{12} = \lambda_{16} \varepsilon_{11} + \lambda_{26} \varepsilon_{22} + \lambda_{36} \varepsilon_{33} + 2\lambda_{66} \varepsilon_{12};\end{aligned}\tag{4.1}$$

$$\sigma_{13} = 2\lambda_{55} \varepsilon_{13} + 2\lambda_{45} \varepsilon_{23}; \quad \sigma_{23} = 2\lambda_{45} \varepsilon_{13} + 2\lambda_{44} \varepsilon_{23}.$$

Тогда с учетом соотношений (1.5), (1.6) получим

$$\begin{aligned}u_{1,3}^0 &= \frac{\lambda_{45} A_2 - \lambda_{44} A_1}{\lambda_{45}^2 - \lambda_{45} \lambda_{55}} - 2 \langle \varepsilon_{13} \rangle; \quad u_{2,3}^0 = \frac{\lambda_{45} A_1 - \lambda_{55} A_2}{\lambda_{45}^2 - \lambda_{44} \lambda_{55}} - 2 \langle \varepsilon_{23} \rangle; \\ u_{3,3}^0 &= \lambda_{33}^{-1} (A_3 - \lambda_{13} \langle \varepsilon_{11} \rangle - \lambda_{23} \langle \varepsilon_{22} \rangle - \lambda_{33} \langle \varepsilon_{33} \rangle - 2\lambda_{36} \langle \varepsilon_{12} \rangle).\end{aligned}\tag{4.2}$$

Осредняя выражения (4.2), находим постоянные интегрирования

$$\begin{aligned}A_1 &= \frac{2}{\lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_3} (\lambda_3 \langle \varepsilon_{13} \rangle + \lambda_2 \langle \varepsilon_{23} \rangle); \quad A_2 = \frac{2}{\lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_3} (\lambda_2 \langle \varepsilon_{13} \rangle + \lambda_1 \langle \varepsilon_{23} \rangle); \\ A_3 &= \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle \left( \langle \lambda_{13} \lambda_{33}^{-1} \rangle \langle \varepsilon_{11} \rangle + \langle \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \rangle \langle \varepsilon_{22} \rangle + \langle \varepsilon_{33} \rangle - 2 \langle \lambda_{36} \lambda_{33}^{-1} \rangle \langle \varepsilon_{12} \rangle \right),\end{aligned}\tag{4.3}$$

где

$$\lambda_1 = \left\langle \frac{\lambda_{44}}{\lambda_{45}^2 - \lambda_{44} \lambda_{55}} \right\rangle; \quad \lambda_2 = \left\langle \frac{\lambda_{45}}{\lambda_{45}^2 - \lambda_{44} \lambda_{55}} \right\rangle; \quad \lambda_3 = \left\langle \frac{\lambda_{55}}{\lambda_{45}^2 - \lambda_{44} \lambda_{55}} \right\rangle.\tag{4.4}$$

На основе соотношений (1.2), (1.6), (4.2), (4.4) получим выражения для микронапряжений

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \left[ \lambda_{11} + \lambda_{13} \lambda_{33}^{-1} \left( \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} \langle \lambda_{13} \lambda_{33}^{-1} \rangle - \lambda_{13} \right) \right] \langle \varepsilon_{11} \rangle + \left[ \lambda_{12} + \lambda_{13} \lambda_{33}^{-1} \left( \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} \langle \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \rangle - \lambda_{23} \right) \right] \langle \varepsilon_{22} \rangle + \\
&\quad + \lambda_{13} \lambda_{33}^{-1} \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} \langle \varepsilon_{33} \rangle + 2 \left[ \lambda_{16} + \lambda_{13} \lambda_{33}^{-1} \left( \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} \langle \lambda_{36} \lambda_{33}^{-1} \rangle - \lambda_{36} \right) \right] \langle \varepsilon_{12} \rangle; \\
\sigma_{22} &= \left[ \lambda_{12} + \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \left( \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} \langle \lambda_{13} \lambda_{33}^{-1} \rangle - \lambda_{13} \right) \right] \langle \varepsilon_{11} \rangle + \left[ \lambda_{22} + \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \left( \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} \langle \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \rangle - \lambda_{23} \right) \right] \langle \varepsilon_{22} \rangle + \\
&\quad + \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} \langle \varepsilon_{33} \rangle + 2 \left[ \lambda_{26} + \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \left( \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} \langle \lambda_{36} \lambda_{33}^{-1} \rangle - \lambda_{36} \right) \right] \langle \varepsilon_{12} \rangle; \quad (4.5) \\
\sigma_{33} &= \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} \left( \langle \lambda_{13} \lambda_{33}^{-1} \rangle \langle \varepsilon_{11} \rangle + \langle \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \rangle \langle \varepsilon_{22} \rangle + \langle \varepsilon_{33} \rangle + 2 \langle \lambda_{36} \lambda_{33}^{-1} \rangle \langle \varepsilon_{12} \rangle \right); \\
\sigma_{12} &= \left[ \lambda_{16} + \lambda_{36} \lambda_{33}^{-1} \left( \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} \langle \lambda_{13} \lambda_{33}^{-1} \rangle - \lambda_{13} \right) \right] \langle \varepsilon_{11} \rangle + \left[ \lambda_{26} + \lambda_{36} \lambda_{33}^{-1} \left( \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} \langle \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \rangle - \lambda_{23} \right) \right] \langle \varepsilon_{22} \rangle + \\
&\quad + \lambda_{36} \lambda_{33}^{-1} \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} \langle \varepsilon_{33} \rangle + 2 \left[ \lambda_{66} + \lambda_{36} \lambda_{33}^{-1} \left( \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} \langle \lambda_{36} \lambda_{33}^{-1} \rangle - \lambda_{36} \right) \right] \langle \varepsilon_{12} \rangle; \\
\sigma_{13} &= \frac{2}{\lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_3} (\lambda_3 \langle \varepsilon_{13} \rangle + \lambda_2 \langle \varepsilon_{23} \rangle); \quad \sigma_{23} = \frac{2}{\lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_3} (\lambda_2 \langle \varepsilon_{13} \rangle + \lambda_1 \langle \varepsilon_{23} \rangle).
\end{aligned}$$

Осредняя выражения (4.5), получаем зависимости между макронапряжениями и макродеформациями

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_{11} \rangle &= \lambda_{11}^* \langle \varepsilon_{11} \rangle + \lambda_{12}^* \langle \varepsilon_{22} \rangle + \lambda_{13}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle + 2 \lambda_{16}^* \langle \varepsilon_{12} \rangle; \\
\langle \sigma_{22} \rangle &= \lambda_{12}^* \langle \varepsilon_{11} \rangle + \lambda_{22}^* \langle \varepsilon_{22} \rangle + \lambda_{23}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle + 2 \lambda_{26}^* \langle \varepsilon_{12} \rangle; \\
\langle \sigma_{33} \rangle &= \lambda_{13}^* \langle \varepsilon_{11} \rangle + \lambda_{23}^* \langle \varepsilon_{22} \rangle + \lambda_{33}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle + 2 \lambda_{36}^* \langle \varepsilon_{12} \rangle; \quad (4.6) \\
\langle \sigma_{12} \rangle &= \lambda_{16}^* \langle \varepsilon_{11} \rangle + \lambda_{26}^* \langle \varepsilon_{22} \rangle + \lambda_{36}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle + 2 \lambda_{66}^* \langle \varepsilon_{12} \rangle; \\
\langle \sigma_{13} \rangle &= 2 \lambda_{55}^* \langle \varepsilon_{13} \rangle + 2 \lambda_{45}^* \langle \varepsilon_{23} \rangle; \quad \langle \sigma_{23} \rangle = 2 \lambda_{45}^* \langle \varepsilon_{13} \rangle + 2 \lambda_{44}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle,
\end{aligned}$$

где эффективные постоянные определяются формулами

$$\begin{aligned}
\lambda_{11}^* &= \langle \lambda_{11} \rangle + \langle \lambda_{13} \lambda_{33}^{-1} \rangle^2 \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} - \langle \lambda_{13}^2 \lambda_{33}^{-1} \rangle; \\
\lambda_{12}^* &= \langle \lambda_{12} \rangle + \langle \lambda_{13} \lambda_{33}^{-1} \rangle \langle \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \rangle \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} - \langle \lambda_{13} \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \rangle; \\
\lambda_{13}^* &= \langle \lambda_{13} \lambda_{33}^{-1} \rangle \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1}; \quad \lambda_{16}^* = \langle \lambda_{16} \rangle + \langle \lambda_{13} \lambda_{33}^{-1} \rangle \langle \lambda_{36} \lambda_{33}^{-1} \rangle \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} - \langle \lambda_{13} \lambda_{36} \lambda_{33}^{-1} \rangle; \\
\lambda_{22}^* &= \langle \lambda_{22} \rangle + \langle \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \rangle^2 \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} - \langle \lambda_{23}^2 \lambda_{33}^{-1} \rangle; \quad \lambda_{23}^* = \langle \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \rangle \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1}; \quad \lambda_{33}^* = \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1}; \\
\lambda_{26}^* &= \langle \lambda_{26} \rangle + \langle \lambda_{36} \lambda_{33}^{-1} \rangle \langle \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \rangle \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} - \langle \lambda_{36} \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \rangle; \quad (4.7)
\end{aligned}$$

$$\lambda_{36}^* = \langle \lambda_{36} \lambda_{33}^{-1} \rangle \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1}; \quad \lambda_{66}^* = \langle \lambda_{66} \rangle + \langle \lambda_{36} \lambda_{33}^{-1} \rangle^2 \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} - \langle \lambda_{36}^2 \lambda_{33}^{-1} \rangle;$$

$$\lambda_{44}^* = \frac{\lambda_1}{\lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_3}; \quad \lambda_{45}^* = \frac{\lambda_2}{\lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_3}; \quad \lambda_{55}^* = \frac{\lambda_3}{\lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_3}.$$

Если обозначить объемные содержания и модули упругости наполнителя, матричного материала и межфазных слоев соответственно  $c_\nu$ ,  $\lambda_{11\nu}$ ,  $\lambda_{12\nu}$ ,  $\lambda_{13\nu}$ ,  $\lambda_{16\nu}$ ,  $\lambda_{22\nu}$ ,  $\lambda_{23\nu}$ ,  $\lambda_{33\nu}$ ,  $\lambda_{36\nu}$ ,  $\lambda_{66\nu}$ ,  $\lambda_{44\nu}$ ,  $\lambda_{45\nu}$ ,  $\lambda_{55\nu}$  ( $\nu = 1, 2, 3$ ), то эффективные модули упругости (4.7) слоистого КМ будут определяться формулами

$$\begin{aligned} \lambda_{11}^* &= \sum_{\nu=1}^3 c_\nu \lambda_{11\nu} + \left( \sum_{\nu=1}^3 \frac{c_\nu \lambda_{13\nu}}{\lambda_{33\nu}} \right)^2 \left( \sum_{\nu=1}^3 \frac{c_\nu}{\lambda_{33\nu}} \right)^{-1} - \left( \sum_{\nu=1}^3 \frac{c_\nu \lambda_{13\nu}^2}{\lambda_{33\nu}} \right); \\ \lambda_{12}^* &= \sum_{\nu=1}^3 c_\nu \lambda_{12\nu} + \left( \sum_{\nu=1}^3 \frac{c_\nu \lambda_{13\nu}}{\lambda_{33\nu}} \right) \left( \sum_{\nu=1}^3 \frac{c_\nu \lambda_{23\nu}}{\lambda_{33\nu}} \right) \left( \sum_{\nu=1}^3 \frac{c_\nu}{\lambda_{33\nu}} \right)^{-1} - \left( \sum_{\nu=1}^3 \frac{c_\nu \lambda_{13\nu} \lambda_{23\nu}}{\lambda_{33\nu}} \right); \\ \lambda_{13}^* &= \left( \sum_{\nu=1}^3 \frac{c_\nu \lambda_{13\nu}}{\lambda_{33\nu}} \right) \left( \sum_{\nu=1}^3 \frac{c_\nu}{\lambda_{33\nu}} \right)^{-1}; \\ \lambda_{16}^* &= \sum_{\nu=1}^3 c_\nu \lambda_{16\nu} + \left( \sum_{\nu=1}^3 \frac{c_\nu \lambda_{13\nu}}{\lambda_{33\nu}} \right) \left( \sum_{\nu=1}^3 \frac{c_\nu \lambda_{36\nu}}{\lambda_{33\nu}} \right) \left( \sum_{\nu=1}^3 \frac{c_\nu}{\lambda_{33\nu}} \right)^{-1} - \left( \sum_{\nu=1}^3 \frac{c_\nu \lambda_{13\nu} \lambda_{36\nu}}{\lambda_{33\nu}} \right); \\ \lambda_{22}^* &= \sum_{\nu=1}^3 c_\nu \lambda_{22\nu} + \left( \sum_{\nu=1}^3 \frac{c_\nu \lambda_{23\nu}}{\lambda_{33\nu}} \right)^2 \left( \sum_{\nu=1}^3 \frac{c_\nu}{\lambda_{33\nu}} \right)^{-1} - \left( \sum_{\nu=1}^3 \frac{c_\nu \lambda_{23\nu}^2}{\lambda_{33\nu}} \right); \\ \lambda_{23}^* &= \left( \sum_{\nu=1}^3 \frac{c_\nu \lambda_{23\nu}}{\lambda_{33\nu}} \right) \left( \sum_{\nu=1}^3 \frac{c_\nu}{\lambda_{33\nu}} \right)^{-1}; \quad \lambda_{33}^* = \left( \sum_{\nu=1}^3 \frac{c_\nu}{\lambda_{33\nu}} \right)^{-1}; \\ \lambda_{26}^* &= \sum_{\nu=1}^3 c_\nu \lambda_{26\nu} + \left( \sum_{\nu=1}^3 \frac{c_\nu \lambda_{23\nu}}{\lambda_{33\nu}} \right) \left( \sum_{\nu=1}^3 \frac{c_\nu \lambda_{36\nu}}{\lambda_{33\nu}} \right) \left( \sum_{\nu=1}^3 \frac{c_\nu}{\lambda_{33\nu}} \right)^{-1} - \left( \sum_{\nu=1}^3 \frac{c_\nu \lambda_{23\nu} \lambda_{36\nu}}{\lambda_{33\nu}} \right); \\ \lambda_{36}^* &= \left( \sum_{\nu=1}^3 \frac{c_\nu \lambda_{36\nu}}{\lambda_{33\nu}} \right) \left( \sum_{\nu=1}^3 \frac{c_\nu}{\lambda_{33\nu}} \right)^{-1}; \quad \lambda_{66}^* = \sum_{\nu=1}^3 c_\nu \lambda_{66\nu} + \left( \sum_{\nu=1}^3 \frac{c_\nu \lambda_{36\nu}}{\lambda_{33\nu}} \right)^2 \left( \sum_{\nu=1}^3 \frac{c_\nu}{\lambda_{33\nu}} \right)^{-1} - \left( \sum_{\nu=1}^3 \frac{c_\nu \lambda_{36\nu}^2}{\lambda_{33\nu}} \right); \\ \lambda_1 &= \sum_{\nu=1}^3 \frac{c_\nu \lambda_{44\nu}}{\lambda_{45\nu}^2 - \lambda_{44\nu} \lambda_{55\nu}}; \quad \lambda_2 = \sum_{\nu=1}^3 \frac{c_\nu \lambda_{45\nu}}{\lambda_{45\nu}^2 - \lambda_{44\nu} \lambda_{55\nu}}; \quad \lambda_3 = \sum_{\nu=1}^3 \frac{c_\nu \lambda_{55\nu}}{\lambda_{45\nu}^2 - \lambda_{44\nu} \lambda_{55\nu}}; \\ \lambda_{44}^* &= \frac{\lambda_1}{\lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_3}; \quad \lambda_{45}^* = \frac{\lambda_2}{\lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_3}; \quad \lambda_{55}^* = \frac{\lambda_3}{\lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_3}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

### §5. Численные результаты.

Численное исследование влияния несовершенных условий контакта компонентов на эффективные упругие свойства слоистых КМ стохастической структуры проведено для контактирующих слоев из алюмоборосиликатного стекла и отвержденного эпоксидного связующего, которые разделены межфазными слоями. Межфазные слои рас-

сматриваются как третий компонент, состоящий из аппретирующих покрытий, приповерхностных частей матрицы и наполнителя, а также дефектов в виде микротрещин и микропор. Так как некоторая часть материала в окрестности микротрещины не несет нагрузку, то микротрещины моделируются микропорами

Упругие модули объемного сжатия и сдвига компонентов принимаем соответственно [1] такими:

$$K_c = 33,333 \text{ ГПа}; \mu_c = 25 \text{ ГПа}; K_s = 3,333 \text{ ГПа}; \mu_s = 1,111 \text{ ГПа}. \quad (5.1)$$

Для обеспечения равномерной передачи усилий аппретирующее покрытие целесообразно применять с модулями упругости, промежуточными между соответствующими модулями матрицы и наполнителя. Поэтому в безразмерных единицах, представляющих отношения соответствующих модулей к модулю сдвига матрицы  $\mu_s$ , принимаем такие значения:

$$K_1 = 30; \mu_1 = 22,5; K_2 = 3; \mu_2 = 1; K_0 = 16,5; \mu_0 = 11,75. \quad (5.2)$$

где  $K_0, \mu_0$  – соответственно модули объемного сжатия и сдвига материала межфазного слоя без микропор. Соответствующие модули межфазного слоя с пористостью  $p$  определяются формулами [19]

$$K_3 = \frac{4K_0\mu_0 + (1-p)^2}{4\mu_0 + (3K_0 - 4\mu_0)p}; \quad \mu_3 = \frac{\mu_0(9K_0 + 8\mu_0)(1-p)^2}{9K_0 + 8\mu_0 - (3K_0 - 4\mu_0)p}. \quad (5.3)$$

Объемные содержания наполнителя, связующего и пористого межфазного слоя обозначаем соответственно  $c_1, c_2, c_3$ . При этом будем пользоваться соотношением

$$c_3 = (h_3 / h_1) c_1, \quad (5.4)$$

где  $h_1, h_3$  – соответственно толщины слоев наполнителя и межфазных слоев. В вычислениях принято  $h_3 / h_1 = 0,01$ .

На рис. 1 – 5 представлены зависимости эффективных модулей упругости  $k^*, m^*, \mu^*, \lambda_{13}^*, \lambda_{33}^*$  от объемного содержания слоев наполнителя  $c_1$  при заданных пористостях  $p$  межфазных слоев. Вычисления проведены на основе формул (2.8), (5.1) – (5.4) для случая изотропных компонентов слоистого КМ. Здесь объемное содержание наполнителя  $c_1$  находится в допустимом интервале  $0 \leq c_1 \leq 0,99$  согласно (5.4).

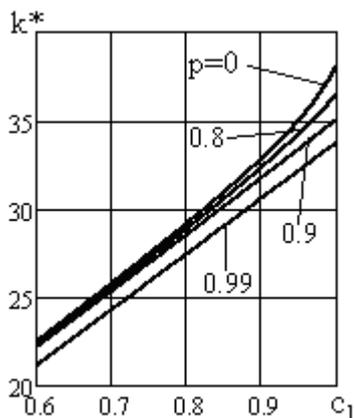


Рис. 1

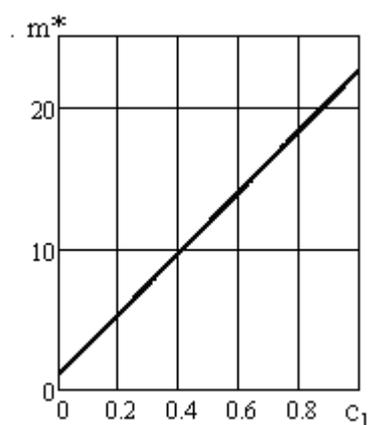


Рис. 2

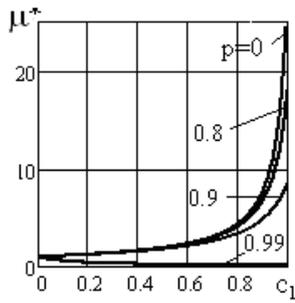


Рис. 3

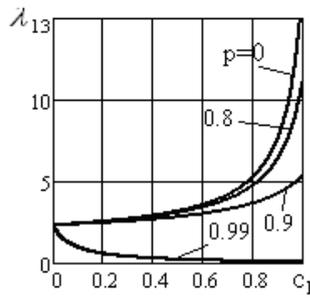


Рис. 4

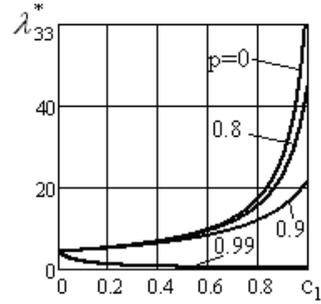


Рис. 5

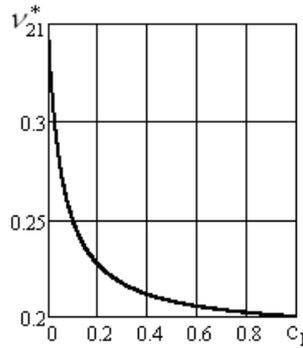


Рис. 6

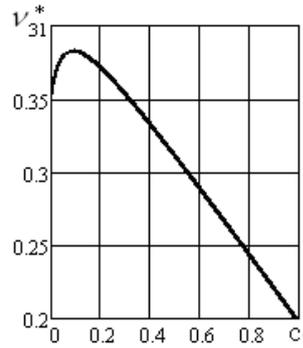


Рис. 7

На рис. 6, 7 приведены зависимости эффективных поперечного  $\nu_{21}^*$  и продольного  $\nu_{31}^*$  коэффициентов Пуассона от объемного содержания наполнителя  $c_1$ , вычисленных согласно формул

$$\nu_{21}^* = \frac{(k^* - m^*)\lambda_{33}^* - \lambda_{13}^{*2}}{(k^* + m^*)\lambda_{33}^* - \lambda_{13}^{*2}}; \quad \nu_{31}^* = \frac{2m^*\lambda_{13}^{*2}}{(k^* + m^*)\lambda_{33}^* - \lambda_{13}^{*2}}. \quad (5.5)$$

Анализ зависимостей эффективных модулей упругости от объемного содержания наполнителя  $c_1$  и пористости межфазных слоев  $p$  позволяет сделать следующие выводы. Увеличение пористости  $p$  межфазных слоев, эквивалентно уменьшению адгезии, приводит к уменьшению эффективных модулей  $k^*$ ,  $\mu^*$ ,  $\lambda_{13}^*$ ,  $\lambda_{33}^*$ . При этом с ростом объемного содержания наполнителя  $c_1$  модуль  $k^*$  растет при произвольных значениях пористости  $p$  межфазных слоев. В то же время модули  $\mu^*$ ,  $\lambda_{13}^*$ ,  $\lambda_{33}^*$  растут с ростом  $c_1$  лишь в интервалах пористостей соответственно  $0 \leq p \leq 0,97046$ ,  $0 \leq p \leq 0,94115$ ,  $0 \leq p \leq 0,961713$ . Для более высоких значений пористости значения соответствующих модулей уменьшаются с ростом  $c_1$ . Однако поперечный модуль сдвига  $m^*$  является исключением из отмеченных закономерностей, его значения не зависят от пористости  $p$  межфазных слоев для всех  $c_1$ .

Кривые зависимостей эффективных коэффициентов Пуассона  $\nu_{21}^*$ ,  $\nu_{31}^*$  от объемного содержания наполнителя  $c_1$  имеют соответственно монотонный и немонотонный характер. При этом они не зависят от пористости  $p$  межфазных слоев.

### Заклучение.

Создание КМ с определенными характеристиками жесткости и прочности путем соединения в монолит матрицы и системы армирующих элементов (наполнителя) наряду с выбором компонентов с необходимыми свойствами требует обеспечения надлежащего сцепления на границе их раздела, обеспечивающего нагружение наполнителя посредством передачи напряжений через матрицу. Идеальное сцепление или совершенный контакт компонентов на границе раздела описывается непрерывностью перемещений и поверхностных напряжений. В действительности при контакте двух различных веществ, имеющих разную атомно-молекулярную структуру и разную природу внутренней связи, происходит искажение их структуры в некоторой переходной зоне. Кроме этого, свой вклад в размеры переходной зоны вносят аппретирующие покрытия, вносимые для усиления сцепления компонентов, а также возможные образования микротрещин и микропор в процессе изготовления и эксплуатации КМ. Это свидетельствует о том, что контактирующие компоненты в КМ разделены не поверхностью, а некоторым межфазным слоем с дефектами в виде макротрещин и микропор, который можно рассматривать как третий компонент (фазу). При этом на поверхностях раздела межфазных слоев с матрицей и наполнителем выполняются условия совершенного контакта в виде непрерывности перемещений и поверхностных напряжений. В случае стохастически неоднородного КМ слоистой структуры с произвольным числом компонентов модули упругости зависят от одной координаты. При однородных микронапряжениях и макродеформациях флуктуации перемещений, напряжения и деформации также будут функциями одной переменной. В этом случае задача о напряженно-деформированном состоянии и эффективных свойствах КМ имеет точное аналитическое решение, на основе чего исследована зависимость эффективных модулей упругости от объемного содержания наполнителя и пористости межфазного слоя.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто задачу про ефективні пружні властивості шаруватого композитного матеріалу з недосконалими умовами контакту шарів наповнювача і матриці у вигляді наявності міжфазних пористих шарів, які розглядаються як третій компонент. На площинах розділу міжфазного шару з шарами наповнювача і матриці виконуються умови досконалого контакту у вигляді неперервності переміщень і поверхневих напружень. В основу покладено стохастичні рівняння пружності для структурно неоднорідного матеріалу, де тензор модулів пружності є випадковою функцією однієї координати і задача про ефективні пружні властивості має точний розв'язок. Досліджено залежність ефективних модулів пружності від об'ємного вмісту наповнювача і пористості міжфазних шарів.

1. Крегерс А.Ф. Математическое моделирование термического расширения пространственно армированных композитов // Механика композит. материалов. – 1988. – № 3. – С. 433 – 441.
2. Монокристалльные волокна и армированные ими материалы / Под редакцией А.Т. Туманова. – М.: Мир, 1973. – 464 с.
3. Современные композиционные материалы / Под редакцией Л.Браутмана и Р.Крока. – М.: Мир, 1970. – 672 с.
4. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. – М.: Наука, 1977. – 400 с.
5. Achenbach J.D., Zhu H. Effect of interfacial zone on mechanical behavior and failure of fiber-reinforced composites // J. Mech. Phys. Solids. – 1989. – 37. – P. 381 – 393.
6. Benveniste Y. The effective mechanical behavior of composite materials with imperfect contact between the constituents // Mech. Mater. – 1985. – 4. – P. 197 – 208.
7. Benveniste Y., Miloh T. Imperfect soft and stiff interfaces in two-dimensional elasticity // Mech. Mater. – 2001. – 33. – P. 309 – 323.
8. Bogdanov V.L., Guz A.N., Nazarenko V.M. Nonclassical Problems in the Fracture Mechanics of Composites with Interacting Cracks // Int. Appl. Mech. – 2015. – 51, N 1. – P. 64 – 84.
9. Gu S.T. He Q.C. Interfacial discontinuity relations for coupled multifield phenomena and their application to the modeling of thin interphase as imperfect interfaces // J. Mech. Phys. – 2011. – 59. – P. 1413 – 1426.

10. Gu S.T., Liu J.T., He Q.C. Size-dependent effective elastic moduli of particulate composites with interfacial displacement and traction discontinuities // *Int. J. Solids Struct.* – 2014. – **51**. – P. 2283 – 2296.
11. Guz A.N., Guz I.A., Men'shikov A.V., Men'shikov V.A. Three-Dimensional Problems in the Dynamic Fracture Mechanics of Material with Interface Cracks (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2013. – **49**, N 1. – P. 1 – 61.
12. Guz A.N., Rushchitsky J.J., Guz I.A. Establishing Fundamentals of the Mechanics of Nanocomposites // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, N 3. – P. 247 – 271.
13. Hashin Z. Thermoelastic properties of fiber composites with imperfect interface // *Mech. Mater.* – 1990. – **8**. – P. 333 – 348.
14. Hashin Z. Thin interphase imperfect interface in elasticity with application to coated fiber composites // *J. Mech. Phys. Solids.* – 2002. – **50**. – P. 2509 – 2537.
15. Khoroshun L.P. Statistical Theory of Deformation of Unidirectional Fibrous Materials // *Int. Appl. Mech.* – 1968. – **4**, N 7. – P. 5 – 9.
16. Khoroshun L.P. Elastic Properties of Materials Reinforced by Unidirectional Short Fibers // *Int. Appl. Mech.* – 1972. – **8**, N 12. – P. 1358 – 1363.
17. Khoroshun L.P. Prediction of Thermoelastic Properties of Materials Strengthened by Unidirectional Discrete Fibers // *Int. Appl. Mech.* – 1974. – **10**, N 12. – P. 1288 – 1293.
18. Khoroshun L.P. Methods of Random Functions in Problems of Macroscopic Properties of Microheterogeneous Media // *Int. Appl. Mech.* – 1978. – **14**, N 2. – P. 113 – 124.
19. Khoroshun L.P. Effective Elastic Properties of Unidirectional Fibrous Composite Materials with Interfacial Defects // *Int. Appl. Mech.* – 2018. – **54**, N 6. – P. 628 – 641.
20. Nazarenko L., Stolarski H., Altenbach H. A model of cylindrical inhomogeneity with spring layer interface and its application to analysis of short-fiber composites // *Composite Structures.* – 2017. – **160**. – P. 635 – 652.
21. Nazarenko L., Stolarski H., Khoroshun L., Altenbach H. Effective thermo-elastic properties of random composites with orthotropic and aligned ellipsoidal inhomogeneities // *Int. J. Solids Struct.* – 2018. – **136 – 137**. – P. 220 – 240.
22. Sangani A.S., Mo G. Elastic interactions in particulate composites with perfect as well as imperfect interfaces // *J. Mech. Phys. Solids.* – 1997. – **45**. – P. 2001 – 2031.
23. Shen L., Li J. Homogenization of a fibre/sphere with an inhomogeneous interphase for the effective elastic moduli of composites // *Proc. Roy. Soc. London.* – 2005. – **A461**. – P.1475 – 1504.

Поступила 28.12.2017

Утверждена в печать 05.03.2019