

А. Н. Гузь

**НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ:
К 50-ЛЕТИЮ ИССЛЕДОВАНИЙ (ОБЗОР). I.**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. П.Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: guz@carrier.kiev.ua*

Abstract. An analysis of main results on investigation of some nonclassical problems of fracture and failure mechanics is considered. Results under consideration were obtained by author and his pupils in the department of dynamics and stability of continuum of the S.P.Timoshenko Institute of Mechanics of the National academy of sciences of Ukraine (NASU) during last 50 years.

Nonclassical problems of fracture and failure mechanics are defined as ones in which the approaches and criteria of classical fracture and failure mechanics are inapplicable. Distinguishing feature of results of author and his pupils is application of the 3D (three-dimensional) theories of stability, dynamics and statics of solid mechanics to investigation of nonclassical problems of fracture and failure mechanics. Vast majority of others authors practises various approximate theories of shells, plates and rods and others approximate approaches to investigation of nonclassical problems of fracture and failure mechanics.

Main scientific results in the *eight* nonclassical problems of fracture and failure mechanics obtained in the framework of above mentioned approach (3D theories of solid mechanics) are presented in very short form. Principal attention is directed to problems statement with the analysis of corresponding experiments, development of the method of solution in the framework of approach under consideration and discussion of final results. In view of it the mathematical aspect of methods of solution under consideration and their computer-aided realization are not discussed in this review paper, information on this subject is presented as annotation in short form.

Next *eight* nonclassical problems of fracture and failure mechanics (results of author and his pupils) are considered in this review paper:

the first problem – fracture of composites compressed along reinforcing elements;

the second problem – model of short fibers in stability and fracture of composites under compression;

the third problem – end-crush fracture of composites under compression along reinforcing elements;

the fourth problem – brittle fracture of cracked materials with initial (residual) stresses acting along cracks;

the fifth problem – separation into slender parts of composites under tension or compression along reinforcing elements;

the sixth problem – fracture of materials under compression along parallel cracks;

the seventh problem – brittle fracture of cracked materials under dynamical loads (with contact interaction of crack faces);

the eighth problem – fracture of thin-walled cracked bodies under tension with prebuckling.

About **523** monographs and main papers published by author and his pupils on the eight nonclassical problems of fracture and failure mechanics under consideration are included in the list of literature to this review paper.

The total review paper includes three parts. The first part has a subtitle: General problems; this part is publishing in the journal «Prikladnaya Mekhanika» (**55**, № 2, 2019). The second part has a subtitle: Compressive failure of composite materials. The third part has a subtitle: Others nonclassical problems of fracture mechanics.

Key words: nonclassical problems of fracture and failure mechanics; investigation during last 50 years; author and his pupils; S.P.Timoshenko Institute of Mechanics; department of dynamics and stability of continuum.

Предисловие.

Настоящая обзорная статья посвящена краткому описанию и соответствующему анализу основных результатов по неклассическим проблемам механики разрушения, полученных автором статьи и его учениками за последние 50 лет в отделе динамики и устойчивости сплошных сред Института механики им. С.П.Тимошенко НАНУ.

Обсуждаемая обзорная статья разделена на три части. Первая часть имеет подзаголовок «**Общие вопросы**» и публикуется в журнале «Прикладная механика» (55, № 2, 2019); в первую часть включены Введение и §§1 и 2. Вторая часть имеет подзаголовок «**Разрушение композитных материалов при сжатии**»; во вторую часть включены §§3 – 5. Третья часть имеет подзаголовок «**Другие неклассические проблемы механики разрушения**»; в третью часть включены §§6 – 10 и список литературы, который является общим для всех трех частей.

Во всей обзорной статье (§§1 – 10) для всех формул, рисунков, Примечаний и Таблиц принята двойная нумерация (в пределах каждого параграфа); при этом первый номер соответствует номеру параграфа и второй номер (после точки) соответствует номеру объекта в пределах рассматриваемого параграфа. Таким образом, можно рассматривать результаты каждого параграфа практически независимо от других параграфов, ориентируясь на список литературы, который является общим для всей статьи и который представлен в третьей части статьи.

1. Введение.

В настоящее время повсеместно признано, что фундаментальная работа А.А.Griffith [276] за 1920 г. определила начало нового научного направления в естествознании и технике – механику разрушения, которая является одним из наиболее активно разрабатываемых направлений фундаментального и прикладного характера в механике во второй половине XX века и в начале XXI века. Обсуждаемое направление по актуальности, фундаментальности и приложимости к инженерному делу в *механике* в наше время может быть сравнимо, по-видимому, лишь с механикой композитов. Подтверждением вышеизложенному соображению может служить тот факт, что в середине второй половины XX века созданы две восьмитомные коллективные фундаментальные монографии энциклопедического характера: монография [127] посвящена проблемам композитных материалов, в том числе и механике композитов; монография [160] посвящена проблемам разрушения материалов, в том числе и механике разрушения.

За почти 100-летнее развитие механики разрушения в многочисленных научных центрах различных государств всего мира, начиная с 1920 г., исследованы и в настоящее время активно рассматриваются различные проблемы механики разрушения; по результатам исследований опубликованы сотни монографий и десятки тысяч статей. Следует отметить, что исследуемые проблемы механики разрушения можно разделить на классические и неклассические проблемы; при этом в настоящее время классические проблемы механики разрушения уже сравнительно подробно исследованы и разработаны, что вызвало у ряда ученых соображение о назревшем кризисе в обсуждаемом научном направлении, а неклассические проблемы механики разрушения остались сравнительно недостаточно исследованными и разработанными, что, по-видимому, сохранится и в ближайшие годы в силу многочисленности отмеченных проблем. При кратком рассмотрении неклассические проблемы механики разрушения можно определить как проблемы, к анализу и исследованию которых неприменимы подходы и критерии классических проблем механики разрушения; более подробно и последовательно вопрос о разделении проблем механики разрушения на классические и неклассические проблемы рассмотрен в §1 настоящей обзорной статьи.

В отделе динамики и устойчивости сплошных сред Института механики им. С.П.Тимошенко Национальной академии наук Украины (НАНУ) уже более 50 лет автор настоящей обзорной статьи вместе с учениками занимаются исследованием ряда неклассических проблем механики разрушения. Первыми публикациями в этом научном направлении были статьи [25, 26] автора за 1969 г., относящиеся к одной из неклассических проблем механики разрушения, хотя результаты статьи [26] были фактически опубликованы в статье [278] за 1967 г. применительно к ортотропному упругому телу, которым в континуальном приближении моделируется композитный материал.

В последующие 50 лет в отделе динамики и устойчивости сплошных сред активно занимались исследованием ряда неклассических проблем механики разрушения; основные результаты были получены по *восемью* неклассическим проблемам механики разрушения, которые в краткой форме перечислены в §1 настоящей обзорной статьи. В связи с вышеизложенным предлагаемая читателям обзорная статья посвящена достаточно кратко анализу обсуждаемых результатов; причем статья подготовлена с учетом соображений по стилю представления материала, которые изложены ниже в настоящем Введении. Целесообразно отметить, что в список литературы к настоящей обзорной статье включены около **523** монографий и основных публикаций в научных журналах и в трудах международных конференций, опубликованных автором статьи и его учениками; кроме того, по полученным результатам защищены **14** диссертаций на степень доктора физико-математических или технических наук (DSc). Таким образом, можно считать, что сравнительно краткий стиль изложения и обсуждения результатов, полученных в отделе динамики и устойчивости сплошных сред, частично предопределен вышеуказанным количеством публикаций и защищенных докторских диссертаций.

Кроме того, как представляется автору, результаты по неклассическим проблемам механики разрушения, представленные в научных статьях и монографиях, в силу традиционных соображений о стиле изложения научных результатов фундаментального характера в механике изложены в форме, которая хорошо воспринимается представителями отдельных научных направлений и не всегда является достаточно информативной для широкого круга специалистов по проблемам разрушения. Следует отметить, что проблемами разрушения занимаются представители различных научных направлений, включая механику, физику, материаловедение и т.д., а также представители многочисленных научно-технических направлений, занимающихся разработкой различных аспектов инженерного дела. В связи с этим, по-видимому, весьма актуальным вопросом является представление результатов по неклассическим проблемам механики разрушения в форме, которая была бы достаточно информативной для широкого круга специалистов, интересующихся различными фундаментальными и прикладными аспектами проблемы разрушения. В то же время вышеотмеченное представление должно включать основные аспекты рассматриваемых проблем (неклассичность рассматриваемых механизмов разрушения, строгость описания, анализ основных подходов и полученных результатов, описание новых эффектов механического характера и т.д.). Вполне очевидно, что при попытке реализации вышеуказанного стиля изложения результатов по неклассическим проблемам механики разрушения необходимо отказаться от подробной информации по сугубо математическим аспектам методов решения и от чрезмерной насыщенности конкретными результатами в виде многочисленных графиков и таблиц.

Таким образом, *цель* настоящей обзорной статьи можно определить следующим образом – *краткое описание и соответствующий анализ основных результатов по неклассическим проблемам механики разрушения, полученных автором статьи и его учениками за последние 50 лет в отделе динамики и устойчивости сплошных сред Института механики им. С.П.Тимошенко НАНУ, с привлечением вышеотмеченного стиля написания обзорных статей.* В этом случае основное внимание уделяется постановке задач с анализом соответствующих экспериментов, разработке метода решения при рассматриваемом подходе и обсуждению конечных результатов; в связи с этим математические аспекты рассматриваемых методов решения и их компьютерная реализация не обсуждаются в настоящей обзорной статье, информация об этих вопросах представлена в краткой форме в виде аннотаций.

Стремление подготовить обзорные статьи по неклассическим проблемам механики разрушения, основываясь на результатах автора и его учеников и придерживаясь вышеуказанного стиля обзорных статей, сформировалось при подготовке заказного доклада [318] для симпозиума IUTAM (Cambridge, UK, 1995 г.), при подготовке статьи [325] для энциклопедии по разрушению [273] (USA, 1998 г.), при чтении лекций в Yıldiz Technical University (Стамбул, март 1998 г.) и в Институте механики (Ханой, декабрь 1998 г.) и при докладе на семинаре в University of Technology (Вена, декабрь 1999 г.). Вышеуказанный подход был частично реализован в лекциях [329], которые можно считать началом работы по формированию обзорных статей по неклассическим проблемам механики разрушения (в основном, по публикациям автора и его учеников) в рамках вышеуказанного стиля подготовки обзорных статей.

В последующие годы с учетом принятого *стиля* подготовки обзорных статей были подготовлены и опубликованы обзорные статьи по неклассическим проблемам механики разрушения (в основном по работам автора и его учеников), например, [336] в 2000 г., [350] в 2009 г. и [59] в 2014 г., а также ряд других. Причем статья [350] в виде ее сокращенного варианта [347] была также опубликована в журнале «ANNALS. THE EUROPEAN ACADEMY OF SCIENCES» в связи с награждением автора медалью (the 2007 BLAISE PASCAL MEDAL in Materials Sciences of the EAS). Таким образом, статья [347] может рассматриваться как расширенная PASCAL MEDAL LECTURE, обычно принятая Pascal Medals Lecture (written presentation) опубликована [349] в журнале «Прикладная механика».

Все же необходимо отметить, что обзорные вышеуказанные статьи [336, 350, 59, 347] по неклассическим проблемам механики разрушения, хотя и подготовлены в рамках обсуждаемого *стиля* обзорных статей, но относятся или к отдельным неклассическим проблемам, или к меньшему периоду времени. В связи с этим публикацию настоящей обзорной статьи по неклассическим проблемам механики разрушения (в основном по результатам автора и его учеников *за последние 50 лет*), подготовленную в соответствии с обсуждаемым *стилем*, можно считать вполне целесообразной; безусловно при подготовке настоящей статьи были также использованы обзорные статьи [336, 350, 59, 347] и ряд других.

Примечание. В настоящей обзорной статье лишь §2 не соответствует обсуждаемому *стилю* изложения результатов. Так, в §2 изложен математический аппарат трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел в весьма краткой форме с учетом основных соотношений. Указанное исключение связано с тем, что в *пяти* проблемах (1, 2, 3, 4 и 6) из восьми рассматриваемых в настоящей статье проблем применяется трехмерная линеаризованная теория устойчивости деформируемых тел. В то же время указанная теория устойчивости является менее известной и менее широко применяемой по сравнению с другими разделами механики деформируемых тел.

Дополнительно отметим некоторые особенности терминологии, которая используется в механике применительно к исследованию явлений разрушения материалов и элементов конструкций. Под «fracture» понимается разрушение, которое определяется распространением одной или нескольких трещин; при этом «fracture mechanics» занимается исследованием разрушения материалов или элементов конструкций, которое также определяется распространением одной или нескольких трещин. Под «failure» понимается разрушение, которое определяется исчерпанием несущей способности материала или элемента конструкции и, в основном, проявляется не только в распространении одиночных трещин; при этом «failure mechanics» занимается исследованием разрушения материалов и элементов конструкций, которое также определяется исчерпанием несущей способности материалов и элементов конструкций и проявляется, в основном, не только в распространении одиночных трещин. Под «damage» понимается разрушение, которое проявляется в накоплении повреждений в виде диффузно расположенных развивающихся или зарождающихся трещин или других повреждений; при этом «damage mechanics» занимается исследованием закономерностей (кинетики) накопления повреждений, в основном, в рамках различных континуальных представлений с привлечением определенным образом выбранного «damage indicator». Безусловно, вышеизложенная классификация является достаточно условной и в то же время достаточно полезной и информативной, с точки зрения автора настоящей статьи, при анализе различных результатов в механике разрушения в широком смысле этого термина. Так, например, результаты по неклассическим проблемам механики разрушения материалов, которые анализируются в настоящей обзорной статье, относятся к fracture mechanics и к failure mechanics, которые в тексте статьи разделять не будем.

Целесообразно подчеркнуть, что научные результаты по неклассическим проблемам механики разрушения, полученные за последние 50 лет в отделе динамики и устойчивости сплошных сред Института механики им. С.П.Тимошенко Национальной академии наук Украины (НАНУ), краткий анализ которых при выбранном *стиле* изложения приведен в настоящей обзорной статье, по-видимому, *в достаточной мере представлены мировому научному сообществу*. Подтверждением вышеуказанного

соображения являются сведения, которые можно получить при анализе списка литературы к настоящей обзорной статье; как уже отмечалось в настоящем Введении, в список литературы входит 523 монографии и основные публикации в научных журналах и в трудах международных конференций, принадлежащих автору статьи и его ученикам. Из анализа указанных публикаций следуют три вывода.

1. Из отмеченных 523 публикаций 38 статей опубликовано в журнале «ДАН СССР», который переводился на английский язык и был одним из самых авторитетных научных журналов.

2. Из отмеченных 523 публикаций 320 статей опубликовано в англоязычных научных журналах.

3. Из отмеченных 523 публикаций 53 сообщения опубликовано в трудах международных конгрессов, конференций и симпозиумов, которые соответствуют докладам на этих международных форумах.

Сведения, изложенные в настоящем Введении, относятся ко всем рассматриваемым *восемью* неклассическим проблемам механики разрушения, что дает возможность избежать определенного повторения применительно к каждой проблеме.

§1. Разделение на классические и неклассические проблемы механики разрушения.

В настоящем параграфе в сравнительно последовательной и четкой форме представлено разделение проблем механики разрушения на классические и неклассические проблемы, достаточно кратко сформулированы *восемь* неклассических проблем механики разрушения (предмет исследований в отделе динамики и устойчивости сплошных сред Института механики им. С.П.Тимошенко НАНУ) и приведены примеры исследований ситуаций, которые не могут быть отнесены к неклассическим проблемам механики разрушения. Следует отметить, что исследование неклассических проблем механики разрушения требует и развитие не только новых подходов и критериев разрушения, но и разработку новых методов исследования; в случае же применения методов исследования, характерных для классических проблем механики, можно получить физически некорректные результаты, что обсуждено в статье [351].

Целесообразно также отметить, что рассматриваемая в настоящем параграфе классификация проблем механики разрушения с четким выделением классических и неклассических проблем, по-видимому, впервые была опубликована в 1990 г. и изложена во Введении в 4-х томную (в 5-и книгах) монографию [154], которая посвящена изложению результатов по неклассическим проблемам механики разрушения, полученным на то время в Институте механики им. С.П.Тимошенко НАНУ; отмеченное Введение относится ко всей коллективной монографии и помещено в т. 1.

1.1. Классические проблемы механики разрушения. В настоящее время, по-видимому, можно считать, что в механике разрушения (в широком смысле) определились основные концепции и подходы к формулировке критериев разрушения. *К основным концепциям и подходам в механике разрушения (в широком смысле) можно отнести следующие результаты.*

1. Фундаментальная теория хрупкого разрушения Гриффитса [276].

2. Концепция квазихрупкого разрушения (Ирвин, Орован и другие).

3. Энергетический критерий разрушения Гриффитса [276] или эквивалентный ему (но более легко реализуемый) силовой критерий Ирвина [496, 497].

4. Концепция не зависящего от контура интегрирования интеграла (J-интеграл, Г-интеграл, Эшелби [272], Черепанов [172, 173], Райс [550]).

5. Критерий критического раскрытия трещин.

Вышеуказанные концепции и подходы предполагают, что определенные условия выполняются или реализуются при определенных условиях, к которым можно отнести *следующие условия.*

Условие 1. Растяжение или сдвиг возникает в окрестности трещин, при этом **исключается действие сжатия.**

Условие 2. В процессе деформирования тела с трещинами не возникают резкие изменения конфигурации тела (например, явление потери устойчивости не предшествует явлению разрушения тела с трещинами).

Условие 3. В процессе деформирования тела с трещинами не возникают резкие изменения характера деформирования до разрушения (например, отсутствует изменение граничных условий в процессе деформирования).

Необходимо отметить, что **вышеуказанное Условие 1 является принципиальным, так как в случае сжатия вдоль трещин все вышеизложенные концепции и подходы не работают.**

В ситуации, соответствующей *Условию 2*, все вышеизложенные концепции и подходы могут работать, но предварительно необходимо исследовать напряженно-деформированное состояние с учетом резкого изменения конфигурации тела в процессе деформирования. В настоящее время в подавляющем большинстве исследований по механике разрушения (в широком смысле) вышеуказанный анализ не проводится.

В ситуации, соответствующей *Условию 3*, все вышеизложенные концепции и подходы могут работать, но предварительно необходимо исследовать напряженно-деформированное состояние тела с учетом резкого изменения характера деформирования до разрушения (например, с учетом изменения граничных условий в процессе деформирования). В настоящее время в подавляющем большинстве исследований по механике вышеуказанный анализ не проводится.

Учитывая вышеизложенные соображения, указанные результаты и проблемы, соответствующие отмеченным пяти концепциям или подходам и полученные при выполнении *Условий 1 – 3*, можно рассматривать как *классические проблемы механики разрушения*, к которым можно отнести в настоящее время следующие исследования.

1. Определение коэффициентов интенсивности напряжений для тел сложной формы, содержащих трещины, при различных силовых, тепловых и электромагнитных воздействиях. При этом для получения указанных результатов применяются аналитические, численные (с привлечением компьютеров), экспериментальные и экспериментально-теоретические методы. Результаты этих исследований (коэффициенты интенсивности напряжений) совместно с отмеченными критериями разрушения дают необходимую информацию о разрушении материалов и элементов конструкций в тех случаях, когда применимы эти критерии разрушения.

2. Экспериментальное исследование сложных случаев разрушения материалов и элементов конструкций, заканчивающееся в большинстве случаев результатами описательного характера без должного анализа и попыток формулировки новых критериев разрушения, соответствующих рассматриваемым явлениям.

Следует отметить, что в настоящее время подавляющее число публикаций относится к классическим проблемам механики разрушения в указанном выше смысле. По-видимому, в связи с отмеченной ситуацией многие ученые пришли к выводу о существовании идейного кризиса в механике разрушения на современном этапе ее развития. Также следует отметить, что второе направление в классических проблемах механики может служить первым этапом в исследованиях неклассических проблем механики разрушения.

1.2. Неклассические проблемы механики разрушения. К *неклассическим проблемам механики разрушения* можно условно отнести следующие исследования.

1. Изучение новых механизмов разрушения, которые не описываются в рамках основных пяти вышеуказанных концепций и подходов (с учетом выполнения *Условий 1 – 3*), при надлежащем анализе и попытке формулировки новых критериев разрушения, соответствующих рассматриваемым явлениям.

2. Исследование отдельных классов задач для материалов и элементов конструкций применительно к изучаемым новым механизмам разрушения и с привлечением соответствующих специально сформулированных критериев разрушения.

Как уже отмечалось, изложенная выше классификация (разделение на классические и неклассические проблемы) является достаточно условной и не всегда однозначной. Все же эта классификация сравнительно четко определяет направленность исследований и форму их новизны, что представляется весьма существенным при анализе результатов исследований. Также следует отметить, что число механизмов разрушения существенно расширяется при учете микроструктуры материалов на различном уровне ее описания. Эта особенность, прежде всего, относится к механике разрушения композитов, для которых характерным является учет микроструктуры на различных уровнях.

Для ученых, занимающихся исследованием неклассических проблем и механизмов разрушения, является характерным применение весьма приближенных расчетных схем и моделей; в случае композитных материалов такие приближенные расчетные схемы и модели применяются для анализа разрушения в микроструктуре композитов. Применение приближенных расчетных схем и моделей приводит к существенным количественным погрешностям, а во многих случаях и к качественным отличиям; следовательно, при помощи приближенных схем и моделей весьма затруднительно выполнить надежный анализ неклассических проблем и механизмов разрушения. Отмеченная ситуация определяет существенное значение результатов по исследованию неклассических проблем и механизмов разрушения, которые получены при достаточно строгих расчетных схемах и моделях.

Как уже отмечалось во вводной части настоящего параграфа, вышеизложенное разделение (пп. 1.1 и 1.2) проблем механики разрушения на классические и неклассические было изложено во Введении в 4-х томную (в 5-и книгах) коллективную монографию [154], которое помещено в т. 1 этой монографии. В последующие годы обсуждаемое выделение классических и неклассических проблем механики разрушения без существенного изменения включалось в обзорные статьи [336, 350, 59, 347] и ряд других.

1.3. Восемь неклассических проблем механики разрушения. В последние 50 лет сотрудники отдела динамики и устойчивости сплошных сред Института механики им. С.П.Тимошенко НАНУ, наряду с другими исследованиями, проводят исследования по *восемью* неклассическим проблемам механики разрушения. Ниже (в настоящем п. 1.3) кратко сформулируем обсуждаемые проблемы с указанием явлений, соответствующих этим проблемам; в последующих параграфах (§§3 – 10) настоящей статьи каждая из восьми неклассических проблем будет рассмотрена в отдельном параграфе с четким указанием результатов, полученных сотрудниками отдела динамики и устойчивости сплошных сред.

Проблема 1. *Разрушение в композитных материалах при сжатии вдоль армирующих элементов.* При экспериментальных исследованиях в ряде научных центров различных стран мира было доказано, что в обсуждаемой ситуации разрушение в композитных материалах (начало или старт разрушения) может определяться потерей устойчивости состояния равновесия в структуре композита, что является общей концепцией в рассматриваемой проблеме. При общей концепции для исследования устойчивости и, следовательно, разрушения при сжатии композитных материалов разработано *два* подхода.

Первый подход основан на применении различных приближенных теорий стержней, пластин и оболочек, а также других приближенных расчетных схем; в силу сложности анализируемого явления такой подход, по-видимому, не может привести к достоверным результатам.

Второй подход основан на применении трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел, построенной с обычно принятой в механике точностью; результаты в рамках второго подхода принадлежат, в основном, автору статьи и его ученикам.

Проблема 2. *Модель коротких волокон в теории устойчивости и в механике разрушения композитных материалов при сжатии.* Композитные материалы создаются как со сравнительно длинными (предмет рассмотрения Проблемы 1), так и с достаточно короткими волокнами (армирующими элементами). При экспериментальных исследованиях в случае композитных материалов с короткими волокнами при сжатии вдоль волокон было обнаружено явление потери устойчивости в структуре композитного материала с формами потери устойчивости, которые не являются периодически вдоль оси волокна и которые характерны для коротких волокон в матрице. Теория устойчивости в рассматриваемом случае при сжатии и соответствующая механика хрупкого разрушения были развиты с применением трехмерной линеаризованной теории устойчивости упругих тел, построенной с обычно принятой в механике точностью; основные результаты получены автором статьи и его учениками, включая и результаты в рамках плоской задачи для композитов различной структуры.

Проблема 3. *Разрушение в виде смятия торцов при сжатии композитных материалов.* В механике элементов конструкций известно явление смятия торцов элемента конструкции при сжатии вдоль армирующих элементов, когда происходит разрушение только вблизи торцов. С привлечением трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел построены основы механики разрушения в виде смятия торцов при сжатии вдоль армирующих элементов. Обсуждаемый механизм разрушения описан явлением приповерхностной неустойчивости нагруженных торцов композитного материала, когда форма потери устойчивости затухает при удалении от торцов. Основные результаты (применительно к плоской и пространственной задачам) получены автором статьи и его учениками.

Проблема 4. *Хрупкое разрушение материалов с трещинами с учетом действия начальных (остаточных) напряжений вдоль трещин.* Обсуждаемая механика хрупкого разрушения относится к изотропным материалам и ортотропным материалам, при этом композитные материалы моделируются в континуальном приближении ортотропными материалами; в случае ортотропных материалов предполагается, что трещины расположены в плоскостях симметрии свойств материала. В вышеизложенной ситуации механика хрупкого разрушения таких материалов не может быть построена с привлечением основных соотношений классической линейной теории упругости, так как в сингулярную часть известного решения Инглиса – Мухелишвили для материала с трещиной не входят начальные (остаточные) напряжения, действующие вдоль трещин. В связи с этим для построения механики хрупкого разрушения материалов с трещинами с учетом действия начальных (остаточных) напряжений вдоль трещин привлечена трехмерная линеаризованная теория упругости при конечных (больших) и малых начальных деформациях. При указанном подходе построены основы механики хрупкого разрушения материалов с трещинами с учетом действия начальных (остаточных) напряжений вдоль трещин, включая формулировку основных соотношений и критерия разрушения, а также разработку методов решения и исследование основных задач. Результаты, в основном, получены автором статьи и его учениками.

Проблема 5. *Хрупкое разрушение в виде «размочаливания» при растяжении или сжатии композитных материалов вдоль армирующих элементов.* Под «размочаливанием» в рассматриваемом случае понимается разделение на отдельные удлиненные (вдоль армирующих элементов) части. В статьях [347, 350] на английском языке рассматриваемая проблема имеет название «Shredding fracture of composites stretched or compressed along the reinforcing elements», где «shredding» имеет смысл «измельчание». Поскольку в обсуждаемом виде разрушения фактически происходит разделение (вдоль армирующих элементов, вдоль линии действия растяжения или сжатия) композита на отдельные достаточно удлиненные (сравнимые с длиной образца) части, то в abstract настоящей статьи применено более точное название настоящей проблемы «separation into slender parts of composites under tension or compression along reinforcing elements». В исследованиях предложена модель причины обсуждаемого явления разрушения композита при растяжении или сжатии – *наличие периодических искривлений во внутренней структуре композита*, так как наличие указанных периодических искривлений приводит к возникновению разрывающих нормальных или касательных напряжений на границе раздела сред (on interface), которые являются одинаковыми по величине как при растяжении, так и при сжатии равными по величине внешними нагрузками. В связи с вышеизложенным в исследованиях развита статика композитов с внутренними искривлениями. Основные результаты принадлежат, по-видимому, автору статьи и его ученикам и последователям.

Проблема 6. *Разрушение при сжатии вдоль параллельных трещин.* Рассматриваемая проблема относится к металлам, сплавам, композитам и другим материалам, которые в континуальном приближении моделируются изотропными или ортотропными телами; в случае ортотропных материалов принимается, что плоские трещины расположены в плоскостях симметрии свойств материалов. В обсуждаемой ситуации при сжатии вдоль системы плоских трещин, лежащих в параллельных плоскостях, для любых линейных и нелинейных моделей деформируемых тел (с учетом упругих, пластических и вязких деформаций) *все три коэффициента интенсивности напряжений равны нулю* (в силу симметрии свойств материала и условий нагружения). В связи с

вышеизложенным в обсуждаемой ситуации *все пять основных подходов классической механики разрушения*, изложенные в п. 1.1 настоящего параграфа, *не работают*. Обсуждаемая же ситуация (наличие трещин в параллельных плоскостях) вполне реалистична для конструкционных материалов, в частности для композиционных материалов, поскольку для композитов характерным является наличие параллельных поверхностей раздела свойств наполнителя и связующего, в которых наблюдается наличие различных видов нарушения адгезии, в том числе и наличие трещин.

Учитывая вышеизложенное, в Проблеме 6 принята *общая концепция* – начало (старт) разрушения определяется достижением сжимающими нагрузками значений, соответствующих локальной потере устойчивости состояния равновесия возле трещин. В рассматриваемой Проблеме 6, как и в Проблеме 1, с учетом вышеуказанной общей концепции для исследования устойчивости и, следовательно, разрушения при сжатии материалов с системой параллельных трещин разработано *два подхода*.

Первый подход основан на применении различных приближенных теорий стержней, пластин и оболочек, а также других приближенных схем; в силу сложности анализируемого явления такой подход, по-видимому, не может привести к достоверным результатам.

Второй подход основан на применении трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел, построенной с обычно принятой в механике точностью; в связи с этим второй подход позволяет получить достоверные результаты даже в случаях, когда первый подход неприменим. Результаты в рамках второго подхода принадлежат, в основном, автору статьи и его ученикам и последователям.

Проблема 7. *Хрупкое разрушение материалов с трещинами при действии динамических нагрузок (с учетом контактного взаимодействия берегов трещин)*. В обсуждаемой проблеме для материала применяется модель линейно-упругого изотропного тела и трещины, как и в других проблемах механики разрушения, моделируются математическими разрезами, которые не имеют толщины. В указанной ситуации распределение напряжений и перемещений вблизи трещин формируется падающими и отраженными упругими волнами, которые возникают при действии внешних динамических нагрузок.

При действии на берега трещин нагрузок, определяющихся распространяющимися упругими волнами, возникают перемещения берегов трещин, которые во времени изменяют знак; отмеченное явление возникает, например, в случае гармонических волн на протяжении каждого периода, так в продольных волнах возникают фазы растяжения и сжатия и в поперечных волнах возникают фазы с поперечными перемещениями различных знаков. Так в простейшем примере (нормальное падение плоской продольной гармонической волны на плоскую трещину) в первый полупериод возникает фаза растяжения (трещина раскрывается, берега трещины не взаимодействуют) и во второй полупериод возникает фаза сжатия (трещина закрывается, происходит контактное взаимодействие берегов трещины); отметим, что нумерация полупериодов носит условный характер и отмеченное явление *всегда существует независимо от интенсивности внешней нагрузки*.

Таким образом, можно считать, что изменение во времени знаков перемещений берегов трещины, по-видимому, является характерной особенностью физики явлений, возникающих при действии динамических нагрузок; отмеченное явление *необходимо* учитывать при построении динамической механики разрушения. В классической механике динамического разрушения обсуждаемое явление *не учитывается*; в качестве примера можно указать монографии [156, 157] и многочисленные другие монографии, а также подавляющее число публикаций в научных журналах и в трудах конференций.

Необходимо отметить, что учесть вышесформулированное явление (изменение граничных условий на берегах трещин – плавный переход от свободных трещин до динамически контактирующих берегов трещин за каждый период) *можно лишь в рамках нелинейной* динамической механики разрушения, принимающей во внимание изменение граничных условий в процессе деформирования (невыполнение *Условия 3* при применении классической механики разрушения).

В работах автора и его учеников развит простейший вариант нелинейной динамической механики хрупкого разрушения, который заключается в применении *линейных* динамических уравнений линейно-упругого изотропного тела, описывающих распро-

странение упругих волн в материале, и *нелинейных* граничных условий, описывающих изменение контактного взаимодействия в процессе деформирования. В указанных работах также развит и реализован численный метод решения сформулированных нелинейных динамических задач; в результате решения и анализа ряда плоских, пространственных и антиплоских задач выявлены и сформулированы основные закономерности, характеризующие качественное и количественное отличие классической и неклассической проблемы динамической механики разрушения.

Проблема 8. *Разрушение тонкостенных тел с трещинами при растяжении в случае предварительной потери устойчивости.* Неклассичность рассматриваемой проблемы механики разрушения заключается в том, что в обсуждаемом случае не выполняется *Условие 2* применимости классической механики разрушения (потеря устойчивости не предшествует разрушению), которое сформулировано в п. 1.1 настоящего параграфа. Действительно, в классической механике разрушения материалов с трещинами при растяжении и сдвиге молчаливо предполагается, что разрушение начинается от той конфигурации тела, которую оно имело в недеформированном состоянии. Следовательно, принимается, что в процессе деформирования до начала разрушения не происходит резкого изменения конфигурации тела, т.е. потеря устойчивости не предшествует разрушению. В действительности даже при растяжении в случае тонкостенных тел локальная потеря устойчивости состояния равновесия возле трещин может предшествовать разрушению.

Эталонными задачами в рассматриваемой неклассической проблеме механики разрушения являются задачи о растяжении тонкостенных пластин и оболочек перпендикулярно к трещине; в случае цилиндрических оболочек, как правило, исследуется ситуация, когда трещина расположена вдоль направляющей оболочки и оболочка растягивается вдоль оси. В указанной ситуации в результате концентрации напряжений возле трещины возникают локальные зоны сжимающих напряжений, что может привести к локальной потере устойчивости возле трещин до начала процесса разрушения.

Различные авторы при исследовании вышеизложенной ситуации применяют различные приближенные расчетные схемы при анализе локальных зон потери устойчивости возле трещин и отверстий. В работах автора и его учеников для анализа рассматриваемой проблемы применяются строгие уравнения механики тонкостенных систем с последующим использованием вариационных и численных методов; при этом существенное внимание уделяется проведению экспериментальных исследований и использованию их результатов при анализе рассматриваемой проблемы.

Вышеизложенными сведениями в настоящем пункте 1.3 ограничимся при краткой формулировке рассматриваемых восьми неклассических проблем механики разрушения с указанием явлений, соответствующих этим проблемам. Как уже отмечалось во вводной части настоящего пункта 1.3, в последующих параграфах этой статьи (§§3 – 10) каждая из восьми обсуждаемых проблем будет рассмотрена в отдельном параграфе с четким и кратким указанием результатов, полученных автором и его учениками.

1.4. Дополнительное обсуждение неклассических проблем механики разрушения. В настоящем пункте (п. 1.4) в краткой форме приводятся: дополнительное обсуждение моделей и подходов, применяемых при исследовании восьми вышеизложенных неклассических проблем механики разрушения в работах автора и его учеников; обсуждение одного из приближенных подходов, направленного на сведение неклассической **Проблемы 6** (п. 1.3) к классическим проблемам механики разрушения; обсуждение одной из задач, на первый взгляд имеющей отношение к неклассическим проблемам механики разрушения.

1.4.1. Краткое обсуждение моделей и подходов в неклассических проблемах механики разрушения (Проблемы 1 – 8, п. 1.3). Применительно к рассматриваемым неклассическим **Проблемам 1 – 8** в публикациях различных авторов предложены многочисленные приближенные подходы, модели и расчетные схемы; ниже рассмотрим лишь подходы и модели, которые предложены и применялись в публикациях автора и его учеников.

Применительно к **Проблеме 1** (разрушение композитных материалов при сжатии вдоль армирующих элементов) для построения механики разрушения применялась трехмерная линеаризованная теория устойчивости деформируемых тел при конеч-

ных и малых докритических деформациях. Исследования проводились для моделей деформируемых тел с учетом упругих, пластических и вязких деформаций. Результаты получены для композитных материалов для моделей кусочно-однородного тела, что является наиболее строгой моделью в рамках механики деформируемого тела, и для континуального приближения (модель однородного тела с усредненными значениями параметров).

Применительно к **Проблеме 2** (модель коротких волокон в теории устойчивости и механике разрушения композитных материалов при сжатии) применялась трехмерная линеаризованная теория устойчивости при малых докритических деформациях. Исследования проводились только с учетом упругих деформаций (хрупкое разрушение) для модели кусочно-однородного тела.

Применительно к **Проблеме 3** (разрушение в виде смятия торцов при сжатии композитных материалов) применялась трехмерная линеаризованная теория устойчивости деформируемых тел при малых докритических деформациях. Исследования проводились для моделей деформируемых тел с учетом упругих и пластических деформаций. Результаты получены для континуального приближения при анализе явления приповерхностной неустойчивости нагруженных торцов композитного материала.

Применительно к **Проблеме 4** (хрупкое разрушение материалов с трещинами с учетом действия начальных (остаточных) напряжений вдоль трещин) применялась трехмерная линеаризованная теория упругости при конечных и малых начальных (остаточных) деформациях для гиперупругих изотропных и ортотропных материалов с произвольной структурой упругого потенциала. Целесообразно отметить, что вышеуказанная линеаризованная теория эквивалентна трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел. Результаты получены для модели однородного материала (континуальное приближение) с различными трещинами, вдоль которых действуют начальные (остаточные) напряжения.

Применительно к **Проблеме 5** (хрупкое разрушение в виде «размочаливания» при растяжении или сжатии композитных материалов вдоль армирующих элементов) применяются трехмерные линейные теории упругости и вязкоупругости для изотропных и ортотропных материалов при статических нагрузках. Исследования проводились для модели кусочно-однородного материала и для модели однородного материала (в континуальном приближении). При этом для модели однородного материала (континуальное приближение) разработаны специальные подходы (модели и теории), позволяющие определять *напряжения на площадках, размеры которых меньше периодов искривлений в структуре композитного материала*. Таким образом, вышеуказанные континуальные теории позволили определить распределение напряжений в пределах периода искривлений; заметим, что континуальные теории, предложенные другими авторами, позволяют определять напряжения только на площадках, размеры которых значительно больше периодов искривлений в структуре композитных материалов. Результаты получены для слоистых и волокнистых материалов.

Применительно к **Проблеме 6** (разрушение при сжатии вдоль параллельных трещин) применяется трехмерная линеаризованная теория устойчивости деформируемых тел при конечных (больших) и малых докритических деформациях. Исследования проведены для однородных материалов с трещинами, которые расположены в параллельных плоскостях, для различных моделей деформируемых тел с учетом упругих, пластических и вязких деформаций. Необходимо отметить, что результаты для моделей с учетом только упругих и пластических деформаций получены с большей степенью завершенности и общности по сравнению с результатами с учетом вязких деформаций; отмеченное соображение обсуждается более подробно в §2 настоящей статьи при изложении основных соотношений и общих вопросов трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел для моделей с учетом упругих, пластических и вязких деформаций. В случае слоистых композитных материалов исследования проведены также для модели кусочно-однородных материалов, когда трещины расположены в границах раздела компонент (in interface); получены как точные решения с привлечением аналитических методов, так и решения с привлечением численных методов и компьютеров.

Применительно к **Проблеме 7** (хрупкое разрушение материалов с трещинами при действии динамических нагрузок (с учетом контактного взаимодействия берегов тре-

щин)) применяются уравнения динамики линейного упругого изотропного тела и новые нелинейные граничные условия на берегах трещин, соответствующие изменяющемуся контактному взаимодействию в процессе деформирования. Для решения сформулированных нелинейных динамических задач разработан метод последовательных приближений, когда в каждом из приближений задачи сводятся к задачам с фиксированной зоной контактного взаимодействия, размеры которой определяются из предыдущих приближений; фактически в каждом из приближений получаем как бы задачу классической динамической механики разрушения.

Применительно к **Проблеме 8** (разрушение тонкостенных тел с трещинами при растяжении в случае предварительной потери устойчивости) проводились теоретические и экспериментальные исследования для тонкостенных элементов (пластины и цилиндрические оболочки); при теоретических исследованиях анализировалось хрупкое разрушение (применялась линейная теория упругости) и при экспериментальных исследованиях рассматривалось разрушение при упругих и пластических деформациях. При исследовании хрупкого разрушения тонкостенных пластин с трещинами при растяжении (с учетом возможности локальной потери устойчивости возле трещин) привлекалась линеаризованная теория устойчивости тонкостенных пластин, построенная с привлечением гипотезы Кирхгоффа – Лява.

Вышеизложенными сведениями ограничимся в настоящем пункте (п. 1.4.1) при весьма кратком обсуждении моделей и подходов в восьми неклассических проблемах (Проблемы 1 – 8, п. 1.3), которые рассмотрены в публикациях автора и его учеников. Из вышеприведенной информации следует, что из рассматриваемых восьми проблем в *пяти* проблемах (**Проблемы 1, 2, 3, 4 и 6**) применялась трехмерная линеаризованная теория устойчивости деформируемых тел, в **Проблеме 5** применялась трехмерная линейная теория упругости или вязкоупругости при статическом нагружении, в **Проблеме 7** применялась трехмерная линейная теория упругости при динамическом нагружении и нелинейные граничные условия на берегах трещин и в **Проблеме 8** применялась двумерная линеаризованная теория устойчивости тонкостенных пластин, построенная с привлечением гипотезы Кирхгоффа – Лява.

Таким образом, в большинстве из восьми рассматриваемых неклассических проблем механики разрушения (в 5-и из 8-и) применялась трехмерная линеаризованная теория устойчивости деформируемых тел; в то же время следует отметить, что вышеуказанная теория устойчивости, по-видимому, является менее известной и менее широко применяемой по сравнению с другими разделами механики деформируемых тел. В связи с вышеотмеченной ситуацией в настоящую обзорную статью включен §2, в котором приведен в весьма краткой форме обзор становления трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел, следуя, в основном, монографиям [49, 334] и другим монографиям автора, а также обзорным статьям [337, 338, 344, 353]. Также в §2 изложен математический аппарат трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел при конечных (больших) и малых докритических деформациях в весьма краткой форме с изложением основных соотношений, следуя [49, 334, 337, 338, 344, 353], что является исключением и не соответствует стилю написания настоящей обзорной статьи; отмеченная ситуация была подчеркнута в **Примечании**, изложенном во Введении в настоящую статью.

В заключительной части настоящего пункта (п. 1.4.1) рассмотрим ряд вопросов общего характера, которые возникают в механике композитов, в том числе и в механике нанокompозитов. Так, при проведении исследований по обсуждаемым неклассическим проблемам механики разрушения применительно к композитным материалам применялись (были использованы) два общеизвестных подхода или модели.

При первом подходе используется модель кусочно-однородной среды; в этом случае для описания движения (равновесия) каждого из армирующих элементов (наполнителя) и матрицы (связующего) применяются в общем случае трехмерные соотношения механики деформируемых тел при определенных (с учетом дефектов) условиях на границе раздела сред. Первый подход является наиболее строгим и точным в рамках механики деформируемых тел и с его привлечением можно исследовать напряженное состояние, динамику и устойчивость в структурных элементах, т.е. в микроструктуре композитного материала. Очевидно, что применение первого подхода является необходимым при исследовании полей напряжений и деформаций, явлений

распространения волн и потери устойчивости, когда *характерные параметры* рассматриваемых явлений (расстояния, на которых существенно изменяются напряжения и деформации в статических задачах; длины волн в волновой динамике; длины волн форм потери устойчивости) *являются величинами одного порядка или значительно меньшими* по сравнению с *геометрическими размерами* (минимальными размерами) *структурных элементов композитных материалов*.

При втором подходе композитный материал моделируется однородным анизотропным материалом с усредненными постоянными; учет микроструктуры композитного материала в этом случае осуществляется посредством определения усредненных постоянных, которые зависят от физико-механических свойств и геометрической формы наполнителя и связующего, а также от их объемной концентрации. Очевидно, что применение второго подхода является обоснованным, когда *характерные параметры* рассматриваемых явлений (они указаны в первом подходе) *являются значительно большими величинами по сравнению с геометрическими размерами* (максимальными размерами) *структурных элементов композитных материалов*. Следует подчеркнуть, что методы определения усредненных постоянных, которые еще называют приведенными постоянными, в настоящее время достаточно разработаны и представлены в общеизвестных многочисленных публикациях, однако здесь их рассматривать не будем, так как настоящая обзорная статья посвящена другим вопросам. Все же целесообразно подчеркнуть, что при рассмотрении вопроса об определении усредненных постоянных композитных материалов нельзя исключать из рассмотрения экспериментальные способы определения указанных постоянных (как для однородного анизотропного материала), хотя в отечественной и зарубежной научной литературе значительно большее внимание уделяется теоретическим методам определения значений усредненных постоянных. Однако лишь при экспериментальном определении значений усредненных постоянных (как для однородного анизотропного материала) можно учесть влияние различных несовершенств и дефектов во внутренней структуре композитного материала, которые возникают практически при любой технологии их создания.

Целесообразно отметить, что выше был описан *первый подход*, который применялся при исследовании восьми рассматриваемых неклассических проблем механики разрушения применительно к композитным материалам и который является наиболее точным и строгим в рамках модели кусочно-однородной среды. Все же в рамках модели кусочно-однородной среды существуют и приближенные подходы, когда для наполнителя или связующего (или и для наполнителя и для связующего) применяются приближенные расчетные схемы.

В целом же *при переходе от модели кусочно-однородного материала к модели однородного материала с усредненными постоянными реализуется применение процедуры (принципа, процесса или концепции) гомогенизации* и в результате получаем однородный (гомогенный) материал.

Следует отметить, что при разработке основ механики нанокомпозитов с полимерной матрицей (например, монографии [90, 423], статья [424] и другие публикации, указанные в списке литературы к [90, 423, 424]), кроме процедуры (принципа, процесса или концепции) гомогенизации также применяется процедура (принцип, процесс или концепция) континуализации. Дело в том, что в нанокомпозитах с полимерной матрицей обычно наполнителями являются однослойные и многослойные углеродные нанотрубки (CNT). По своей внутренней структуре углеродные нанотрубки состоят из отдельных атомов в каждом атомном слое; при этом, естественно, отдельные атомы расположены на определенных расстояниях друг от друга и удерживаются на этих расстояниях за счет сил межатомного взаимодействия, что и определяет упорядоченные (зигзагообразные, креслообразные или хиральные) структуры. Таким образом, каждая углеродная нанотрубка, как наполнитель в нанокомпозите с полимерной матрицей, представляет собой дискретную систему, которая деформируется совместно с полимерной матрицей; при этом деформирование последней описывается обычно в рамках обычных континуальных представлений (как непрерывная среда). В связи с этим для описания совместного деформирования нанотрубок и полимерной матрицы (совместного движения) целесообразно применять единообразное описание движения (деформирования) нанотрубок и матрицы, что и достигается за счет применения принципа континуализации для нанотрубок.

Процедура (принцип, процесс или концепция) континуализации заключается в замене (моделировании) дискретной системы непрерывной системой (средой) с определением усредненных постоянных в рамках непрерывной системы (среды). Целесообразно отметить, что подавляющее большинство исследователей, занимающихся экспериментальным определением свойств углеродных нанотрубок, представляют информацию о свойствах нанотрубок в величинах, обычно принятых для континуальных представлений (по существу после применения принципа континуализаций) (например, в монографии [57], т. 1, стр. 80 – 83).

Таким образом, можно считать, что одним из наиболее популярных подходов при исследовании композитов является применение процедуры гомогенизации для всего композита. В случае нанокompозитов соответствующий подход заключается в первоначальном применении процедуры континуализации для нанотрубки и в последующем применении принципа гомогенизации для всего нанокompозита.

Дополнительные сведения о вопросах общего характера, кратко рассмотренных выше в заключительной части настоящего пункта (п. 1.4.1), приведены в Предисловии к монографии [54], в Предисловии и Введении к 2-томной монографии [57] и в монографиях [90, 423] (применительно к построению основ механики нанокompозитов).

1.4.2. О рассмотрении неклассических проблем механики разрушения с точки зрения классических проблем механики разрушения. По-видимому, можно считать, что в настоящее время существуют попытки рассмотреть или исследовать отдельные неклассические проблемы механики разрушения с точки зрения классических проблем механики разрушения (моделей и подходов) при введении соответствующих приближенных расчетных схем.

В настоящем пункте (п. 1.4.2) приведем анализ одного из вышеотмеченных предложений исследовать **Проблему 6 (Разрушение при сжатии вдоль параллельных трещин)** (п. 1.3 настоящей статьи) за счет введения приближенных расчетных схем, соответствующих классической механике разрушения, следуя ряду публикаций других авторов.

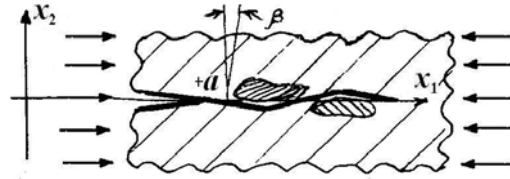


Рис. 1.1

Обсуждаемое предложение рассмотрим применительно к правому кончику ($x_1 = +a$, Рис. 1.1) для материала с трещиной длиной $2a$ при сжатии вдоль оси $0x_1$ (Рис. 1.1), ограничимся анализом в рамках плоской деформации в плоскости $x_1 0x_2$. Существо предложения сводится к тому, что при анализе распространения трещины следует учитывать микроструктуру материала; таким образом, трещина будет распространяться не по прямой линии $x_2 = 0$, а по некоторой ломаной линии, которая определяется влиянием микроструктуры и является близкой к линии $x_2 = 0$ (Рис. 1.1). Необходимо отметить, что Рис. 1.1 соответствует поликристаллическому материалу, когда учитывается микроструктура материала возле правого кончика трещины (наличие монокристаллов, которые отмечены более густой штриховкой) и трещина распространяется по ломаной линии, обходя монокристаллы. На Рис. 1.1. также указано обозначение: β – угол между вертикальной осью и нормалью к одному из отрезков рассматриваемой ломаной линии, по которой в соответствии с обсуждаемым предложением прогнозируется распространение трещины. При действии внешних нагрузок в виде, представленном на Рис. 1.1, на берегах трещины при предполагаемом ее распространении вдоль ломаной линии будут возникать *сдвигающие напряжения*, определяемые величиной угла β на Рис. 1.1; в связи с этим с учетом таким образом введенных *сдвигающих напряжений* уже можно применять критерий разрушения классической механики разрушения (подход Гриффитса – Ирвина, п. 1.1 настоящей статьи).

При анализе перспектив развития рассматриваемого подхода для *поликристаллических материалов* или для *композитных материалов*, которые имеют внутреннюю структуру, близкую к зернистой, целесообразно учесть следующие три соображения.

1. Учет влияния микроstructures вышеуказанных материалов в кончике трещины применительно к механике разрушения для случая, представленного на Рис. 1.1, по-видимому, соответствует следующему этапу в процессе познания применительно к механике разрушения, которая обычно развивается в рамках континуальных представлений для различных материалов.

2. При попытке реализации обсуждаемого подхода для вышеуказанных материалов необходимо выполнить сложнейшие исследования по идентификации явлений, происходящих в кончике трещины на микроструктурном уровне и определяющих ломаную линию – линию распространения трещины, с модельными представлениями, используемыми в механике разрушения.

3. При незначительном отличии на Рис. 1.1 ломаной линии от прямой линии (при малых углах β на Рис. 1.1) вводимые (при рассматриваемом подходе) сдвигающие напряжения будут значительно меньшими сжимающих напряжений σ_{11} на Рис. 1.1.

Вышеизложенные соображения (особенно второе), по крайней мере, по мнению автора настоящей статьи, не дают возможности ожидать получения (в ближайшее время) результатов для обсуждаемых материалов (поликристаллические материалы; композитные материалы с внутренней структурой, близкой к зернистой) в законченном виде при применении обсуждаемого подхода.

В случае же *волоконистых и слоистых композитных материалов* при сжатии вдоль армирующих элементов характерным является распространение трещин в границах раздела сред (in interface). В связи с этим при исследовании распространения таких трещин уже заранее учитывается влияние структуры или микроstructures композита в кончике трещины, следовательно, дополнительно учитывать влияние структуры материала в кончике трещины, по-видимому, не имеет смысла.

Таким образом, обсуждаемое в настоящем пункте (п. 1.4.2) предложение можно считать прямо относящимся к неклассическим проблемам механики разрушения, которые анализируются в настоящей обзорной статье; все же, как отмечалось выше, это предложение нельзя считать перспективным с точки зрения получения новых конкретных результатов при анализе рассмотренных обсуждаемых восьми неклассических проблем механики разрушения при помощи классических проблем механики разрушения.

1.4.3. О некоторых других публикациях. В настоящее время в научной литературе существует ряд публикаций, в которых исследуются конкретные задачи, на первый взгляд как бы относящиеся к обсуждаемым в настоящей обзорной статье неклассическим проблемам механики разрушения. В действительности же эти результаты и исследуемые задачи никак не относятся к обсуждаемым в настоящей обзорной статье восьми неклассическим проблемам механики разрушения, а имеют самостоятельное значение.

Вышеизложенные соображения продемонстрируем на примере конкретной публикации [159], в названии которой указано, что исследование проводится «...при сжатии пластины вдоль линии трещины»; в этой публикации действительно приведены результаты экспериментальных исследований при сжатии вдоль двух трещин, которые выходят из контура кругового отверстия и расположены на продолжении одного и того же диаметра отверстия (расположены на одной линии). На Рис. 1.2 приведена расчетная схема, соответствующая исследованиям [159]; следует отметить, что Рис. 1.2 полностью соответствует Рис. 1, а [159], где опущена информация, относящаяся к описанию

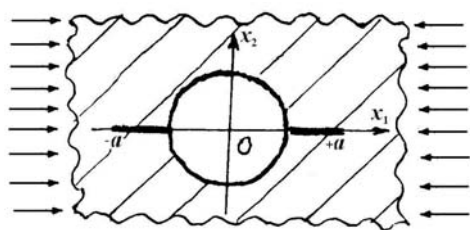


Рис. 1.2

образцов, применяемых при экспериментальных исследованиях.

В случае, представленном на Рис. 1.2, действительно исследуется сжатие вдоль трещин, которые лежат в одной плоскости; по внешним нагрузкам ситуация на Рис. 1.2 как бы соответствует **Проблеме 6** (*Разрушение при сжатии вдоль параллельных трещин*) в соответствии с терминологией

гией п. 1.3 настоящей обзорной статьи. Все же в случае, представленном на Рис. 1.2, трещины находятся в сложном поле напряжений, вызванном концентрацией напряжений около отверстия. Так, в случае [159] возле кончиков трещины (при $x_1 = \pm a$ на Рис. 1.2, соответствующем расчетной схеме) возникают растягивающие напряжения σ_{22} , вызванные концентрацией напряжений возле отверстия, что дает возможность применять критерии разрушения классической механики разрушения (подход Гриффитса – Ирвина). Вышеизложенное подтверждается и названием публикации [159] «Экспериментальное определение величины K_I ...», где K_I – общеизвестный коэффициент интенсивности напряжений.

Из вышеизложенных сведений и соображений, рассмотренных в п. 1.4.3, следует, что необходимо четко определять – относится ли конкретная публикация к обсуждаемым в настоящей обзорной статье неклассическим проблемам механики разрушения.

В заключение рассматриваемого §1 настоящей обзорной статьи отметим, что в нем в достаточно краткой форме приведены сведения, относящиеся к разделению проблем механики разрушения на классические и неклассические проблемы, а также к формулировке и предварительному обсуждению *восьми* неклассических проблем механики разрушения, которые уже 50 лет исследуются в отделе динамики и устойчивости сплошных сред Института механики им. С.П.Тимошенко НАНУ. Как уже отмечалось во вводной части п. 1.3 настоящей обзорной статьи, в последующих §§3 – 10 настоящей статьи каждая из *восьми* неклассических проблем механики разрушения будет рассмотрена в отдельном параграфе с четким указанием результатов, полученных в отделе динамики и устойчивости сплошных сред.

§2. Краткое изложение основ трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел.

В настоящем параграфе приводится в весьма краткой форме информация об основах трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел, включающая основные соотношения и сведения о математическом аппарате обсуждаемой теории. Целесообразность включения этого материала в настоящую обзорную статью следует из Примечания во Введении и сведений, изложенных в п. 1.4.1; основное соображение можно сформулировать следующим образом: из *восьми* неклассических проблем механики разрушения в *пяти* проблемах (Проблемы 1, 2, 3, 4 и 6) применяется трехмерная линеаризованная теория устойчивости деформируемых тел, которая является менее известной и менее широкоприменяемой по сравнению с другими разделами механики деформируемых тел. Также отметим, что включение в настоящий параграф математических аспектов трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел является исключением из стиля написания обзора по неклассическим проблемам механики разрушения, что также уже отмечалось во Введении. В последующих параграфах (§§3 – 10) настоящей обзорной статьи будут кратко изложены основные результаты по *восьми* обсуждаемым неклассическим проблемам механики разрушения, полученным в отделе динамики и устойчивости сплошных сред, в принятом стиле изложения, отмеченном во Введении в настоящую обзорную статью.

При построении обзора будем следовать монографиям [49, 334], где трехмерная линеаризованная теория устойчивости деформируемых тел изложена в единой общей форме для теории конечных (больших) и малых докритических деформаций для различных моделей деформируемых тел с определяющими уравнениями достаточно общей структуры при учете упругих, пластических и вязких деформаций. Дополнительно будем привлекать сведения, изложенные в монографиях [30, 31, 34, 35, 60], а также в публикациях, которые включены в списки литературы к монографиям [30, 31, 34, 35, 49, 60, 334]. По стилю изложения результатов настоящий §2 соответствует стилю изложения обзорных статей [337, 338], но в настоящем §2 результаты представлены в существенно более краткой форме; в связи с этим более подробные сведения можно получить также из современных обзоров по отдельным проблемам обсуждаемой теории [58, 344, 353, 382].

2.1. О становлении трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел. Начиная со знаменитой работы Эйлера за 1744 г., традиционно в механике деформируемых тел исследования явления потери устойчивости проводились (исключительно) и проводятся (в большинстве публикаций для ряда традиционных научных направлений) применительно к тонкостенным элементам конструкций (стержни, пластины и оболочки); при этом для проведения исследований привлекаются приближенные прикладные (одномерные для стержней, двумерные для пластин – оболочек) теории, построенные с привлечением гипотез плоских сечений и Кирхгофа – Лява, а также других приближенных расчетных схем.

Лишь в начале XX-го века для разработки общего подхода к исследованию явления потери устойчивости в механике деформируемых тел и со середины XX-го века для обеспечения исследования явления потери устойчивости в механике деформируемого тела применительно к нетрадиционным новым научным направлениям (например, геотектоника, механика композитных материалов, теория устойчивости локального состояния равновесия возле горных выработок и ряд других) начала развиваться трехмерная теория устойчивости деформируемых тел. В настоящее время, по видимому, можно считать, что *первой публикацией* по построению трехмерной теории устойчивости деформируемых тел *была статья* Southwell [561], опубликованная в 1913 г.

В последующие годы были опубликованы результаты по построению трехмерной теории устойчивости деформируемых тел, полученные рядом авторов; при этом по построению указанной теории установилось два подхода.

При *первом* подходе основные уравнения и граничные условия трехмерной теории устойчивости деформируемых тел формируются, исходя из соответствующей нелинейной теории, посредством применения строгой математической процедуры – посредством линеаризации основных соотношений соответствующей нелинейной теории. В связи с вышеизложенным основные соотношения трехмерной теории устойчивости деформируемых тел, полученные при *первом* подходе, можно считать достаточно строгими и точными, а также последовательно полученными; обсуждаемые результаты, полученные при *первом* подходе можно называть трехмерной линеаризованной теорией устойчивости деформируемых тел.

При *втором* подходе основные уравнения движения и соответствующие граничные условия трехмерной теории устойчивости деформируемых тел формируются, исходя из определенных соображений физического характера; при этом полученные результаты (уравнения движения и граничные условия) могут несколько отличаться друг от друга, поскольку соответствующие соображения физического характера различных авторов могут несколько отличаться.

Проиллюстрируем вышеуказанный первый способ получения основных соотношений трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел на простейшем примере. Пусть в рамках *рассматриваемого варианта нелинейной механики деформируемого тела* имеет место следующее соотношение:

$$y = f(x), \quad (2.1)$$

отсчет в котором ведется от первого отсчетного состояния (в случае упругих тел – от естественного, недеформированного состояния). Рассмотрим соотношение (2.1) применительно ко второму (начальному, невозмущенному) и третьему (возмущенному) состояниям; с учетом вышеизложенных обозначений (2.1) применительно ко второму и третьему состояниям можем записать

$$y_0 = f(x_0); \quad y_0 + y = f(x_0 + x), \quad (2.2)$$

где y и x – возмущения соответствующих величин. Учитывая малость возмущений, вводится следующее условие:

$$|x| \ll |x_0|. \quad (2.3)$$

В рамках обсуждаемого первого подхода (применение процедуры линеаризации), из (2.2) с учетом (2.3) получаем следующее выражение:

$$y = \left[\left(\frac{df}{dx} \right) \Big|_{x=x_0} \right] x. \quad (2.4)$$

Таким образом, под основными соотношениями трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел обычно понимаются соотношения типа (2.4), т.е. соотношения между возмущениями; причем в соотношениях типа (2.4) будем приближенно принимать знак равенства. Целесообразно отметить, что вышеуказанная трехмерная линеаризованная теория устойчивости деформируемых тел соответствует *рассматриваемому варианту нелинейной механики деформируемого тела*.

В середине XX-го века рядом ученых в достаточно многочисленных публикациях были предложены различные варианты трехмерной теории устойчивости деформируемых тел, которые между собой отличаются подходами при их получении: привлечением соображений физического характера; применением принципа линеаризации; привлечением вариационных принципов; применением теории больших (конечных) докритических деформаций и различных вариантов теории малых докритических деформаций; формулировкой соотношений в декартовых координатах; формулировкой соотношений в произвольной криволинейной системе координат с привлечением аппарата тензорного анализа; применением тензоров напряжений, в которых составляющие относятся к размерам площадок в отсчетной конфигурации (первое состояние) или в актуальной конфигурации (третье состояние) и ряд других подходов. Повидимому, можно считать завершающей публикацией в вышеуказанном процессе исторического характера статью [275], опубликованную в 1952 г., в которой в самом общем виде изложены основные соотношения трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел при конечных (больших) докритических деформациях, полученные с привлечением тензорного анализа, и рассмотрены частные случаи. В статье [275] для линеаризованной трехмерной теории также впервые введено название «теория малых деформаций, наложенных на конечные деформации», которое часто применяется в последующих публикациях других авторов, особенно англоязычных авторов.

Примечание 2.1. Следует отметить, что основные соотношения трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел (ТЛТУДТ) в историческом аспекте формировались на базе основных соотношений трехмерной линеаризованной теории упругой устойчивости (ТЛТУУ). Дело в том, что основные соотношения ТЛТУУ (уравнения движения и граничные условия, записанные в напряжениях) до введения в них линеаризованных соотношений упругости являются общими и для ТЛТУУ и для ТЛТУДТ. При введении в вышеуказанные основные соотношения линеаризованных соотношений упругости получаем основные соотношения ТЛТУУ в перемещениях, при введении в вышеуказанные основные соотношения линеаризованных определяющих соотношений для любой другой модели деформируемых тел получаем основные соотношения ТЛТУДТ для рассматриваемой модели.

Примечание 2.2. В обсуждаемые основные соотношения ТЛТУДТ входят напряжения докритического состояния, обычно отмеченные индексом «нуль», которые являются неизвестными и определяются при решении каждой конкретной задачи ТЛТУДТ. Если считать в обсуждаемых основных соотношениях ТЛТУДТ напряжения, отмеченные индексом «нуль», заданными величинами, то основные соотношения ТЛТУДТ в этом случае являются основными соотношениями трехмерной линеаризованной механики деформируемых тел (ТЛМДТ) с начальными или остаточными напряжениями; в качестве последних в этом случае выступают напряжения, отмеченные индексом «нуль». В вышеуказанном смысле трехмерная линеаризованная теория упругости при конечных (больших) и малых начальных деформациях, которая привлекается в **Проблеме 4** (*хрупкое разрушение материалов с трещинами с учетом действия начальных (остаточных) напряжений вдоль трещин*) (по терминологии п. 1.3 настоящей обзорной статьи), соответствует ТЛТУУ.

Исторический очерк становления и развития трехмерной теории устойчивости деформируемых тел в 1913 – 1985 гг., включающий и ТЛТУДТ, со списком основных публикаций представлен в монографии [49] на русском языке; на английском языке этот очерк представлен в монографии [334], опубликованной в 1999 г.

Исторический очерк развития и становления трехмерной теории устойчивости деформируемых тел в 1913 – 2000 гг., включающий и ТЛТУДТ, со списком основных публикаций представлен в обзорной статье [337], первоначально опубликованной в 2001 г. на русском языке в журнале «Прикладная механика» и в последующем в 2002 г. на английском языке в журнале «International Applied Mechanics» издательством SPRINGER, которое в настоящее время осуществляет перевод и публикацию на английском языке журнала «Прикладная механика» в виде журнала «International Applied Mechanics». Дополнительные сведения можно получить из обзорной статьи за 2002 г. [338], посвященной родственной проблеме – трехмерной (по пространственным переменным) теории распространения упругих волн в материалах с начальными (остаточными) напряжениями, а также из обзорных статей [344] за 2003 г. и [382] за 2004 г., посвященных другим родственным проблемам трехмерной линеаризированной механики деформируемых тел (ТЛМДТ).

Целесообразно отметить, что обзорные статьи [337, 338, 344, 382] автора настоящего обзора опубликованы при проведении в 2000 – 2009 гг. журналом «Прикладная механика» акции, посвященной **Началу III-го Тысячелетия**. При проведении указанной акции в журнале «Прикладная механика» на русском языке было опубликовано 174 обзорных статьи, подготовленных учеными *26 стран всего мира*; в 2001 – 2010 гг. эти статьи на английском языке были опубликованы журналом «International Applied Mechanics». Вышеуказанная акция журнала «Прикладная механика» (174 обзорные статьи в течение 10 лет, авторы – ученые из 26 стран мира) *не имеет аналога в мировой научной литературе в периодических изданиях по механике*.

В 2005 – 2011 гг. Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ опубликовал многотомную коллективную монографию **«Успехи механики»** (в 6-и томах, в 7-и книгах), в которую вошли 174 обобщающие обзорные статьи, опубликованные в 2000 – 2009 гг. в журнале «Прикладная механика» на русском языке и в 2001 – 2010 гг. в журнале «International Applied Mechanics» на английском языке при проведении акции, посвященной **Началу III-го Тысячелетия**; в вышеуказанное издание вошли и обобщающие обзорные статьи [337, 338], относящиеся к тематике настоящего обзора. Многотомная коллективная монография **«Успехи механики»** (174 обзорные статьи за последние 10 лет, авторы – ученые из 26 стран всего мира) не имеет аналога в мировой монографической научной литературе по механике.

В 2016 – 2018 гг. Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ опубликовал многотомную коллективную монографию **«Современные проблемы механики»** (в 3-х томах), посвященную **100-летию (1918 – 2018 гг.)** Национальной академии наук Украины и Института механики им. С.П.Тимошенко НАНУ; в вышеуказанное издание вошли обобщающие обзорные статьи ведущих ученых Института механики по научным направлениям, которые развиваются в Институте механики в последние несколько десятилетий. Указанные обобщающие обзорные статьи ведущих ученых Института механики опубликованы в 2010 – 2017 гг. в журнале «Прикладная механика» на русском языке и в журнале «International Applied Mechanics» в 2011 – 2018 гг. на английском языке; к этим статьям также относятся статьи автора настоящего обзора ([59] за 2011 г., [353] за 2012 г.), которые являются современными обзорами по отдельным направлениям трехмерной линеаризированной механики деформируемых тел (ТЛМДТ).

Таким образом, сведения по становлению и развитию трехмерной теории устойчивости деформируемых тел в 1913 – 2011 гг., включая и ТЛТУДТ, со списками основных публикаций можно получить из обобщающих обзорных статей [337, 338, 344, 382, 59, 353] автора настоящего обзора, которые опубликованы в 2001 – 2012 гг. на русском языке в журнале «Прикладная механика» и на английском языке в журнале «International Applied Mechanics»; указанные обзорные статьи также вошли в многотомные коллективные монографии **«Успехи механики»** (в 6-и томах, в 7-и книгах) за 2005 – 2011 гг. и **«Современные проблемы механики»** (в 3-х томах) за 2016 – 2018 гг. Безусловно, наиболее информативной является обобщающая обзорная статья [337], в которой в краткой форме представлен исторический аспект становления и развития трехмерной теории устойчивости деформируемых тел, включая и трехмерные линеаризированные теории устойчивости деформируемых тел, со списком основных публикаций применительно к 1913 – 2000 гг.

Результаты автора настоящей статьи по разработке трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел представлены в серии монографий [30, 31, 34, 35, 49, 334], первая из которых опубликована в 1971 г., и в статьях, частично включенных в список литературы к настоящему обзору, [22 – 24, 27, 28, 32, 33, 36, 61, 62, 277, 278, 297, 299 – 301, 313, 319, 348, 355 – 358, 363, 376 – 380, 424, 425, 482] и ряд других. Следует отметить, что более подробный список обсуждаемых статей представлен в монографиях [30, 31, 34, 35, 49, 334] и в обзорах [337, 338, 344, 382, 59, 353]; причем первой публикацией автора настоящего обзора по трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел была статья [277], опубликованная в 1967 г.

2.2. Классификация подходов (вариантов теории) в трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел. Обсуждаемая классификация наиболее четко изложена в обзорных статьях [337, 338], хотя основные позиции такой классификации были предложены автором в 1972 г. в статье, которая указана под № 35 в списке литературы обзора [337]; в последующие годы обсуждаемая классификация применялась в монографиях [49, 334], которые, по-видимому, можно считать заключительными в серии монографий автора по трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел.

При изложении рассматриваемой классификации и в дальнейшем в настоящем §2 будем применять лагранжев метод описания движения сплошной среды и использовать метод сопутствующей системы координат; все соотношения будут приведены с привлечением тензорного анализа, построенного на основе базисных векторов и метрического тензора, которые введены в отсчетном (первом) состоянии. Также будем использовать напряжения, которые действуют в актуальной конфигурации (в возмущенном, третьем состоянии), но отнесены к размерам соответствующих площадок в отсчетном (первом) состоянии; при применении других тензоров напряжений рассматриваемая ситуация будет особо обсуждаться. Вышеизложенный метод описания основных соотношений используется в большинстве публикаций в нелинейной механике деформируемых тел при конечных (больших) и малых деформациях.

Учитывая вышеизложенные сведения вводного характера, ниже в весьма краткой форме изложим классификацию подходов (вариантов теории) в трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел (ТЛТУДТ); при этом уделим внимание не только наиболее строгим и последовательным подходам (теориям), но и недостаточно строгим и недостаточно последовательным подходам (теориям), а также одному весьма приближенному подходу, который никак не связан с ТЛТУДТ (не следует при применении принципа линеаризации) и приводит даже к погрешностям качественного характера.

1. Теория больших (конечных) докритических деформаций. Рассматриваемый подход (вариант теории) является наиболее строгим и последовательным; как уже отмечалось в п. 2.1, обсуждаемый вариант теории в более общем виде сформирован в публикации [275] за 1952 г. с привлечением тензорного анализа. В рамках указанной теории основные соотношения имеют следующий вид:

уравнения движения

$$\nabla_i \left[(g_n^j + \nabla_n u_0^j) S^{in} + S_0^{in} \nabla_n u^j \right] - \rho \ddot{u}^j + \rho F^j = 0; \quad (2.5)$$

соотношения между контравариантными составляющими несимметричного тензора напряжений Кирхгоффа t и контравариантными составляющими симметричного тензора напряжений S

$$t^{ij} = (g_n^j + \nabla_n u_0^j) S^{in} + S_0^{in} \nabla_n u^j; \quad (2.6)$$

условие несжимаемости

$$q^{nj} \nabla_n u_j = 0, \quad (2.7)$$

где введено обозначение

$$q^{nj} = g_0^{nm} (g_m^j + \nabla_m u_0^j); \quad (2.8)$$

ковариантные составляющие тензора деформаций Грина

$$2\varepsilon_{nm} = \left[(g_m^j + \nabla_m u_0^j) \nabla_n + (g_n^j + \nabla_n u_0^j) \nabla_m \right] u_j; \quad (2.9)$$

граничные условия в напряжениях на части поверхности S_1 (с учетом обозначений (2.6))

$$Q^j \Big|_{S_1} = P^j; \quad Q^j \equiv N_i t^{ij}; \quad (2.10)$$

граничные условия в перемещениях на части поверхности S_2

$$u^j \Big|_{S_2} = f^j; \quad (2.11)$$

граничные условия для динамических граничных (краевых) задач

$$u^j \Big|_{\tau=\tau_1} = f_1^j; \quad u^j \Big|_{\tau=\tau_2} = f_2^j; \quad (2.12)$$

начальные условия для динамических задач с начальными условиями

$$u^j \Big|_{\tau=0} = h_1^j; \quad \dot{u}^j \Big|_{\tau=0} = h_2^j; \quad (2.13)$$

выражения для определения контравариантных составляющих векторов правых частей граничных условий в напряжениях (2.10) (величин P^j) при действии на S_1 «следящей» нагрузки интенсивности \tilde{P} , которая направлена по нормали к S_1

$$P^j = \tilde{P} N_k \sqrt{g_0^* g^{*-1}} \left[(g_n^j + \nabla_n u_0^j) (g_m^\alpha + \nabla_m u_0^\alpha) (g_*^{kn} g_*^{m\beta} - g_*^{nm} g_*^{\beta k} - g_*^{n\beta} g_*^{mk}) + g_*^{k\beta} g^{j\alpha} \right] \nabla_\beta u_\alpha; \quad (2.14)$$

прежде всего отметим, что: индексом «ноль» во всем §2 отмечены все величины, относящиеся к докритическому состоянию (ко второму – невозмущенному, начальному состоянию по терминологии, применяемой к процессу линеаризации); обозначение S применительно к симметричному тензору напряжений введено в соответствии с обозначениями статьи [275], в исследованиях других авторов для обозначения упомянутого симметричного тензора напряжений применяются и другие обозначения; все другие обозначения в (2.5) – (2.14) соответствуют монографиям [49, 334] и обзорным статьям [337, 338] автора настоящей обзорной статьи. Также отметим, что в (2.14) и дальше через \tilde{P} обозначена интенсивность поверхностной нагрузки, вычисленной на единицу площади в докритическом состоянии (во втором состоянии); естественно, что в этом случае указанная величина одинакова для докритического и возмущенного (в актуальной конфигурации) состояний (в силу малости возмущений – условие (2.3)), однако может существенно отличаться от аналогичной величины, вычисленной на единицу площади в отсчетном (первом) состоянии, в силу применения теории конечных докритических деформаций.

Кроме того, в рассматриваемой теории «1» и ниже введены следующие обозначения:

u^j – контравариантные составляющие возмущения вектора перемещений;

F^j и P^j – контравариантные составляющие возмущений векторов внешних массовых и поверхностных сил;

f^j, f_1^j, f_2^j, h_1^j и h_2^j – контравариантные составляющие возмущений векторов правых частей в граничных и начальных условиях; N^j – контравариантные составляющие орта внешней нормали к поверхности тела в отсчетной конфигурации (в первом состоянии);

g^{nm} – контравариантные составляющие метрического тензора сопутствующей системы координат в отсчетной конфигурации (в первом состоянии);

g_*^{nm} – контравариантные составляющие метрического тензора сопутствующей системы координат в актуальной конфигурации (в третьем состоянии).

Вышеизложенными сведениями ограничимся при весьма кратком обсуждении теории «1» (*теории конечных докритических деформаций*); дополнительные сведения можно получить из обзоров [337, 338] и приведенных в них списков литературы.

2. Первый вариант теории малых докритических деформаций. Прежде всего, рассмотрим Основное положение (определение, упрощение) теории малых деформаций и Следствия, которые следуют (доказываются) из Основного положения.

Основное положение (определение, упрощение) теории малых деформаций заключается в том, что относительные удлинения и сдвиги являются малыми величинами по сравнению с единицей и ими по сравнению с единицей можно пренебречь.

Следствия Основного положения:

1. составляющие тензора деформаций Грина являются малыми величинами по сравнению с единицей и ими по сравнению с единицей можно пренебречь;

2. изменение удлинений, площадей ориентированных площадок и объемов можно не учитывать;

3. изменение составляющих метрического тензора сопутствующей системы координат при деформировании можно не учитывать.

Более подробно отмеченные сведения о нелинейной теории малых деформаций представлены в монографиях [49, 334] и в более сокращенной форме в обзорах [337, 338]; вышеуказанный переход получается, исходя из нелинейной теории деформирования сплошной среды при конечных деформациях.

Впервые обсуждаемые упрощения и последовательный переход от теории конечных деформаций к теории малых деформаций были предложены в статьях [449, 500] ([500] с. 344, внизу) за 1939 г.; в монографии [155] за 1948 г. обсуждаемый подход был изложен последовательно и в полном объеме и также рассматривался в монографиях [30, 49, 334]. Отметим, что вышеизложенные сведения относятся к построению нелинейной механики малых деформаций сплошной среды.

При построении теории «2» (*Первый вариант теории малых докритических деформаций*), являющейся линеаризованной теорией, обычно реализуются **два способа** (два подхода).

При первом способе (подходе) применяются основные соотношения теории «1» (*Теория больших (конечных) докритических деформаций*) в виде соотношений (2.5) – (2.14) и других соответствующих выражений и в отмеченные соотношения последовательно вводятся **Основное положение** и **Следствия из него**, изложенные выше и соответствующие переходу от нелинейной теории конечных деформаций к нелинейной теории малых деформаций; при таком способе из линеаризованной теории «1» получают линеаризованную теорию «2».

При втором способе (подходе) вначале строятся все соотношения нелинейной теории малых деформаций механики сплошной среды для соответствующей модели, учитывая при выводе каждого из соотношений (в полной мере по мнению авторов каждой из построенных теорий) все упрощения, соответствующие высшеформулированным **Основному положению** и **Следствиям из него** нелинейной теории малых деформаций. После получения всех соотношений нелинейной механики малых деформаций (можно считать с привлечением соображений физического характера) проводится их линеаризация и таким образом получают линеаризованную теорию «2», *никак не привлекая теорию конечных (больших) деформаций*.

Следует отметить, что с привлечением вышеуказанных **двух способов (подходов)** не всегда получают для всех соотношений (в рамках линеаризованной теории) полностью совпадающие результаты; пример такой ситуации будет рассмотрен в заключительной части настоящего п. 2.2. По мнению автора настоящей обзорной статьи из двух обсуждаемых способов (подходов) по последовательности и строгости предпочтительным является **первый способ (подход)**.

Вышеформулированные сведения и соображения относятся лишь к процедуре построения теории «2» (*Первый вариант теории малых докритических деформаций*); ниже в краткой форме приведем основные соотношения обсуждаемой теории «2»,

построенные с привлечением **первого способа (подхода)**. При изложении отмеченных соотношений уже применяется симметричный тензор напряжений σ (вместо симметричного тензора напряжений S в теории конечных напряжений), что является, по-видимому, уже достаточно общепринятым в механике деформируемых тел, например, [499, 500, 155, 30, 49, 334].

Так, для теории «2» (*Первый вариант теории малых докритических деформаций*) основные соотношения имеют следующий вид:

уравнения движения –

$$\nabla_i \left[(g_n^j + \nabla_n u_0^j) \sigma^{in} + \sigma_0^{in} \nabla_n u^j \right] - \rho \ddot{u}^j + \rho F^j = 0; \quad (2.15)$$

соотношения для определения контравариантных составляющих несимметричного тензора напряжений Кирхгоффа t

$$t^{ij} = (g_n^j + \nabla_n u_0^j) \sigma^{in} + \sigma_0^{in} \nabla_n u^j; \quad (2.16)$$

условие несжимаемости остается в форме (2.7), где введено обозначение

$$q^{nj} = g^{nm} (g_m^j + \nabla_m u_0^j); \quad (2.17)$$

граничные и начальные условия остаются в форме (2.10) – (2.13);

соотношения для ковариантных составляющих тензора деформаций Грина для докритического состояния (как и для теории «1»)

$$2\varepsilon_{nm}^0 = \nabla_n u_m^0 + \nabla_m u_n^0 + \nabla_n u_p^0 \nabla_m u_0^p; \quad (2.18)$$

соотношения для определения ковариантных составляющих тензора скоростей деформаций (только для теории «2»)

$$2e_{nm} = \left[(g_n^j + \nabla_n u_0^j) \nabla_m + (g_m^j + \nabla_m u_0^j) \nabla_n \right] \dot{u}_j + \left[(\nabla_m \dot{u}_0^j) \nabla_n + (\nabla_n \dot{u}_0^j) \nabla_m \right] u_j; \quad (2.19)$$

выражения для определения контравариантных составляющих векторов правых частей граничных условий в напряжениях (2.10) (величин P^j) при действии на S_1 «следящей» нагрузки интенсивности \tilde{P} , которая направлена по нормали к S_1 ,

$$P^j = \tilde{P} N_k \left[(g_n^j + \nabla_n u_0^j) (g_m^\alpha + \nabla_m u_0^\alpha) (g^{kn} g^{m\beta} - g^{nm} g^{\beta k} - g^{n\beta} g^{mk}) + g^{k\beta} g^{j\alpha} \right] \nabla_\beta u_\alpha. \quad (2.20)$$

Вышеизложенными сведениями ограничимся при весьма кратком обсуждении теории «2» (*Первый вариант теории малых докритических деформаций*); дополнительные сведения можно получить из обзоров [337, 338] и из приведенных в списках литературы публикаций.

3. Второй вариант теории малых докритических деформаций. Основные соотношения обсуждаемого варианта теории (Теории «3») следуют из предыдущего варианта теории (Теории «2») при введении соответствующих упрощений, которые рассматривались в 1934 г. в публикации № 110 из списка литературы к обзору [337], в 1939 г. в статье [500] (стр. 360, возле рисунка) и систематически применялись рядом авторов, что отмечено в обзоре.

Основное положение (упрощение) второго варианта теории малых докритических деформаций (теории «3») заключается в том, что докритическое состояние можно определять в рамках геометрически линейной теории. В математическом аспекте вышеуказанное положение (упрощение) эквивалентно допущению, что производные от перемещений докритического состояния являются малыми величинами по сравнению с единицей и ими по сравнению с единицей можно пренебречь, что соответствует выражениям

$$g_m^j + \nabla_m u_0^j \approx g_m^j. \quad (2.21)$$

Таким образом, учитывая выражения (2.21), из соотношений (2.15) – (2.20) *первого варианта теории малых докритических деформаций (теории «2»)* получаем ос-

новные соотношения *второго варианта теории малых докритических деформаций* (теории «3») в следующем виде:

уравнения движения

$$\nabla_i(\sigma^{ij} + \sigma_0^{in}\nabla_n u^j) - \rho\ddot{u}^j + \rho F^j = 0; \quad (2.22)$$

соотношения для определения контравариантных составляющих несимметричного тензора напряжений Кирхгоффа t

$$t^{ij} = \sigma^{ij} + \sigma_0^{in}\nabla_n u^j; \quad (2.23)$$

условие несжимаемости остается в форме (2.7), где введено обозначение

$$q^{nj} = g^{nj}; \quad (2.24)$$

граничные и начальные условия остаются в форме (2.10) – (2.13);

соотношения для ковариантных составляющих тензора деформаций Грина для докритического состояния

$$2\varepsilon_{nm}^0 = \nabla_n u_m^0 + \nabla_m u_n^0; \quad (2.25)$$

соотношения для определения возмущений ковариантных составляющих тензора деформаций Грина и тензора скоростей деформации

$$2\varepsilon_{nm} = \nabla_n u_m + \nabla_m u_n; \quad 2e_{nm} = \nabla_n \dot{u}_m + \nabla_m \dot{u}_n; \quad (2.26)$$

выражения для определения контравариантных составляющих векторов правых частей граничных условий в напряжениях (2.10) (величин P^j) при действии на S_1 «следящей» нагрузки интенсивности \tilde{P} , которая направлена по нормали к S_1 ,

$$P^j = \tilde{P}(N^j \nabla_\alpha u^\alpha - N^\alpha g^{j\beta} \nabla_\beta u_\alpha). \quad (2.27)$$

Вышеизложенными сведениями ограничимся при весьма кратком обсуждении теории «3» (*второй вариант теории малых докритических деформаций*); дополнительные сведения можно получить из обзоров [337, 338] и из приведенных в списках литературы публикаций, а также из монографий [49, 334] и публикаций, приведенных в списках литературы к этим монографиям.

4. О линеаризованной теории устойчивости при малых деформациях и малых усредненных углах поворота. В монографии [155] предложена нелинейная теория при малых деформациях и малых усредненных углах поворота, которая получена посредством введения упрощений в основные соотношения теории конечных (больших) деформаций; после линеаризации из вышеуказанной нелинейной теории получена трехмерная линеаризованная теория устойчивости деформируемых тел при малых докритических деформациях и малых докритических усредненных углах поворота. В монографии [155] впервые было введено понятие об усредненных углах поворота для характеристики поворота всей окрестности рассматриваемой точки тела, при этом усреднение проводилось для всех материальных волокон, проходящих через рассматриваемую точку тела.

Следует отметить, что введенные в [155] усредненные углы поворота *не имеют непосредственного физического смысла*, поскольку они не характеризуют изменение геометрических объектов. В то же время удлинения и сдвиги, которые входят в **Основное положение (определение, упрощение)** теории «2», *имеют непосредственный физический смысл*, так как они характеризуют изменение конкретных геометрических объектов (изменение длины материальных волокон, изменение угла между двумя материальными волокнами). Отмеченное соображение относится как к построению нелинейной теории малых деформаций и малых усредненных углов поворота, так и, следующей из нее трехмерной линеаризованной теории устойчивости при малых докритических деформациях и малых докритических усредненных углах поворота.

При построении нелинейной теории малых деформаций и малых усредненных углов поворотов принимается **Основное положение (определение, упрощение)** теории «2» и вводится *дополнительное Основное положение (определение, упрощение)*

теории «4», которое сводится к тому, что *усредненные углы поворота являются малыми величинами по сравнению с единицей и этими величинами по сравнению с единицей можно пренебречь*. Естественно, что при построении соответствующей трехмерной линеаризованной теории устойчивости при малых докритических деформациях и малых докритических углах поворота используются вышеуказанные два Основных положения (определения, упрощения).

Учитывая вышеизложенное, по-видимому, необходимо считать обсуждаемую трехмерную линеаризованную теорию устойчивости при малых докритических деформациях и малых докритических усредненных углах поворота *логически непоследовательной*, поскольку в ней проводятся упрощения, считая малой по сравнению с единицей величину (усредненные углы поворота) и отбрасывая ее; при этом, как отмечено выше, указанные величины (усредненные углы поворота) *не имеют непосредственного физического смысла* и их можно рассматривать как некоторые математические выражения, связанные с описанием процесса деформирования. Более подробно обсуждение рассматриваемого вопроса (теории «4») представлено в обзоре [337] за 2001 г.; в последующие годы автор настоящей обзорной статьи не возвращался к анализу этого вопроса.

5. О теории инкрементальных деформаций. В монографии Biot М.А. [222], опубликованной в 1965 г., изложены основы теории инкрементальных деформаций и ее многочисленные применения в механике деформируемых тел; следует отметить, что монография [222] является, по-видимому, *первой монографией в мировой научной литературе* по линеаризованной механике деформируемых тел, хотя в ней и рассмотрены только плоские (двумерные) задачи. Частично многочисленные публикации М.А.Вюи приведены в списках литературы к обзору [337] и монографии [30] за 1971 г., которая была первой монографией по трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел автора настоящего обзора и в которой наряду с плоскими задачами также рассмотрены пространственные задачи обсуждаемой теории.

Теория инкрементальных деформаций [222] с точки зрения обсуждаемых позиций и классификации настоящей обзорной статьи является трехмерной линеаризованной теорией устойчивости деформируемых тел или в более широком смысле трехмерной линеаризованной механикой деформируемых тел. С точки зрения анализа подходов, которые анализировались применительно к теориям «1 – 4», теория инкрементальных деформаций (теория «5») является теорией малых докритических деформаций, так как в ней принимается **Основное положение (определение, упрощение)** теории «2»; кроме того, в обсуждаемой теории «5» также докритическое состояние определяется по геометрически линейной теории, так как в ней принимается **Основное положение (упрощение)** теории «3». Вышеуказанные упрощения и построения в обсуждаемой теории «5» являются в достаточной мере последовательными и соответствуют упрощениям и построениям теорий «2» и «3».

Дополнительно в теории инкрементальных деформаций вводятся упрощения и преобразования, связанные с определенной интерпретацией углов поворота материальных волокон, для определения которых применяются соотношения в рамках *линейной* теории; в действительности же в рамках нелинейной теории малых деформаций, из которой фактически посредством линеаризации и упрощений получены основные соотношения обсуждаемой теории «5», углы поворота материальных волокон определяются совершенно другими (по сравнению с линейной теорией) выражениями. Вышеизложенные соображения свидетельствуют о том, что обсуждаемая *теория инкрементальных деформаций [222] является непоследовательной*. К тому же по мнению автора настоящей обзорной статьи основные соотношения теории «3» являются более простыми (по структуре) по сравнению с теорией «5»; дополнительные сведения можно получить из обзора [337].

Вышеизложенными сведениями ограничимся при кратком обсуждении инкрементальной теории деформаций [222].

6. Приближенный подход в трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. Рассматриваемый приближенный подход в трехмерной теории устойчивости деформируемых тел первоначально был предложен Л.С.Лейбензоном в 1951 г. в [139] (с. 110 – 121) и стал достаточно популярным у русскоязычных исследователей после публикации А.Ю.Ишлинского [125] в 1954 г.

Сущность приближенного подхода [139, 125] заключается в *применении линейных уравнений движения* и в **сугубо приближенном введении** (в граничные условия в напряжениях) величин, которые связаны с *искривлением граничной поверхности, вызванной потерей устойчивости*. Достаточно подробное изложение и анализ подхода [139, 125] представлено в монографиях [30] за 1971 г. и [49] за 1986 г. на русском языке и [334] за 1999 г. – на английском языке, а также в краткой форме – в обзоре [337] за 2001 г. Как уже отмечалось в п. 2.1 настоящей статьи, обзор [337] на русском языке вошел в многотомную коллективную монографию «Успехи механики» (в 6-и томах, 7-и книгах), в которую включены 174 обобщающие обзорные статьи авторов из 26 стран всего мира, опубликованные в 2000 – 2009 гг. в журнале «Прикладная механика» на русском языке и в 2001 – 2010 гг. в журнале «International Applied Mechanics» на английском языке при проведении акции, посвященной **Началу III-го Тысячелетия**.

Ниже при изложении и анализе подхода [139, 125] будем следовать обзору [337]. В соответствии с монографией [49] (с. 370 – 376) основные уравнения приближенного подхода [139, 125] (линейные уравнения) имеют следующий вид:

$$\nabla_i \sigma^{ij} - \rho \ddot{u}^j = 0, \quad (2.28)$$

а граничные условия на части поверхности S_1 [139, 125] могут быть представлены в форме

$$N_i (\sigma^{ij} + \sigma_0^{mj} g^{ni} \nabla_n u_m) \Big|_{S_1} = P^j. \quad (2.29)$$

Дальнейшее возможное упрощение граничных условий (2.29) в соответствии с [139, 125] также представлено в монографии [49] (с. 374).

Анализ приближенного подхода [139, 125] выполнен в монографиях [30, 49, 334] и обзоре [337], исходя из строгих линеаризованных постановок задач ТЛТУДТ (теории «1» – «3») с привлечением лагранжевых координат; следует отметить, что привлечение лагранжевых координат является общепринятым в механике деформируемых тел. Не останавливаясь на изложении анализа в [30, 49, 334], приведем лишь результаты указанного анализа в весьма краткой форме, что можно сформулировать в виде следующих двух позиций.

1. *Подход [139, 125] является сугубо приближенным и не следует из строгой линеаризованной постановки (теории «1» – «3») ни при какой логически обоснованной системе упрощений.*

2. **Неверным является утверждение некоторых авторов о том, что подход [139, 125] следует из ТЛТУДТ в результате пренебрежения в уравнениях движения членами порядка углов поворота и сохранения членов такого же порядка в граничных условиях в напряжениях.**

Вышеизложенные результаты [30, 49, 334] относятся лишь к общему анализу приближенного подхода [139, 125]; безусловно более впечатляющей является информация о точности результатов решения конкретных задач, полученных в рамках подхода [139, 125] (как и в рамках любого сугубо приближенного подхода в механике).

С целью анализа точности результатов, полученных с привлечением приближенного подхода [139, 125], обычно рассматривают простейшую задачу – плоскую задачу об устойчивости шарнирно-опертой пластины постоянной толщины при осевом сжатии; при этом удобно ввести обозначения:

$P_{эл}$ – эйлерова критическая сила (величина критической нагрузки, вычисленной с привлечением гипотезы плоских сечений или гипотезы Кирхгоффа – Лява);

$P_{трех}$ – величина критической нагрузки, вычисленной в рамках трехмерной теории устойчивости.

Исходя из общеизвестных и общепринятых соображений физического характера (при уменьшении числа степеней свободы величины критических значений параметров системы должны увеличиваться или, в крайнем случае, не уменьшаться), в рассматриваемом примере можем записать, что *должно выполняться условие*

$$P_{трех} \leq P_{эл} \quad (2.30)$$

и не должно выполняться условие

$$P_{\text{трех}} \geq P_{\text{эл}}. \quad (2.31)$$

В аналитической форме в публикациях в периодических изданиях [277] за 1967 г., [22] за 1968 г. и [24] за 1969 г., а также в монографиях [30, 49, 334] строго доказано, что даже для простейшей ТЛТУДТ (теории «3») выполняется условие (2.30); как следует из решения [125] этой же задачи в рамках приближенного подхода [139, 125] для приближенного подхода выполняется условие (2.31), которое не должно выполняться из общеизвестных соображений физического характера.

Таким образом, приближенный подход [139, 125] приводит не только к количественным погрешностям, но и к качественно неверным результатам. Можно считать, что в русскоязычной литературе вышеизложенная ситуация является известной и доказанной в аналитической форме с 1967 – 1969 гг.

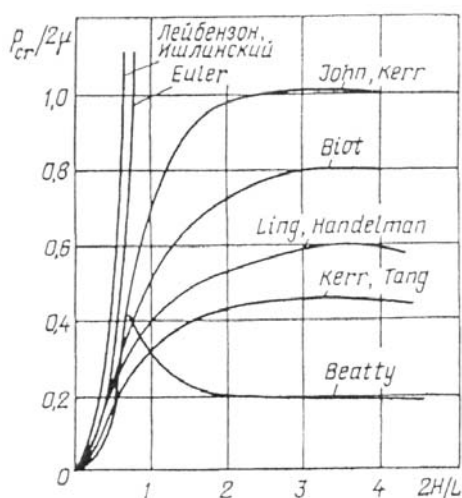


Рис. 2.1

В англоязычной научной литературе вышеизложенная ситуация, по-видимому, стала известной после публикации статьи [546] в 1969 г., в которой изложены результаты численного исследования рассматриваемой задачи для несжимаемого материала и проведено сравнение результатов, полученных различными авторами для этой задачи. В соответствии с [546] на Рис. 2.1 для вышеуказанной задачи представлена зависимость безразмерной величины критической нагрузки от безразмерного параметра тонкостенности; причем на Рис. 2.1 возле каждой кривой, представляющей вышеуказанную зависимость, указаны фамилии авторов, на основании решения которых получена эта зависимость. Отметим, что на Рис. 2.1 кривая, связанная с именем Эйлера, получена на основании двумерной (в рассматриваемой задаче одномерной) прикладной теории, построенной с привлечением гипотезы Кирхгоффа – Лява; все другие кривые, представленные на Рис. 2.1 [546], получены на основании различных постановок задач трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел (ТЛТУДТ). Из результатов, представленных на Рис. 2.1 [546], следует, что для всех указанных решений, основанных на ТЛТУДТ, все кривые лежат правее кривой, построенной на основе применения гипотезы Кирхгоффа – Лява; следовательно, для всех приведенных решений, построенных на основе ТЛТУДТ, выполняется следующее условие:

$$P_{\text{трех}} < P_{\text{эл}}, \quad (2.32)$$

которое является более сильным по сравнению с условием (2.30). Также из результатов, представленных на Рис. 2.1, следует, что лишь для решения, построенного на основе приближенного подхода [139, 125], кривая лежит левее кривой, построенной на основе теории с применением гипотезы Кирхгоффа – Лява; следовательно, выполняется условие

$$P_{\text{трех}} > P_{\text{эл}}, \quad (2.33)$$

которое является более сильным по сравнению с условием (2.31). При этом, как уже отмечалось выше, условие (2.31) не должно выполняться в силу общеизвестных и общепринятых соображений физического характера.

Таким образом, результаты [546], полученные на основе численного исследования, и результаты [277, 22, 24] и других публикаций, полученные на основе исследований в аналитической форме, качественно совпадают и свидетельствуют о том, что приближенный подход [139, 125] может приводить также к качественно неверным результатам.

Учитывая вышеизложенное, приходим к выводу, что подход [139, 125] является сугубо приближенным и никак не следует из ТЛТУДТ; к тому же подход [139, 125] может приводить не только к количественным погрешностям, но также и к качественно неверным результатам. В связи с вышесформулированным выводом все результаты, полученные с привлечением подхода [139, 125], требуют дополнительных исследований с целью определения достоверности этих результатов и соответствия их рассматриваемым явлениям механики и смежных областей естествознания; краткая информация о применении подхода [139, 125] к исследованию проблем механики и смежных областей естествознания представлена в обзоре [337].

Таким образом, в настоящем пункте (п. 2.2) представлены краткие, но информативные сведения о 6-и трехмерных теориях устойчивости деформируемых тел, которые, в определенном смысле, являются основными и наиболее часто применяемыми в настоящее время. Ниже в настоящем пункте (п. 2.2) рассмотрим заключительную информацию, которая оформлена в виде Примечаний.

Примечание 2.3. В настоящем пункте (п. 2.2) в краткой форме применительно к 6-и рассматриваемым теориям (теории «1 – 6») приведены основные соотношения, которые сформулированы относительно возмущений напряжений и перемещений. Если к указанным соотношениям присоединить линеаризованные определяющие уравнения (в частности, линеаризованные соотношения упругости), то получаем замкнутые системы уравнений, сформулированные относительно возмущений, для рассматриваемых моделей механики деформируемых тел.

Примечание 2.4. В вышеуказанные замкнутые системы уравнений входят величины напряжений докритического состояния, которые отмечены индексом «нуль» и которые являются неизвестными (их надо определять в результате решения задач устойчивости) в ТЛТУДТ. Если в замкнутых системах уравнений считать напряжения, отмеченные индексом «нуль», известными величинами, то получаем основные соотношения линеаризованной механики деформируемых тел для материалов с начальными (остаточными) напряжениями.

Примечание 2.5. Рассмотренные шесть теорий можно характеризовать по строгости их построения (по последовательности и точности).

Теория 1 (*Теория больших (конечных) докритических деформаций*) является наиболее общей, последовательной и точной теорией.

Теория 2 (*Первый вариант теории малых докритических деформаций*) является последовательной (получена из теории «1» при общепринятых допущениях о малости удлинений и сдвигов) и не совсем точной (вводились указанные допущения) теорией.

Теория 3 (*Второй вариант теории малых докритических деформаций*) является последовательной (дополнительно к упрощениям теории «2» вводилось общепринятое допущение об определении докритического состояния по геометрически линейной теории) и не совсем точной (вводились указанные упрощения) теорией.

Теория 4 (*Линеаризованная теория устойчивости при малых деформациях и малых усредненных углах поворота*) является непоследовательной (вводится допущение о малости величины, не имеющей непосредственного физического смысла – о малости усредненных углов поворота) и не точной (вводится указанное упрощение) теорией.

Теория 5 (*Теория инкрементальных деформаций*) является линеаризованной, непоследовательной (кроме общепринятых допущений теорий «2» и «3» вводятся упрощения, вызванные непоследовательной интерпретацией углов поворота) и не точной (вводятся указанные упрощения) теорией.

Теория 6 (*Приближенный подход в трехмерной теории устойчивости деформируемых тел*) является непоследовательной (никак не следующей из строгих линеаризованных теорий) и не точной (приводит к качественно отличным результатам и количественным погрешностям) теорией; это сугубо приближенный подход, приводящий к вышеуказанной ситуации.

Примечание 2.6. В настоящем пункте (п. 2.2) при изложении процедуры построения теории «2» (*Первый вариант теории малых докритических деформаций*) во вводной части указанного изложения было указано два существующих способа по-

строения основных соотношений обсуждаемой теории. При *первом* способе все основные соотношения обсуждаемой теории «2» получают из соответствующих соотношений теории «1» (*Теории больших (конечных) докритических деформаций*) посредством введения в указанные соотношения теории «1» Основных упрощений нелинейной теории малых деформаций; при таком способе получены все основные соотношения теории «2», которые приведены в настоящей обзорной статье. При *втором* способе вначале получают основные соотношения нелинейной теории малых деформаций, исходя из Основного положения (упрощения) нелинейной теории малых деформаций и сопутствующих соображений физического характера; потом проводят линеаризацию полученных соотношений нелинейной теории малых деформаций, следуя процедуре, изложенной во вводной части п. 2.1 настоящей обзорной статьи.

Как уже отмечалось, не всегда результаты, полученные первым и вторым способом, совпадают; в связи с отмеченной ситуацией ниже рассмотрим пример такого несовпадения применительно к выражению (2.14) для определения контравариантных составляющих векторов правых частей граничных условий в напряжениях (2.10) (величин P^j) при действии на S_1 «следящей» нагрузки интенсивности \tilde{P} , которая направлена по нормали к S_1 . Так, при реализации *первого* способа для определения указанных величин получено выражение (2.20) применительно к теории «2» (*Первый вариант теории малых докритических деформаций*) и выражения (2.27) применительно к теории «3» (*Второй вариант теории малых докритических деформаций*); следует отметить, что выражения (2.20) и (2.27) не совпадают между собой, что и следовало ожидать в силу введения в теории «3» дополнительно **Основного положения** этой теории. При реализации *второго* способа получено для теории «2» и теории «3» одинаковое следующее выражение:

$$P^j = \tilde{P} N^\beta \nabla_\beta u^j ; \quad (2.34)$$

причем выражение (2.34) получено и применялось в публикациях практически всех исследователей, занимающихся нелинейной теорией малых деформаций.

Вполне очевидно, что выражения (2.34) не совпадают ни с одним из выражений (2.20) и (2.27). По-видимому, можно считать, что отмеченное несовпадение результатов является следствием существующей в процедуре построения теорий (проведение преобразований при построении теорий) следующей ситуации применительно к теории «2» (*Первый вариант теории малых докритических деформаций*).

Линеаризация основных соотношений теории больших (конечных) деформаций + введение в указанные соотношения упрощений, соответствующих **Основному положению** (определению) теории малых деформаций \neq построению основных соотношений нелинейной теории малых деформаций на основе **Основного положения** (определения) малых деформаций и сопутствующих соображений физического характера + линеаризация полученных указанным образом основных соотношений.

Поскольку трехмерные линеаризованные теории устойчивости деформируемых тел, по существу, оперируют с возмущениями рассматриваемых величин (малыми величинами), то приведенный пример свидетельствует о необходимой строгости и осторожности. Достаточно точные выражения (2.20) и (2.27), как будет отмечено в последующем изложении, дают возможность последовательно рассмотреть некоторые общие вопросы в отличие от выражений (2.34).

Вышеизложенными сведениями ограничимся при анализе построения и классификаций основных теорий и подходов в трехмерной теории устойчивости деформируемых тел; дополнительные сведения можно получить из монографии [49, 334] и обзоров [337, 338], а также из других публикаций, представленных в списке литературы к настоящей обзорной статье.

2.3. О критериях устойчивости в ТЛТУДТ. Прежде всего, целесообразно отметить, что критерии устойчивости в ТЛТУДТ являются приложением, развитием и обобщением соответствующих критериев устойчивости, которые существуют в двумерных и одномерных прикладных теориях устойчивости тонкостенных деформируемых элементов конструкций (стержни, пластины и оболочки), построенных с при-

влечением гипотез плоских сечений, Кирхгоффа – Лява, Тимошенко и т.д. Отмеченная ситуация дает возможность рассмотреть в достаточно краткой форме различные критерии устойчивости деформируемых тел применительно к различным моделям, отмечая специфику их применения к ТЛТУДТ; дополнительные сведения при этом можно получить из монографий [49, 334], в достаточно последовательной форме эти сведения представлены в обзоре [337].

Предварительно в общем виде для всех моделей деформируемых тел приведем некоторые сведения, относящиеся к классификации постановок задач в соответствии со структурой возмущений составляющих массовых сил F^j в (2.5) и поверхностных сил P^j в (2.10). В достаточно общем случае соответствующие контравариантные составляющие векторов этих сил можно представить в виде

$$F^j = F_{(1)}^{j\alpha} u_\alpha + F_{(2)}^{j\alpha} \dot{u}_\alpha; \quad P^j = P_{(1)}^{j\alpha} u_\alpha + P_{(2)}^{j\alpha} \dot{u}_\alpha, \quad (2.35)$$

где через $F_{(k)}^{j\alpha}$ и $P_{(k)}^{j\alpha}$ обозначены дифференциальные операторы по пространственным θ^n , коэффициенты которых зависят от θ^m и времени τ .

К динамическим задачам теории устойчивости относятся задачи, для которых выполняется хотя бы одно из следующих условий:

$$F_{(2)}^{j\alpha} \neq 0; \quad P_{(2)}^{j\alpha} \neq 0. \quad (2.36)$$

К статическим задачам теории устойчивости относятся задачи, для которых выполняются следующие условия:

$$F_{(2)}^{j\alpha} = 0; \quad P_{(2)}^{j\alpha} = 0. \quad (2.37)$$

В качестве примера статических задач, для которых выполняются более частного вида условия по сравнению с условиями (2.37), можно указать статические задачи, для которых выполняются условия

$$F_{(2)}^{j\alpha} = 0; \quad P_{(2)}^{j\alpha} = 0; \quad F_{(1)}^{j\alpha} = 0; \quad P_{(1)}^{j\alpha} \neq 0. \quad (2.38)$$

К таким статическим задачам относятся задачи при действии «следающей» нагрузки в виде равномерного давления, в обсуждаемом случае дифференциальные операторы определяются из выражений (2.14) для теории «1» (*Теории больших (конечных) докритических деформаций*), из выражений (2.20) для теории «2» (*Первый вариант теории малых докритических деформаций*) и выражения (2.27) для теории «3» (*Второй вариант теории малых докритических деформаций*)

Ниже, следуя изложению обзорной статьи [337], рассмотрим информацию о критериях устойчивости отдельно для основных моделей механики деформируемых тел.

2.3.1. Упругие тела. Рассмотрим устойчивость состояния равновесия упругого тела. В этом случае предполагается, что *после перехода в смежную равновесную форму равновесия (возмущенное состояние) при уменьшении параметра нагружения (при однопараметрическом нагружении) упругое тело возвращается в исходное (невозмущенное) состояние*; в отмеченной особенности заключается специфическое свойство теории устойчивости упругих систем, которое нельзя перенести на неупругие тела. Обычно при исследовании устойчивости состояния равновесия упругих тел применяются динамический или статический (бифуркационный) критерии, соответствующие динамическому и статическому (методу Эйлера) методам исследования.

При применении *динамического критерия устойчивости* состояние равновесия является устойчивым, если возмущения со временем затухают (при $\tau \rightarrow \infty$); условно при этом также считают состояние равновесия *устойчивым*, если для возмущений получают только периодические по τ решения. При применении динамического критерия устойчивости состояние равновесия считается *неустойчивым*, если возмущения неограниченно возрастают при $\tau \rightarrow \infty$.

При применении *динамического метода исследования* используются уравнения движения (2.5), (2.15), (2.22), (2.28) и другие им соответствующие граничные условия; при этом под им соответствующие понимаются уравнения движения и граничные условия, записанные в другой форме. Во всех величинах возмущений, которые входят в вышеуказанные уравнения движения и граничные условия, выделяется множитель $e^{\chi t} \Omega \tau$; в результате из вышеуказанных уравнений и граничных условий получаем задачу на собственные значения относительно параметра Ω . Обозначим собственные значения вышеформулированной задачи через Ω_k ($k = 1, 2, \dots, \infty$). Учитывая вышеизложенное, будем считать состояние равновесия устойчивым (при принятом динамическом критерии), если для всех собственных значений Ω_k выполняется условие

$$\text{Im} \Omega_k \geq 0; \quad k = 1, 2, \dots, \infty. \quad (2.39)$$

Граница области устойчивости в пространстве параметров нагружения определяется при этом в результате минимизации по различным комбинациям параметров нагружения при условии, что эти параметры нагружения соответствуют условиям для собственных чисел в следующем виде:

$$\text{Im} \Omega_k = 0; \quad k = 1, 2, \dots, \infty. \quad (2.40)$$

При применении *статического метода* исследования (метод Эйлера) и *статического критерия* устойчивости состояния равновесия (в этом случае следует принять $\Omega \equiv 0$) получаем задачу на собственные значения относительно параметров нагружения, которые входят в основные соотношения, указанные выше. Граница области устойчивости в пространстве параметров нагружения (критические значения параметров нагружения) определяется в результате минимизации по различным комбинациям параметров нагружения, соответствующим полученным собственным числам.

Необходимо отметить, что динамический метод исследования применим к динамическим и статическим задачам; статический же метод исследования применим только к исследованию статических задач и то далеко не ко всем статическим задачам. Поскольку применение статического метода (при его реализации) несравнимо проще по сравнению с применением динамического метода, то всегда возникает проблема формулировки условий применимости статического метода (метода Эйлера) для статических задач. Достаточные условия применимости метода Эйлера в общей форме для упругих и пластических тел с достаточно общей формой определяющих уравнений будут приведены также в настоящем параграфе (§2) при дальнейшем изложении основ ТЛТУДТ.

Вышеизложенными сведениями ограничимся при весьма кратком обсуждении общепринятых критериев устойчивости состояния равновесия упругих тел; вышеприведенное изложение рассматриваемого вопроса совпадает с изложением этого вопроса в обзорной статье [337], поскольку со времени публикации статьи [337] в 2001 г. не произошло изменений в общепринятых взглядах по обсуждаемой проблеме. Дополнительно следует отметить, что применительно к ряду проблем механики упругих тел (например, к теории удара по упругим телам) используются и специфические более приближенные критерии устойчивости упругих тел.

2.3.2. Пластические тела. При появлении в процессе деформирования даже достаточно малых пластических деформаций *в силу их необратимости* получаем (при попытке применить концепцию теории упругой устойчивости) *неустойчивое* состояние равновесия, так как система, получившая пластические деформации, при уменьшении параметра нагружения уже никогда не возвращается в исходное положение. В связи с этим в механике неупругих тел никогда не рассматривается вопрос о возвращении системы в исходное состояние после потери устойчивости. Учитывая вышеизложенные соображения, в механике пластических систем рассматривают вопрос об устойчивости состояния равновесия по поведению возмущений, которые описываются линеаризованной теорией; при этом вопрос о возвращении системы в исходное положение при уменьшении нагрузки, как уже отмечалось, никогда не предусматривается.

Следует подчеркнуть, что при исследовании устойчивости состояния равновесия в точке O_0 на диаграмме $\sigma \sim \varepsilon$ (Рис. 2.2) с привлечением линеаризованной системы уравнений, при *строгом* подходе, для возмущений необходимо рассматривать наличие процессов активного нагружения и разгрузки. Таким образом, при строгом рассмотрении для возмущений получаем линеаризованную систему уравнений с изменяющейся зоной разгрузки, что, по существу, исключает возможность получения решений конкретных задач в рамках ТЛТУДТ. Подобная сложность возникает и в теории устойчивости тонкостенных систем, основанных на двумерных прикладных теориях тонкостенных систем; в этом случае в теории устойчивости пластических систем для ряда задач удается преодолеть вышеформулированную сложность посредством использования известных гипотез о распределении напряженно-деформированного состояния по толщине тонкостенных систем.

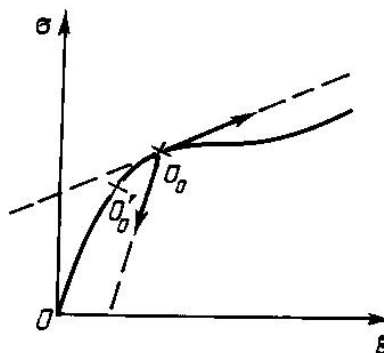


Рис. 2.2

Для преодоления вышеуказанных сложностей при исследовании задач ТЛТУДТ для пластических тел сформировалось **два подхода**:

первый подход основан на исследовании устойчивости состояния равновесия с применением *допущения* – обобщенной концепции продолжающегося нагружения;

второй подход основан на исследовании устойчивости процесса деформирования с применением *допущения* – склонности системы к потере устойчивости при равноактивной бифуркации.

Не рассматривая и не анализируя вначале каждый из двух указанных подходов, формулируем **основной вывод**, который следует из отмеченного анализа. **Основной вывод** заключается в том, что *при двух различных подходах (первый – исследование устойчивости состояния равновесия; второй – исследование устойчивости процесса деформирования) и при различных допущениях для каждого из подходов (для первого – обобщенная концепция продолжающегося нагружения без выяснения вида дополнительной нагрузки, компенсирующей появление дополнительных зон разгрузки при потере устойчивости; для второго – склонность к потере устойчивости при равноактивной бифуркации) приходим к одной и той же линеаризованной задаче типа п. 2.2 настоящего параграфа с известными зонами разгрузки, которые определяются при анализе докритического состояния.*

Таким образом, учитывая вышеформулированный **Основной вывод**, при исследовании трехмерных линеаризованных задач теории устойчивости для пластических тел приходим в соответствии с вышеизложенными двумя подходами к линеаризованным задачам, которые по структуре соответствуют задачам п. 2.2; при этом в соответствующие уравнения и граничные условия п. 2.2 необходимо ввести соотношения линеаризованных определяющих уравнений соответствующей теории пластичности. С учетом критериев и подходов для пластических тел (на основе вышеуказанных линеаризованных систем уравнений) при решении конкретных задач применяются динамический и статический методы исследования в такой же форме, как и для упругих тел. Следовательно, можно считать, что доказано следующее Утверждение.

Утверждение. При рассмотренных подходах исследование задач трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел можно проводить единообразно для упругих и пластических тел; при этом для пластических тел следует определять докритическое состояние с учетом изменяющихся в процессе нагружения зон разгрузки.

Рассмотрим в краткой форме *первый* подход, который основан на применении обобщенной концепции продолжающегося нагружения. Впервые концепция продол-

жающегося нагружения применительно к теории устойчивости тонкостенных пластических систем, основанной на двумерных прикладных теориях, была предложена Ф.Шенли (статья под № 104 за 1951 г. в списке литературы к обзору [337]). Обобщение вышеуказанной концепции на ТЛТУДТ, называемое обобщенной концепцией продолжающегося нагружения, рассматривалось в публикациях автора настоящей обзорной статьи, например, статья за 1968 г. (№ 25 в списке литературы к обзору [337]), статья за 1969 г. (№ 27 в списке литературы к обзору [337]) и статья [33] за 1973 г., а также в ряде работ других авторов; сравнительно подробное обсуждение обобщенной концепции продолжающегося нагружения представлено в монографиях автора настоящего обзора [34, 49, 334].

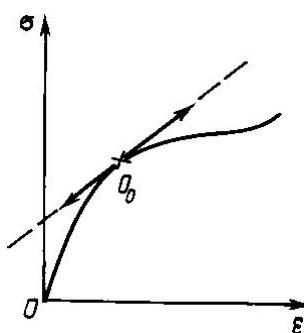


Рис. 2.3

В *обобщенной концепции* продолжающегося нагружения принимается, что об устойчивости состояния равновесия упругопластических тел (в рамках трехмерных теорий) можно судить по поведению возмущений, которые описываются линеаризованными уравнениями п. 2.2 с привлечением линеаризованных определяющих уравнений соответствующей теории пластичности; при этом зоны разгрузки, возникшие в докритическом состоянии, *не изменяются*. Кроме того, считается, что процесс потери устойчивости начинается *несколько раньше*, чем достигается критическое состояние (состояние нейтрального равновесия); в связи с этим процесс потери устойчивости происходит при *незначительном, но продолжающемся*

нагружении, и разгрузка в процессе потери устойчивости не происходит. При таком подходе фактически вместо ситуации, представленной на Рис. 2.2, исследуется ситуация, представленная на Рис. 2.3.

Вышеизложенными сведениями ограничимся при весьма кратком обсуждении *первого* подхода, дополнительные сведения можно получить из монографий [34, 49, 334]. *Второй* подход также достаточно подробно изложен в монографиях [34, 49, 334], в связи с этим в настоящей статье не будем приводить сведения, относящиеся ко второму подходу; к тому же, как отмечено выше в **Основном выводе**, при применении *первого* и *второго* подходов приходим к одинаковым линеаризованным задачам.

В заключительной части п. 2.3.2, следуя обзору [337], приведем два Примечания, способствующих более четкому пониманию обсуждаемых вопросов применительно к ТЛТУДТ для пластических тел.

Примечание 2.7. Необходимо отметить существенное принципиальное отличие (как по строгости и логичности анализа, так и по соответствию физическому смыслу рассматриваемых явлений) следующих двух ситуаций. *Первая ситуация* связана с применением динамического метода исследования устойчивости пластических тел на основе анализа линеаризованной системы, полученной с применением вышеизложенных двух подходов в ТЛТУДТ; естественно, в этом случае не учитывается изменение зон разгрузки при исследовании колебательных движений для возмущений, соответствующих применению динамического метода анализа. В этом случае определяются величины критических нагрузок (конечные величины) в результате анализа поведения малых возмущений; при этом применяются логически и физически обоснованные подходы и концепции. *Вторая ситуация* возникает при исследовании динамических задач для пластических тел (определение напряженно-деформированного состояния), например при исследовании колебаний пластических тел; ряд авторов в этой ситуации, ссылаясь на использование теории малых деформаций, также не учитывают изменение зон разгрузки при колебаниях, т.е. по существу вместо явления на Рис. 2.2 рассматривают явление на Рис. 2.3. Следует подчеркнуть, что в этом случае рассматриваются не малые величины (возмущения — как в линеаризованной теории устойчивости), а величины (напряжения и перемещения при колебаниях), значения которых определяются уровнем внешней нагрузки. Кроме того, при указанной замене яв-

лений (Рис. 2.2 на Рис. 2.3) правильно описывается поведение пластических тел на одном полупериоде и неправильно описывается – на таком же втором полупериоде колебаний. Таким образом, неучет изменения зон разгрузки во *второй ситуации* приводит к результатам, *не соответствующим* рассматриваемому физическому явлению.

Примечание 2.8. Концепцию продолжающегося нагружения (как в рамках прикладных двумерных теорий устойчивости тонкостенных пластических элементов конструкций, так и обобщенный ее вариант применительно к ТЛТУДТ) можно считать приближенным приемом при исследовании устойчивости состояния равновесия пластических тел, если принять следующую ее интерпретацию. Будем считать, что точка O_0 на Рис. 2.2 является точкой бифуркации применительно к конкретной задаче для пластического тела. Для приближенного определения (вычисления) точки O_0 рассмотрим на диаграмме $\sigma \sim \varepsilon$ на Рис. 2.2 точку O'_0 , которая находится ниже точки O_0 . При нагружении в окрестности точки O'_0 нагружение будет продолжаться и разгрузки возникать не будет; при этом примем, что продолжающееся нагружение в окрестности точки O'_0 будет компенсировать появление дополнительных зон разгрузки, если в окрестности точки O'_0 рассматривать линеаризованную задачу типа Рис. 2.3. Приближая сколь угодно близко точку O'_0 к точке O_0 , можно сохранять вышеприведенные соображения; в результате можно сколь угодно точно определить положение точки O_0 на диаграмме Рис. 2.2.

Вышеприведенными сведениями ограничимся при весьма кратком рассмотрении критериев устойчивости состояния равновесия пластических тел; дополнительная информация по обсуждаемому вопросу представлена в монографиях [34, 49, 334].

2.3.3. Тела с реологическими свойствами. Прежде всего, целесообразно отметить, что в случае упругих (п. 2.3.1) и пластических (п. 2.3.2) тел исследование проблемы устойчивости состояния равновесия основано на анализе поведения малых возмущений, которые описываются линеаризованными трехмерными уравнениями, и в качестве критерия устойчивости при динамическом методе исследования принимается затухание возмущений во времени; естественно, что такой подход распространяется на все модели деформируемых тел, в которых учитываются упругие и пластические деформации. Вышеуказанный подход для упругих и пластических тел соответствует общепринятому традиционному подходу в механике и позволяет проводить анализ соответствующих разнообразных задач при единообразной, общей и традиционной методологии.

В случае же тел с реологическими свойствами разработанные подходы к исследованию проблемы устойчивости не имеют вышеуказанных общности и единообразия, характерных для упругих и пластических тел, применительно к исследованию разнообразных задач, что и будет следовать из дальнейшего изложения в настоящем п. 2.3.3.

В весьма краткой форме рассмотрим некоторые подходы и критерии устойчивости, которые характерны для тел с реологическими свойствами (вязкоупругие, наследственно-упругие, вязкоупругопластические и другие тела); несколько более подробная информация по этому вопросу, в основном применительно к ТЛТУДТ, приведена в монографиях [34, 49, 334]. Обычно исходят из следующего основного предположения (допущения): *об устойчивости можно судить по поведению возмущений в рамках линеаризованной задачи*; при этом в случае тел с пластическими свойствами дополнительно принимаются упрощения типа концепции продолжающегося нагружения. В дальнейшем применяется следующий общий критерий: *состояние равновесия или движения считается устойчивым, если возмущения во времени затухают, и неустойчивым – если возмущения во времени возрастают*.

Вышеизложенный подход и общий критерий являются только *общей схемой*; дальнейшее продвижение в этом научном направлении, в крайнем случае по мнению автора настоящей обзорной статьи, еще не достигнуто ввиду следующих сложностей.

При применении вышеуказанного общего критерия получаются весьма сложные линейризованные систем уравнений, так как коэффициенты этих уравнений также зависят от времени (в дополнение к зависимости от координат в случае неоднородных докритических состояний, что наблюдается для упругих и пластических тел). В связи с отмеченными сложностями в настоящее время при исследовании устойчивости тел с реологическими свойствами, в основном, применяются различные приближенные подходы, методы и критерии устойчивости. Анализ ряда отмеченных приближенных подходов, методов исследования и критериев устойчивости (как в рамках прикладных двумерных теорий тонкостенных элементов, так и в рамках ТЛТУДТ) рассматривался в монографиях [34, 49, 334] и частично в обзорах, указанных в [337]; наиболее систематизированные результаты обсуждаемого анализа представлены в обзоре [337], которому и будем следовать при дальнейшем изложении в настоящем пункте (п. 2.3.3). Также отметим, что ниже приведена информация о приближенных подходах и критериях устойчивости для тел с реологическими свойствами, в определяющие уравнения которых обязательно входят упругие деформации; таким образом, исключается информация о приближенных подходах и критериях устойчивости, которые характерны для неньютоновских жидкостей и родственных сред.

Учитывая вышеизложенные сведения и соображения, ниже, следуя обзору [337], кратко рассмотрим пять приближенных подходов и соответствующие пять приближенных критериев устойчивости состояния равновесия для тел с реологическими свойствами.

Подход 1. В случае медленных изменений коэффициентов линейризованной задачи для указанных коэффициентов как бы вводится «свое» время τ_1 (фактически фиксируется значение коэффициентов при τ_1) и для возмущений вводится время τ ; при этом принимается, что «время τ_1 и время τ не зависят друг от друга». По-видимому, можно считать, что такой подход может привести к правильным результатам лишь при исследовании поведения возмущений на малом интервале времени, за который коэффициенты системы изменяются незначительно; этот подход еще связывают как бы с «замораживанием времени». Вышеизложенный подход в ТЛТУДТ применялся в монографии [30] за 1971 г. и в указанных в ней публикациях в периодических изданиях, например, [28]. В связи с предполагаемым в этом случае медленным изменением коэффициентов линейризованных систем можно также дополнительно ввести, следуя монографиям [34, 49, 334], следующее допущение:

$$\dot{u}_m^0 \approx 0. \quad (2.41)$$

Подход 2. Достаточно широкое распространение получил подход, когда вопрос об устойчивости тел с реологическими свойствами исследуется на основе анализа предельных систем; при этом под предельными системами понимаются линейризованные системы уравнений и соответствующие граничные условия (как в рамках прикладных двумерных теорий тонкостенных элементов конструкций, так и в рамках ТЛТУДТ), когда в коэффициентах принято $\tau \rightarrow \infty$. В качестве примера можно указать статью (№ 138 в списке литературы к обзору [337] и ряд других публикаций; в этом случае исследуется асимптотическая устойчивость. Частично обзор результатов, полученных с привлечением рассматриваемого приближенного подхода, приведен в обзорных статьях (№ 73 и № 74 в списках литературы к обзору [337]).

Целесообразно отметить, что приближенный *Подход 2* следует из приближенного *Подхода 1*, если в последнем принять $\tau_1 \rightarrow \infty$.

Подход 3. В случае медленных движений при исследовании устойчивости состояния равновесия тел с реологическими свойствами можно отбросить силы инерции. Рассматриваемый подход для прикладных двумерных теорий тонкостенных элементов конструкций при ползучести применялся в монографии за 1966 г. (№ 102 в списке литературы к обзору [337]) и назван там квазистатическим подходом. Обсуждаемый подход применялся в ТЛТУДТ в монографии [30] за 1971 г. и в указанных в ней публикациях в периодических изданиях, например [28], при однородных докритических состояниях.

Очевидно, что обсуждаемый квазистатический подход может привести к правильным результатам лишь при определенном типе внешних нагрузок; в случае упругих и пластических тел такой подход называется статическим методом исследования устойчивости состояния равновесия.

Подход 4. Приближенный подход и приближенный критерий устойчивости для тел и тонкостенных элементов конструкций с реологическими свойствами. В статье Н.Хоффа [495] за 1954 г. был предложен приближенный подход и приближенный критерий, получивший название приближенного критерия устойчивости Хоффа, для исследования устойчивости *при ползучести* тонкостенных систем (стержни, пластины и оболочки) в рамках одномерных и двумерных прикладных теорий, построенных с привлечением соответствующих гипотез. В соответствии с подходом [495] вводится малое отклонение $f(x)$ первоначально прямолинейной формы тонкостенных систем и в дальнейшем (на основе решения соответствующей задачи *при ползучести*) анализируется изменение $f(x, \tau)$ во времени при постоянной или возрастающей внешней нагрузке. Критическое время τ_{cr} при этом определяется из следующего условия:

$$|f(x, \tau) \rightarrow \infty| \text{ при } \tau \rightarrow \tau_{cr}. \quad (2.42)$$

В случае слоистых и волокнистых композитных материалов для исследования задач устойчивости при *вязкоупругом* деформировании необходимо вводить малые отклонения слоев и волокон от прямолинейной формы (типа величины $f(x)$ в случае [495] тонкостенных элементов конструкций) во внутреннюю структуру композитного материала. Вышеотмеченная процедура введения малых отклонений в структуру композитного материала осуществляется при помощи соответствующих методов механики искривленных композитов, изложенных в монографии [197]. Обсуждаемый приближенный критерий устойчивости слоистых и волокнистых композитных материалов при *вязкоупругом* деформировании рассматривался в публикациях в периодических изданиях [210, 186, 204] в 1997 – 1999 гг. и в ряде других публикаций, анализ которых представлен в обзорной статье [187] за 2007 г. При рассматриваемом подходе критическое время τ_{cr} определяется из условий типа (2.42), при этом также из соответствующих выражений также вычисляются величины σ_T и ε_T .

Подход 5. Приближенный подход и приближенный критерий устойчивости для тел и элементов конструкций с реологическими свойствами. В статье Дж.Джерард и А.Гильберт за 1959 г. (№ 77 в списке литературы к обзору [337]) был предложен приближенный подход и приближенный критерий, получивший название метод критической деформации, для исследования устойчивости *при ползучести* тонкостенных систем (пластины и оболочки) в рамках двумерных прикладных теорий, построенных с привлечением соответствующих гипотез. В соответствии с методом критической деформации или критерием критической деформации принимается, что критическое время и критические силы при ползучести определяются из равенства деформации при ползучести и критической деформации, вычисленной в предположении, что тонкостенный элемент конструкции работает в упругой или упруго-пластической области. Таким образом, критическое время определяется как время, необходимое для достижения при заданной нагрузке деформацией значения критической деформации для упругого или упруго-пластического тела. Для сложного напряженно-деформированного состояния критическая деформация вычисляется по величине интенсивности сдвига (по инвариантной величине).

В монографии [54] (с. 604 – 614) и в двухтомной монографии [57] (т. 2, с. 636 – 648), а также в публикациях в периодических изданиях, например, [306], рассмотрено применение обсуждаемого критерия критической деформации к построению теории устойчивости (ТЛТУДТ) простейшего тела с реологическими свойствами (ортотропного линейного наследственно-упругого тела нестареющего типа); отмеченные результаты составили основу континуальной теории длительного разрушения композитных материалов при сжатии.

Примечание 2.9. Из приведенных выше в п. 2.3.3 сведений следует, что для тела с реологическими свойствами, в отличие от упругих и пластических тел, в настоящее время *отсутствуют общий* метод и соответствующий четко сформулированный критерий устойчивости, позволяющие проводить исследования разнообразных задач; для упругих и пластических тел таким достаточно общим методом является динамический метод. Кроме того, выше рассмотренные приближенные критерии устойчивости для тел с реологическими свойствами не всегда соответствуют общепринятому традиционному подходу в механике, когда исследование устойчивости состояния равновесия основано на анализе поведения малых возмущений, которые описываются линеаризованными уравнениями, и в качестве критерия устойчивости принимается затухание возмущений во времени при динамическом методе исследования.

Вышеизложенными сведениями ограничимся при весьма кратком обсуждении рассматриваемых вопросов для тел с реологическими свойствами. Необходимо в заключение только отметить, что в теории устойчивости материалов (тел, сред) и элементов конструкций с реологическими свойствами используются и другие подходы и критерии; выше в п. 2.3.3 рассмотрены только основные, с точки зрения автора настоящей обзорной статьи, подходы и критерии, которые используются наиболее часто.

2.4. Общие вопросы ТЛТУДТ. В настоящем пункте (п. 2.4) в весьма краткой форме приведем сведения, относящиеся к следующим общим вопросам ТЛТУДТ: общая формулировка задач ТЛТУДТ для различных моделей деформируемых тел; достаточные условия применимости статического метода исследования (метода Эйлера); примеры различного типа вариационных принципов ТЛТУДТ. Вышеуказанные общие вопросы ТЛТУДТ рассмотрены достаточно последовательно (с возможной степенью общности для различных моделей деформируемых тел) в монографиях [34] за 1977 г., [49] за 1986 г. и [334] за 1999 г., а также в ряде обзорных статей, которые включены в список литературы к настоящей обзорной статье; в наиболее сжатом виде обсуждаемые вопросы приведены в обзоре [337], что и будет использовано ниже в настоящем пункте. Общие вопросы ТЛТУДТ будем рассматривать лишь для трех теорий, которые в соответствии с терминологией п. 2.2 настоящего параграфа (§2) имеют названия: **теория 1** (*теория больших (конечных) докритических деформаций*), **теория 2** (*первый вариант теории малых докритических деформаций*) и **теория 3** (*второй вариант теории малых докритических деформаций*); причем рассмотрение проводится в единой общей форме для вышеуказанных трех теорий, которые в соответствии с **Примечанием 2.5** являются последовательными.

2.4.1. Общая формулировка задач ТЛТУДТ для различных моделей деформируемых тел. Обсуждаемые результаты представим отдельно для сжимаемых тел, вводя тензор четвертого ранга ω , и отдельно для несжимаемых тел, вводя тензор четвертого ранга κ , а также отдельно рассмотрим некоторые свойства симметрии составляющих введенных тензоров ω и κ . Рассматриваемые результаты получаем, вводя линеаризованные определяющие уравнения для различных моделей деформируемых тел в соответствующие выражения (2.5) – (2.14) для **теории 1**, (2.15) – (2.20) для **теории 2** и (2.22) – (2.27) для **теории 3**. Кроме того, воспользуемся выражениями (2.35) для определения в достаточно общем случае ковариантных составляющих векторов возмущений массовых и поверхностных сил и во всех величинах возмущений в соответствии с динамическим методом исследования (п. 2.3) выделим множитель $(\text{ex} \rho \Omega \tau)$.

Сжимаемые тела. В этом случае получаем линеаризованные уравнения движения в перемещениях

$$\nabla_i (\omega^{j\alpha\beta} \nabla_\beta u_\alpha) + \rho \Omega^2 u^j + \rho (F_{(1)}^{j\alpha} + i \Omega F_{(2)}^{j\alpha}) u_\alpha = 0 \quad (2.43)$$

и линеаризованные граничные условия в напряжениях на части поверхности S_1

$$(N_i \omega^{j\alpha\beta} \nabla_\beta u_\alpha) \Big|_{S_1} = \left[(P_{(1)}^{jk} + i \Omega P_{(2)}^{jk}) u_k \right] \Big|_{S_1}. \quad (2.44)$$

Граничные условия в перемещениях на части поверхности S_2 остаются в форме (2.11). Контравариантные составляющие несимметричного тензора напряжений Кирхгоффа t при этом определяются следующими соотношениями:

$$t^{ij} = \omega^{ij\alpha\beta} \nabla_{\beta} u_{\alpha}. \quad (2.45)$$

Несжимаемые тела. В этом случае получаем линеаризированные уравнения движения в перемещениях

$$\nabla_i (\kappa^{ij\alpha\beta} \nabla_{\beta} u_{\alpha} + q^{ij} p) + \rho \Omega^2 u^j + \rho (F_{(1)}^{j\alpha} + i \Omega F_{(2)}^{j\alpha}) u_{\alpha} = 0 \quad (2.46)$$

и линеаризированные граничные условия в напряжениях на части поверхности S_1

$$\left[N_i (\kappa^{ij\alpha\beta} \nabla_{\beta} u_{\alpha} + q^{ij} p) \right]_{|_{S_1}} = \left[(P_{(1)}^{jk} + i \Omega P_{(2)}^{jk}) u_k \right]_{|_{S_1}}. \quad (2.47)$$

Граничные условия в перемещениях на части поверхности S_2 остаются в форме (2.11) и условие несжимаемости остается в форме (2.7). Контравариантные составляющие несимметричного тензора напряжений Кирхгоффа t при этом определяются следующими соотношениями

$$t^{ij} = \kappa^{ij\alpha\beta} \nabla_{\beta} u_{\alpha} + q^{ij} p. \quad (2.48)$$

Необходимо отметить, что выше соотношения (2.43) – (2.45) для сжимаемого тела сформулированы относительно трех составляющих вектора возмущения перемещений, а соотношения (2.46) – (2.48) для несжимаемого тела сформулированы относительно трех составляющих вектора возмущения перемещений и скалярной величины p . Для несжимаемого тела величины q^{ij} определяются выражениями (2.8) для **теории 1**, (2.17) для **теории 2** и (2.24) для **теории 3**.

В монографиях [34, 49, 334] приведены соотношения для вычисления составляющих тензоров ω и κ для различных моделей упругих и пластических тел, а также тел с реологическими свойствами применительно к **теориям 2 и 3**. В этих же монографиях для **теории 1** приведены соотношения для вычисления составляющих тензоров ω и κ для гиперупругих анизотропных тел с произвольной структурой упругого потенциала; следует отметить, что монография [31] исключительно посвящена исследованию устойчивости гиперупругих тел с произвольной структурой упругого потенциала при больших (конечных) докритических деформациях, т.е. в рамках **теории 1**.

Некоторые свойства тензоров ω и κ . Аналогии. Из результатов, изложенных в монографиях [34, 49, 334] следует, что упругих и пластических тел составляющие тензоров ω и κ не зависят от Ω и являются действительными

$$\text{Im } \omega^{ij\alpha\beta} = 0; \text{ Im } \kappa^{ij\alpha\beta} = 0. \quad (2.49)$$

Также из результатов монографий [34, 49, 334] для тел с реологическими свойствами в общем случае следует, что составляющие тензоров ω и κ зависят от Ω и являются комплексными

$$\text{Im } \omega^{ij\alpha\beta} \neq 0; \text{ Im } \kappa^{ij\alpha\beta} \neq 0. \quad (2.50)$$

В общем случае упругих, пластических и тел с реологическими свойствами строго доказано, что тел составляющие тензоров ω и κ не имеют свойств симметрии, которые характерны для линейной теории упругости анизотропного тела, т.е. имеют место следующие условия:

$$\begin{aligned} \omega^{ijnm} &\neq \omega^{jinn}, \quad \omega^{ijnm} \neq \omega^{ijmn}, \quad \omega^{ijnm} \neq \omega^{nmij}; \\ \kappa^{ijnm} &\neq \kappa^{jinn}, \quad \kappa^{ijnm} \neq \kappa^{ijmn}, \quad \kappa^{ijnm} \neq \kappa^{nmij}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Также в общем, рассматриваемом в монографиях [34, 49, 334], случае доказано, что для упругих и пластических тел имеют место следующие условия симметрии:

$$\omega^{ijnm} = \omega^{mnji}, \quad \kappa^{ijnm} = \kappa^{mnji}. \quad (2.52)$$

Заметим, что условия симметрии (2.52) являются существенными при формулировке достаточных условий применимости статического метода (метода Эйлера).

Сформулированные основные соотношения ТЛТУДТ для сжимаемых тел в виде (2.43) и (2.44) и для несжимаемых тел в виде (2.46) и (2.47) напоминают соответствующие соотношения линейной механики деформируемых тел, в частности, линейной теории упругости анизотропного тела; в связи с этим возникает вопрос о существовании аналогий между линейными и линеаризованными задачами механики деформируемых тел. Постановка вопроса об указанной аналогии и ее краткое исследование было выполнено в статье [32]; в последующем этот вопрос в более расширенном виде рассматривался в монографиях [35, 44, 49, 334] как с точки зрения исчерпывающего решения, так и с точки зрения применения при решении отдельных проблем.

2.4.2. Достаточные условия применимости метода Эйлера (статического метода). Как уже отмечалось в п. 2.3.1 при характеристике методов исследования устойчивости состояния равновесия и соответствующих критериев устойчивости для упругих тел, статический метод (метод Эйлера) является более простым по сравнению с динамическим методом исследования, хотя статический метод (метод Эйлера) и применим только к статическим задачам (и то не ко всем статическим задачам). Динамический метод исследования является более общим по сравнению со статическим методом и динамический метод исследования применим к динамическим и статическим задачам.

В связи с вышеизложенным возникает вопрос – когда результаты, полученные методом Эйлера (статическим методом) совпадают с результатами, полученными динамическим методом. Вышеуказанный вопрос решается формулировкой и доказательством достаточных (в обсуждаемом смысле) условий применимости метода Эйлера (статического метода, метода бифуркации) для решения статических задач ТЛТУДТ (для случая выполнения условий (2.37)).

Обсуждаемый в настоящем пункте (п. 2.4.2) вопрос, как и любая научная проблема, имеет определенные этапы развития в историческом аспекте; развитие исследований по обсуждаемому вопросу, наряду с изложением результатов по другим вопросам, достаточно последовательно рассмотрено в монографиях [31, 34, 35, 49, 334], причем в монографиях [49, 334] результаты рассмотрения представлены в наиболее общей форме, что дало возможность в обзоре [337] представить результаты рассмотрения в аннотированном виде. Отмеченная ситуация дает возможность рекомендовать читателям, желающим получить более подробную информацию по обсуждаемому вопросу, обратиться к вышеуказанным изданиям, в списках литературы к которым приведены публикации многих авторов по рассматриваемому вопросу.

Учитывая вышеизложенное, ниже в настоящем пункте (п. 2.4.2) лишь представим в аннотированной форме сведения о двух достаточно общих результатах, которые получены по рассматриваемому вопросу.

Достаточные условия для нелинейных моделей упругих и пластических тел. В ряде публикаций, например [27, 9], и потом достаточно последовательно в монографиях [49, 334] были сформулированы и доказаны (в единой общей форме для теорий 1 – 3) достаточные условия применимости метода Эйлера исследования устойчивости состояния равновесия для гиперупругих анизотропных тел с произвольной структурой упругого потенциала и пластических тел с определяющими уравнениями достаточно общего вида (в последнем случае, естественно, с применением обобщенной концепции продолжающегося нагружения). Обсуждаемые результаты получены для сжимаемых и несжимаемых кусочно-однородных тел с учетом границы раздела свойств тел, которая может возникать в докритическом состоянии за счет появления зон разгрузки в случае пластических тел.

Основной результат для вышеуказанных нелинейных моделей деформируемых тел можно сформулировать следующим образом: *достаточные условия применимости метода Эйлера выполняются, если внешние нагрузки (массовые и поверхностные силы) являются консервативными силами, т.е. достаточные условия являются такими же, как и для линейных упругих тел.*

При доказательстве обсуждаемых достаточных условий применимости метода Эйлера существенно используются условия типа (2.49) и (2.52); следовательно, полученное доказательство относится *только к упругим и пластическим телам* и не относится к телам с реологическими свойствами, поскольку для последних в общем случае имеют место условия (2.50). Таким образом, вопрос о формулировке и доказательстве достаточных условий применимости метода Эйлера для тел с реологическими свойствами остается открытым; утверждение же отдельных авторов о якобы полученном доказательстве для тел с реологическими свойствами является ошибочным, что и было отмечено в монографиях [34, 49, 334] и в обзорных статьях [426, 427].

Достаточные условия при действии «следящей» нагрузки в виде равномерной нагрузки. Применительно к указанной ситуации необходимо различать два случая: в *первом* случае указанная «следящая» нагрузка приложена ко всей поверхности тела; во *втором* случае указанная «следящая» нагрузка приложена к части поверхности тела.

В *первом* случае в единой общей форме для всех вариантов постановок задач ТЛТУДТ (**теории 1, 2 и 3**) применительно к упругим и пластическим сжимаемым и несжимаемым телам с привлечением соотношений (2.14) для **теории 1**, (2.20) для **теории 2** и (2.27) для **теории 3** строго доказано, что достаточные условия применимости метода Эйлера выполняются; указанные результаты в наиболее полной форме представлены в монографиях [35, 49, 334] и в современном обзоре [353]. Необходимо отметить, что вышеуказанные результаты получены для односвязных тел (в этом случае возникает однородное докритическое состояние) и для многосвязных тел (применительно к отдельным постановкам задач).

Во *втором* случае рассматривается ситуация, когда на части S_1 поверхности тела, которая (часть поверхности тела) ограничена кривой L , задана «следящая» нагрузка в виде равномерной нагрузки. В этом случае строго доказано, что достаточные условия применимости метода Эйлера выполняются, если на кривой L выполняются следующие условия:

$$u_3|_L = 0 \text{ или } u_M|_L = 0, \quad (2.53)$$

где введены обозначения: u_3 – перемещение по нормали к поверхности S_1 ; u_M – перемещение по нормали к кривой L в касательной плоскости к поверхности S_1 . Условия (2.53) получены в единой общей форме для различных вариантов постановок задач ТЛТУДТ (**теории 1, 2 и 3**) применительно к упругим и пластическим сжимаемым и несжимаемым телам с привлечением соотношений (2.14) для **теории 1**, (2.20) для **теории 2** и (2.27) для **теории 3** для определения составляющих «следящей» нагрузки; указанные результаты в наиболее полной форме представлены в монографиях [49, 334].

Примечание 2.10. Как следует из **Примечания 2.6**, выражения (2.20) для **теории 2** (*первый вариант теории малых докритических деформаций*) и выражения (2.27) для **теории 3** (*второй вариант теории малых докритических деформаций*) получены последовательно и строго из выражений (2.14) для **теории 1** (*теории больших (конечных) докритических деформаций*); в связи с чем выражения (2.20) и (2.27) можно считать *достаточно точными* для соответствующих вариантов теории. Выражения (2.34) в общем виде для **теорий 2 и 3** получены посредством линеаризации из нелинейной теории *малых* деформаций, которая уже построена с введением определенных упрощений, исходя из соображений физического характера; в связи с чем выражения (2.34) для **теорий 2 и 3** можно считать *недостаточно точными* для соответствующих вариантов теории.

Учитывая вышеизложенные в **Примечании 2.10** сведения вводного характера, необходимо отметить, что с привлечением соотношений (2.34) для **теорий 2 и 3** при определении составляющих «следящей» нагрузки **уже нельзя получить** результат (2.53) при строгом рассмотрении. В монографии (№ 13 из списка литературы к обзору [337]) для **теории 3** был получен результат (2.53), исходя из выражений (2.34), в рамках **теории 3**, но при этом привлекалась гипотеза Кирхгоффа – Лява; следовательно в этом случае результат (2.53) получен **лишь** для прикладной двумерной теории, по-

строеной с привлечением гипотезы Кирхгоффа – Лява. Результат же (2.53), как уже отмечалось перед **Примечанием 2.10**, получен строго и последовательно для *трехмерных теорий 1, 2 и 3* при привлечении соответствующих строгих и последовательных выражений (2.14), (2.20) и (2.27). Анализ обсуждаемого вопроса рассматривался еще в 1980 г. в публикации автора настоящего обзора (№ 141 из списка литературы к обзору [337]).

Вышеизложенными сведениями ограничимся при обсуждении рассматриваемого вопроса; дополнительные сведения можно получить из монографий [49, 334] и обзора [337], а также из публикаций, указанных в списках литературы к [49, 334, 337].

2.4.3. Достаточные условия устойчивости. Формулировка и доказательство достаточных условий устойчивости в теории устойчивости деформируемых тел является активно разрабатываемым вопросом на протяжении всей истории развития и становления обсуждаемого научного направления. В настоящем пункте (п. 2.4.3), следуя обзору [337], приведем в весьма краткой форме основные сведения по рассматриваемому вопросу; дополнительные сведения можно получить из монографий [49, 334], а также из публикаций, указанных в списках литературы к [49, 334, 337].

В настоящее время достаточные условия устойчивости в строгой форме сформулированы применительно к устойчивости состояния равновесия упругого тела при действии консервативных нагрузок, исходя из обычно принятого в механике *энергетического подхода*; принимая обобщенную концепцию продолжающегося нагружения, в такой же форме формулируются достаточные условия устойчивости состояния равновесия и для пластических тел. В единой общей форме для всех рассматриваемых постановок задач ТЛГУДТ (**теории 1, 2 и 3**) для нелинейно упругих анизотропных сжимаемых (с привлечением составляющих тензора ω) и несжимаемых (с привлечением составляющих тензора κ) тел достаточные условия устойчивости состояния равновесия рассмотрены в монографиях [35, 49, 334]; при этом применялись подходы, изложенные в монографии (№ 19 из списка литературы к обзору [337]) для **теории 1** (*теория больших (конечных) докритических деформаций*).

Ниже в качестве примера приведем достаточные условия устойчивости состояния равновесия для сжимаемых упругих тел с произвольной структурой упругого потенциала, когда возмущения внешних массовых и поверхностных сил равны нулю; эти достаточные условия устойчивости состояния равновесия остаются в силе и для пластических тел, если принять обобщенную концепцию продолжающегося нагружения. В обозначениях монографий [49, 334] обсуждаемое условие имеет следующий вид

$$J_1 > 0; \quad J_1 = \int_V (\omega^{j\alpha\beta} \nabla_i u_j \nabla_\beta u_\alpha) dV, \quad (2.54)$$

которое должно выполняться для всех кинематически возможных перемещений.

Достаточные условия устойчивости состояния равновесия в форме (2.54) для рассматриваемых сжимаемых упругих и пластических тел связаны с условиями единственности решения соответствующих линеаризованных задач. В достаточно общей форме условия единственности линеаризованных трехмерных задач для упругих и пластических тел, по-видимому впервые, были получены в 1957 г. и 1958 г. в публикациях (№ 153 и № 154 из списка литературы к обзору [337]); в применяемых в настоящей статье обозначениях эти условия единственности решения линеаризованных задач представлены в монографиях [49, 334]. Для рассматриваемых упругих и пластических тел, когда возмущения внешних массовых и поверхностных сил равны нулю, условия единственности решения линеаризованных задач можно представить [49, 334] в следующей форме: условия

$$\omega^{ij} \zeta_{ij} \zeta_{\alpha\beta} > 0 \quad (2.55)$$

должны выполняться для произвольных ζ_{nm} , которые не равны нулю одновременно. Условия (2.55) соответствуют результатам публикаций (№ 153 и № 154 из списка литературы к обзору [337]) и являются условиями сильной эллиптичности, которые должны выполняться в каждой точке деформируемого тела; по терминологии вышеуказанных публикаций условие (2.55) является условием строгой локальной выпуклости. Из (2.55) и (2.54) следует, что если выполняется достаточное условие (2.55) един-

ственности решения линеаризованных задач, то выполняется и достаточное условие (2.54) устойчивости состояния равновесия; таким образом, в рассматриваемом случае потери устойчивости не возникает. Также отметим, что выполнение условия (2.55) обеспечивает невозникновение явления «внутренней» неустойчивости материала; понятие о явлении внутренней неустойчивости материала, по-видимому, впервые было введено в публикациях за 1963 г. (№ 111 и № 120 из списка литературы к обзору [337]).

Как следует из **Примечания 2.2**, родственным научным направлением по отношению к ТЛТУДТ является теория распространения упругих волн в телах с начальными (остаточными) напряжениями, изложенная, например, в монографии [60]. В вышеуказанной теории также применяется (более слабое по сравнению с (2.55)) следующее условие:

$$\omega^{ij\alpha\beta} \zeta_{ij} \zeta_{\alpha\beta} \geq 0, \quad (2.56)$$

которое должно выполняться для всех ζ_{nm} не равных нулю одновременно. Условие (2.56) называется еще условием Адамара; при этом упругие тела, для которых выполняется условие (2.56), называются телами Адамара. Условие Адамара (2.56) обеспечивает, чтобы скорости распространения плоских гармонических волн (для произвольной волновой нормали) в материалах с начальными (остаточными) напряжениями не были мнимыми величинами.

Вышеизложенными сведениями ограничимся при обсуждении достаточных условий устойчивости состояния равновесия в рамках ТЛТУДТ и родственных вопросов.

2.5. О вариационных принципах ТЛТУДТ для упругих и пластических тел. В настоящем пункте (п. 2.5) в краткой форме рассмотрим сведения о вариационных принципах ТЛТУДТ применительно к упругим и пластическим телам; при этом для пластических тел будем применять обобщенную концепцию продолжающегося нагружения, что дает возможность для упругих и пластических тел провести единообразное общее рассмотрение обсуждаемого вопроса. Формулировка и доказательство вариационных принципов теории устойчивости деформируемых тел (как в рамках двумерных прикладных теорий для тонкостенных элементов конструкций, так и в рамках ТЛТУДТ) рассматривалось во все годы развития и становления обсуждаемого научного направления. В списках литературы к монографиям [49, 334] и обзору [337] приведены основные публикации, относящиеся к обсуждаемому вопросу применительно к ТЛТУДТ; результаты автора настоящей статьи по этому вопросу представлены в публикациях [33, 36] и в ряде других, причем основные результаты представлены в монографиях [34, 49, 334]. В указанных монографиях вариационные принципы представлены, в основном, в единой общей форме для различных постановок задач ТЛТУДТ (**теория 1, 2 и 3**) для нелинейно упругого анизотропного тела с произвольной структурой упругого потенциала и пластического тела с определяющими уравнениями достаточно общего вида. Отметим, что обсуждаемые вариационные принципы представлены для сжимаемых и несжимаемых тел при действии «мертвых» нагрузок и в ряде случаев (для отдельных теорий) при действии «следящих» нагрузок; при этом вариационные принципы сформулированы для кусочно-однородного тела с учетом наличия поверхности раздела свойств материала, обозначенной как поверхность \hat{S} , которая определяется наличием зон разгрузки, возникающих в докритическом состоянии. В связи с этим вводятся все обозначения для двух однородных частей материала (зона активного нагружения, зона разгрузки) со знаками (\pm): $V^{(\pm)}$ – объем; $S^{(\pm)}$ – поверхность; $S_1^{(\pm)}$ – части поверхностей, на которых заданы граничные условия в напряжениях; $S_2^{(\pm)}$ – части поверхностей, на которых заданы граничные условия в перемещениях.

В монографиях [34, 49, 334] для ТЛТУДТ применительно к сжимаемым и несжимаемым телам изложены различные вариационные принципы: наиболее общий принцип типа Ху-Вашицу, из условия стационарности соответствующего функционала следуют все соотношения и уравнения, в том числе и граничные условия в перемеще-

ниях; принцип типа Гамильтона-Остроградского для динамического метода; принцип типа возможных перемещений для статического метода; отдельные принципы для случая действия «следящей» нагрузки. Ниже лишь в качестве примеров рассмотрен ряд вариационных принципов, более полную информацию можно получить из монографий [34, 49, 334].

2.5.1. Вариационный принцип типа Ху-Вашицу в ТЛТУДТ для несжимаемых тел при «мертвых» внешних нагрузках. Единая общая форма для теорий 1, 2 и 3. Рассмотрим в качестве примера несжимаемые тела, учитывая общую формулировку задач для динамического метода исследования в виде (2.46) – (2.48) с учетом условия несжимаемости в виде (2.8) и граничных условий в перемещениях на S_2 в виде (2.11) применительно к случаю, когда действуют «мертвые» внешние нагрузки (отсутствуют возмущения массовых и поверхностных нагрузок, а также правых частей граничных условий в перемещениях в виде (2.11) на части поверхности S_2). Дополнительно, как общепринято в принципе Ху-Вашицу, введем кинематический тензор v , ковариантные составляющие которого определяются следующими соотношениями

$$v_{\alpha\beta} = \nabla_{\beta} u_{\alpha}. \quad (2.57)$$

Учитывая соотношения (2.46) – (2.48), (2.8), (2.11) и (2.57), для тела, которое имеет поверхность \hat{S} раздела свойств, при действии вышеуказанных «мертвых» нагрузок в общую формулировку задач при применении динамического метода исследования необходимо включить соотношения:

уравнения движения

$$\nabla_i t_{(\pm)}^{ij} + \rho^{(\pm)} \Omega^2 u_{(\pm)}^j = 0, \quad \theta^k \in V^{(\pm)}; \quad (2.58)$$

определяющие уравнения

$$t_{(\pm)}^{ij} = \kappa_{(\pm)}^{ij\alpha\beta} v_{\alpha\beta}^{(\pm)} + q_{(\pm)}^{ij} p^{(\pm)}; \quad (2.59)$$

выражения для определения составляющих кинематического тензора

$$v_{\alpha\beta}^{(\pm)} = \nabla_{\beta} u_{\alpha}^{(\pm)}; \quad (2.60)$$

условие несжимаемости

$$q_{(\pm)}^{ij} v_{ji}^{(\pm)} = 0, \quad \theta^k \in V^{(\pm)}; \quad (2.61)$$

граничные условия в напряжениях на частях $S_1^{(\pm)}$ поверхности тела

$$N_i^{(\pm)} t_{(\pm)}^{ij} = 0, \quad \theta^k \in S_1^{(\pm)}; \quad (2.62)$$

граничные условия в перемещениях на частях $S_2^{(\pm)}$ поверхности тела

$$u_{(\pm)}^j = 0, \quad \theta^k \in S_2^{(\pm)}; \quad (2.63)$$

условия непрерывности составляющих вектора напряжений на поверхности \hat{S} раздела свойств материала

$$N_i^{(+)} t_{(+)}^{ij} + N_i^{(-)} t_{(-)}^{ij} = 0, \quad \theta^k \in \hat{S} \quad (2.64)$$

и условия непрерывности составляющих вектора перемещений на поверхности \hat{S} раздела свойств материала

$$u_{(+)}^j = u_{(-)}^j, \quad \theta^k \in \hat{S}. \quad (2.65)$$

Выражения (2.58) – (2.65) полностью исчерпывают общую формулировку (в общей форме для теорий 1, 2 и 3) задач ТЛТУДТ для несжимаемых тел с учетом существования поверхности \hat{S} раздела свойств материала. Для вышеуказанной формулировки задач в обозначениях монографий [49, 334] вводится следующий функционал:

$$\begin{aligned}
& J_4(t^{(\pm)}, v^{(\pm)}, u^{(\pm)}, p^{(\pm)}) = \\
& = \int_{V^{(+)}} \left[\frac{1}{2} \kappa_{(+)}^{ij\alpha\beta} v_{\alpha\beta}^{(+)} v_{ji}^{(+)} - t_{(+)}^{ij} (v_{ji}^{(+)} - \nabla_i u_j^{(+)} + q_{(+)}^{ij} p^{(+)} v_{ji}^{(+)} - \frac{1}{2} \rho^{(+)} \Omega^2 u_j^{(+)} u_j^{(+)} \right] dV^{(+)} + \\
& \quad + \int_{V^{(-)}} \left[\frac{1}{2} \kappa_{(-)}^{ij\alpha\beta} v_{\alpha\beta}^{(-)} v_{ji}^{(-)} - t_{(-)}^{ij} (v_{ji}^{(-)} - \nabla_i u_j^{(-)} + q_{(-)}^{ij} p^{(-)} v_{ji}^{(-)} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} \rho^{(-)} \Omega^2 u_j^{(-)} u_j^{(-)} \right] dV^{(-)} - \int_{S_2^{(+)}} N_i^{(+)} t_{(+)}^{ij} u_j^{(+)} dS^{(+)} - \int_{S_2^{(-)}} N_i^{(-)} t_{(-)}^{ij} u_j^{(-)} dS^{(-)}. \tag{2.66}
\end{aligned}$$

Утверждение. Если функции $u_{(\pm)}^j$ удовлетворяют условиям непрерывности составляющих вектора перемещений на поверхности раздела \hat{S} свойств материала в виде (2.65), то из условия стационарности функционала (2.66) следуют все уравнения и соотношения в виде (2.58) – (2.64).

Доказательство вышесформулированного Утверждения приведено в монографиях [49, 334]; следует отметить, что при использовании функционала (2.66) и при доказательстве вышесформулированного Утверждения варьируются составляющие тензоров $t^{(\pm)}$ и $v^{(\pm)}$, составляющие векторов $u^{(\pm)}$ и скаляры $p^{(\pm)}$. Вариационный принцип, основанный на функционале (2.66), является наиболее общим вариационным принципом для несжимаемых тел в рамках ТЛТУДТ; заметим, что выше обсуждаемый вариационный принцип сформулирован в единой общей форме для **теорий 1, 2 и 3** в соответствии с терминологией п. 2.2 и вводной части п. 2.4.

При применении вышесформулированного вариационного принципа для решения отдельных классов задач выполнение условия (2.65) можно обеспечить, задавая координатные функции в виде единых общих выражений для $V^{(+)}$ и $V^{(-)}$. В случае сжимаемых тел также сформулирован и доказан аналогичный вариационный принцип; соответствующие результаты приведены в монографиях [49, 334].

Если поверхность \hat{S} раздела свойств материала отсутствует, то, естественно, условия непрерывности на \hat{S} в виде (2.64) и (2.65) исключаются и формулировка основных соотношений обсуждаемой задачи проводится для тензоров t и v , вектора u и скаляра p и при применении динамического метода исследования включает следующие выражения:

уравнения движения

$$\nabla_i t^{ij} + \rho \Omega^2 u^j = 0, \quad \theta^k \in V; \tag{2.67}$$

определяющие уравнения

$$t^{ij} = \kappa^{ij\alpha\beta} v_{\alpha\beta} + q^{ij} p; \tag{2.68}$$

выражения для определения составляющих кинематического тензора

$$v_{\alpha\beta} = \nabla_\beta u_\alpha; \tag{2.69}$$

условие несжимаемости

$$q^{ij} v_{ji} = 0, \quad \theta^k \in V; \tag{2.70}$$

граничные условия в напряжениях на части S_1 поверхности тела

$$N_i t^{ij} = 0, \quad \theta^k \in S_1; \tag{2.71}$$

граничные условия в перемещениях на части S_2 поверхности тела

$$u^j = 0, \quad \theta^k \in S_2. \tag{2.72}$$

Выражения (2.67) – (2.72) полностью исчерпывают общую формулировку (в общей форме для теорий 1, 2 и 3) задач ТЛТУДТ для несжимаемых тел (без поверхности \hat{S} раздела свойств материала). Для вышеуказанной формулировки задач в обозначениях монографий [49, 334] вводится следующий функционал:

$$J_4(t, v, u, p) = \int_V \left[\frac{1}{2} \kappa^{ij\alpha\beta} v_{\alpha\beta} v_{ij} - t^{ij} (v_{ij} - \nabla_i u_j) + q^{ij} p v_{ij} - \frac{1}{2} \rho \Omega u_j u^j \right] dV - \int_{S_2} N_i t^{ij} u_j dS. \quad (2.73)$$

Утверждение. Из условия стационарности функционала (2.73) следуют все соотношения и уравнения (2.67) – (2.72).

Доказательство вышесформулированного Утверждения соответствует монографиям [49, 334]; при доказательстве варьируются составляющие тензоров t и v , составляющие вектора u и скаляр p . Вариационный принцип, основанный на функционале (2.73), является наиболее общим вариационным принципом для несжимаемых тел (без поверхности \hat{S} раздела свойств материала) в рамках ТЛТУДТ; заметим, что обсуждаемый вариационный принцип сформулирован в единой общей форме для теорий 1, 2 и 3 в соответствии с терминологией п. 2.2 и вводной части р. 2.4. В случае сжимаемых тел также сформулирован и доказан аналогичный вариационный принцип; соответствующие результаты приведены в монографиях [49, 334].

2.5.2. Вариационный принцип ТЛТУДТ для сжимаемых тел при «следающей» нагрузке. Результаты для теории 3. Прежде всего, необходимо отметить, что в случае «следающей» нагрузки в виде равномерного внешнего давления вариационные принципы сформулированы и доказаны в монографиях [49, 334], а также в соответствующих публикациях, например статья [36] за 1979 г., только для теории 3 (второй вариант теории малых докритических деформаций), когда для определения составляющих вектора внешней поверхностной нагрузки применяются выражения (2.27), полученные в результате последовательных упрощений из соответствующих выражений (2.14), первоначально построенных в рамках строгой и точной теории 1 (теория больших (конечных) докритических деформаций). Отметим, что в монографиях [49, 334] сформулированы и доказаны вариационные принципы [49, 334] при действии «следающей» нагрузки в виде равномерного внешнего давления; ниже в качестве примера рассмотрим обсуждаемый вариационный принцип лишь для сжимаемого тела.

Обозначим через Q интенсивность внешнего нормального давления; в этом случае с учетом направления внешнего нормального давления ($Q = -\tilde{P}$) из (2.27) для сжимаемых и несжимаемых тел получаем выражения для контравариантных составляющих возмущения вектора поверхностной нагрузки в виде

$$P^j = -Q \left(N^j \nabla_\alpha u^\alpha - N^\alpha g^{\beta j} \nabla_\beta u_\alpha \right). \quad (2.74)$$

Рассмотрим случай, когда ко всей поверхности S тела приложена «следающая» нагрузка в виде равномерного внешнего давления. В этом случае в соответствии с (2.43), (2.44) и (2.49) при общей формулировке задач получаем:

уравнения движения в перемещениях

$$\nabla_i (\omega^{ij\alpha\beta} \nabla_\beta u_\alpha) + \rho \Omega^2 u^j = 0, \quad \theta^k \in V \quad (2.75)$$

и граничные условия в напряжениях на всей поверхности тела (на поверхности S)

$$N_i \omega^{ijmm} \nabla_m u_n = -Q \left(N^j \nabla_\alpha u^\alpha - N^\alpha g^{\beta j} \nabla_\beta u_\alpha \right), \quad \theta^k \in S. \quad (2.76)$$

Выражения (2.75) и (2.76) полностью исчерпывают общую формулировку задач ТЛТУДТ в перемещениях для сжимаемых тел применительно к рассматриваемому

случаю. Для вышеуказанной формулировки задач в обозначениях монографий [49, 334] вводится следующий функционал:

$$J_1(u) = \frac{1}{2} \int_V \left\{ \omega^{j\alpha\beta} (\nabla_\beta u_\alpha) (\nabla_i u_j) - \rho \Omega^2 u_j u^j + Q \left[(\nabla_i u^i)^2 - (\nabla_i u^j) (\nabla_j u^i) \right] \right\} dV. \quad (2.77)$$

Утверждение. Из условия стационарности функционала (2.77) следуют уравнения движения (2.75) и граничные условия в напряжениях, сформулированные через перемещения, на всей поверхности тела.

Доказательство вариационного принципа приведено в монографиях [49, 334]; при этом при исследовании функционала (2.77) варьируются составляющие вектора u . В случае несжимаемых тел также сформулирован и доказан аналогичный вариационный принцип, в этом случае уже варьируются составляющие вектора u и скаляр p ; соответствующие результаты представлены в монографиях [49, 334]. Обсуждаемые вариационные принципы можно применять при исследовании задач об устойчивости горных выработок, где действие газа на поверхность выработки можно моделировать «следающей» нагрузкой в виде равномерного давления.

В монографиях [49, 334] также сформулированы и доказаны вариационные принципы для сжимаемых и несжимаемых тел в рамках **теории 3**, когда равномерное внешнее давление в виде «следающей» нагрузки приложено к части поверхности тела; в этом случае полученные результаты имеют более сложный вид и в этой статье не обсуждаются, ограничиваясь лишь вышеуказанными сведениями.

Примечание 2.11. Как уже отмечалось выше, результаты настоящего пункта (п. 2.5.2) получены лишь для **теории 3** (*второй вариант теории малых докритических деформаций*), когда для определения составляющих вектора внешней поверхностной нагрузки («следающей» нагрузки) *применялись достаточно точные выражения* (2.27). Если для определения составляющих вектора внешней поверхностной нагрузки («следающей» нагрузки) применять более приближенные выражения (2.34), то уже *нельзя сформулировать и доказать обсуждаемые вариационные принципы*, т.е. *нельзя получить результаты* настоящего п. 2.5.2. Следует отметить, что более приближенные выражения (2.34) получены и применялись практически всеми исследователями, которые изначально исходили из нелинейной теории *малых деформаций*. Критическое обсуждение весьма приближенных выражений (2.34) проведено в заключительной части п. 2.2, начиная с **Примечания 2.6**.

Целесообразно отметить, что вышеизложенная ситуация является уже *вторым* случаем, когда при исследовании механических явлений, связанных с действием «следающей» нагрузки, при применении (общепринятых среди специалистов, занимающихся прикладными вопросами, но являющихся недостаточно точными) выражений (2.34) для **теории 3** нельзя получить результаты, которые получаются для **теории 3** с применением выражений (2.27), являющимися более точными по сравнению с (2.34). *Первая* ситуация возникла при доказательстве применимости метода Эйлера для случая действия «следающей» нагрузки; анализ этой ситуации выполнен во второй части п. 2.4.2. Оказалось, что при применении выражений для **теории 3** (2.27) получаются результаты, полностью совпадающие с соответствующими результатами для **теорий 2 и 1**; необходимо отметить, что *ничего подобного нельзя получить* при применении (2.34).

Рассмотренные в настоящем **Примечании 2.11** два случая применения общеизвестных выражений (2.34) свидетельствуют, что для получения достоверных результатов в рамках **теории 3**, соответствующих результатам в рамках более **точных теорий 2 и, особенно, 1**, *целесообразно выражения (2.34) не применять* несмотря на то, что они являются общеизвестными и популярными.

Вышеизложенными сведениями в п. 2.4 ограничимся при обсуждении общих вопросов ГЛТУДТ при их кратком рассмотрении; дополнительные сведения по обсуждаемым вопросам можно получить из монографий [49, 334] и обзора [337].

2.5. Общие решения ТЛУДТ при однородных докритических состояниях. В настоящем пункте (п. 2.5) в весьма краткой форме представим сведения по уже построенным общим решениям ТЛУДТ при однородных докритических состояниях; более подробные сведения по построению общих решений и их применению к исследованию различных проблем представлены в монографиях автора настоящей статьи, которые включены в список литературы к настоящей статье.

Для общности будем рассматривать ортотропные тела с прямолинейной ортотропией, в которой оси симметрии свойств материала направлены по координатным линиям Ox_n декартовой системы координат. Исследование проведем в единой общей форме для гиперупругих тел с произвольной структурой упругого потенциала с вышеуказанным свойством симметрии и для пластических тел с определяющими уравнениями достаточно общего вида также с вышеуказанным свойством симметрии; при этом для пластических тел будем принимать обобщенную концепцию продолжающегося нагружения.

Построение общих решений проведем для случая трехосного сжатия вдоль осей вышеуказанной декартовой системы координат равномерно распределенными нагрузками постоянной интенсивности (различной интенсивности для различных осей координат). В этом случае возникает однородное докритическое напряженное состояние

$$\sigma_{ij}^0 = \text{const} \text{ при } i = j; \sigma_{ij}^0 = 0 \text{ при } i \neq j; \sigma_{11}^0 \neq \sigma_{22}^0 \neq \sigma_{33}^0. \quad (2.78)$$

Перемещения в докритическом напряженном состоянии (2.78) определяются следующим образом

$$u_m^0 = (\lambda_m - 1) x_m; \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3; \lambda_m = \text{const}, \quad (2.79)$$

где λ_m – коэффициенты удлинения.

Примечание 2.12. В настоящей статье приводятся сведения по построению общих решений для упругих и пластических тел, в этом случае выполняются условия $\sigma_{ij}^0 = \text{const}$. Построенные общие решения остаются в силе и для тел с реологическими свойствами, однако в этом случае σ_{ij}^0 и u_m^0 уже зависят от времени; указанное обобщение общих решений на тела с реологическими свойствами проведено в монографиях [49, 334]. Следует отметить, что в силу зависимости σ_{ij}^0 и u_m^0 от времени отсутствует перспектива применения общих решений для тел с реологическими свойствами при решении конкретных задач. В связи с вышеизложенным ниже в настоящей статье рассматриваются общие решения только для упругих и пластических тел в общей форме для **теорий 1, 2 и 3**.

При построении общих решений обычно принимается, что возмущения массовых сил отсутствуют; в связи с этим при применении динамического метода исследования задач ТЛУДТ в основных соотношениях в перемещениях для сжимаемых тел в виде (2.43) – (2.45) и для несжимаемых тел в виде (2.46) – (2.48) и условия несжимаемости в виде (2.7) следует принять

$$F_{(1)}^{j\alpha} = 0, F_{(2)}^{j\alpha} = 0. \quad (2.80)$$

В случае однородных докритических состояний в виде (2.78) и (2.79) таким образом получаем системы уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами в виде (2.43) с учетом (2.80) для сжимаемых тел и в виде (2.46) и (2.7) с учетом (2.80) для несжимаемых тел. Поскольку указанные системы уравнений имеют достаточно высокий порядок, то в соответствии с опытом построения решений отдельных классов в этом случае перспективным является построение общих решений, когда решение системы уравнений более высокого порядка представляется через решения уравнений или систем уравнений более низкого порядка. Такой подход является общепринятым и при исследовании других классов задач механики сплошной среды и математической физики. Обсуждаемый подход реализован и для задач ТЛУДТ,

при этом основная часть результатов представлена в монографиях [49, 334] для пространственных, плоских и антиплоских задач при динамическом и статическом методах исследования.

Целесообразно отметить, что в рассматриваемых в настоящей статье *восьми* неклассических проблемах механики разрушения не возникают ситуации, когда необходимо учитывать возникновение возмущений массовых и поверхностных сил, т.е. в соответствии с обозначениями п. 2.3 имеют место следующие условия:

$$F_{(1)}^{j\alpha} = 0, F_{(2)}^{j\alpha} = 0; P_{(1)}^{j\alpha} = 0, P_{(2)}^{j\alpha} = 0. \quad (2.81)$$

В случае (2.81), как показано в п. 2.4.2, достаточные условия применимости метода Эйлера для нелинейных моделей упругих и пластических тел выполняются; таким образом результаты по исследованию задач ТЛТУДТ для любой из *восьми* обсуждаемых неклассических проблем механики разрушения совпадают при применении динамического и статического методов исследования. В связи с вышеизложенным ниже рассмотрим общие решения лишь применительно к статическому методу исследования, положив в системе уравнений (2.43) для сжимаемых тел и в системе уравнений (2.46) и (2.7) для несжимаемых тел $\Omega = 0$; при этом представим отдельно общие решения для сжимаемых тел, для несжимаемых тел и для случая притяжения комплексных переменных.

2.5.1. Общие решения ТЛТУДТ для сжимаемых тел. Обсуждаемые общие решения для сжимаемых тел представим в единой общей форме для **теорий 1, 2 и 3** (по терминологии вводной части п. 2.4) отдельно для плоской и пространственной задач.

Плоская задача. Рассмотрим плоскую деформацию в плоскости $x_1 0 x_2$ для случая (2.78) и (2.79). В этом случае следует принять

$$u_1 = u_1(x_1, x_2); u_2 = u_2(x_1, x_2); u_3 = 0. \quad (2.82)$$

Перемещения u_j определяются через функции $\chi^{(n)}$ при $j, n = 1, 2$ следующим образом:

$$\begin{aligned} u_1 &= \left(\omega_{1221} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \omega_{2222} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \chi^{(2)} - (\omega_{1122} + \omega_{2121}) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \chi^{(1)}; \\ u_2 &= -(\omega_{2211} + \omega_{1212}) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \chi^{(2)} + \left(\omega_{1111} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \omega_{2112} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \chi^{(1)}. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Уравнение для определения функций $\chi^{(j)}$ ($j = 1, 2$) имеет следующий вид:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \eta_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \eta_3^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) \chi^{(j)} = 0; \quad j = 1, 2. \quad (2.84)$$

В (2.84) величины η_2^2 и η_3^2 определяются из следующих выражений:

$$\begin{aligned} \eta_{2,3}^2 &= c \pm (c^2 - \omega_{1111} \omega_{2222} \omega_{2112}^{-1} \omega_{1122}^{-1})^{1/2}; \\ 2c \omega_{2222} \omega_{2112} &= \omega_{1111} \omega_{2222} + \omega_{2112} \omega_{1221} - (\omega_{1122} + \omega_{2121})(\omega_{2211} + \omega_{1212}). \end{aligned} \quad (2.85)$$

Построение решений в конкретных классах задач определяется структурой параметров η_2^2 и η_3^2 .

Пространственная задача. Общее решение для пространственной задачи представлено для докритического состояния в виде (2.78) и (2.79), для которого выполняются условия

$$\sigma_{11}^0 = \sigma_{22}^0 \neq \sigma_{33}^0; \quad \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3. \quad (2.86)$$

Кроме того принимается, что нелинейные упругие и пластические тела являются трансверсально-изотропными телами, в которых плоскости $x_3 = \text{const}$ являются плоскостями изотропии (в этом случае ось Ox_3 является осью изотропии). Общее решение представлено в форме, которая является удобной при исследовании задач для цилиндрического тела с произвольным контуром поперечного сечения, ось которого направлена вдоль оси Ox_3 . Вводятся следующие обозначения: N и S – орты нормали и касательной к контуру поперечного сечения в плоскости $x_3 = \text{const}$; u_N и u_S – перемещения по нормали и касательной к контуру поперечного сечения в плоскости $x_3 = \text{const}$; u_3 – перемещение вдоль оси цилиндра; N_1 и N_2 – составляющие орта нормали к контуру поперечного сечения в плоскости $x_3 = \text{const}$. При вышеприведенных обозначениях общее решение можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_N &= \frac{\partial}{\partial S} \psi - \frac{\partial^2}{\partial N \partial x_3} \chi; \quad u_S = -\frac{\partial}{\partial N} \psi - \frac{\partial^2}{\partial S \partial x_3} \chi; \\ u_3 &= (\omega_{133} + \omega_{3131})^{-1} \left(\omega_{111} \Delta_1 + \omega_{3113} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \chi. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Уравнения для определения функций ψ и χ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \left(\Delta_1 + \xi_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \psi &= 0; \quad \Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}; \\ \left(\Delta_1 + \xi_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \left(\Delta_1 + \xi_3^2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \chi &= 0. \end{aligned} \quad (2.88)$$

В (2.88) величины ξ_j^2 ($j = 1, 2, 3$) определяются из следующих выражений:

$$\begin{aligned} \xi_1^2 &= \omega_{3113} \omega_{1221}^{-1}; \quad \xi_{2,3}^2 = c \pm (c^2 - \omega_{3333} \omega_{3113} \omega_{1111}^{-1} \omega_{1331}^{-1})^{1/2}; \\ 2c \omega_{1111} \omega_{1331} &= \omega_{1111} \omega_{3333} + \omega_{1331} \omega_{3113} - (\omega_{1333} + \omega_{3131})(\omega_{3311} + \omega_{1313}). \end{aligned} \quad (2.89)$$

Построение решений в конкретных классах задач определяется структурой параметров ξ_j^2 ($j = 1, 2, 3$) и соотношениями между ними.

Общие решения для сжимаемых тел в виде (2.83) – (2.85) для плоских задач и в виде (2.87) – (2.89) для пространственных задач широко применялись в монографиях [30, 31, 34, 35, 44, 49, 54, 57, 334] и в ряде других монографий, а также в соответствующих статьях, опубликованных в периодических изданиях; наиболее полно и последовательно обсуждаемые общие решения представлены в монографиях [49, 334], в которых также приведены выражения для определения составляющих $\omega_{j\alpha\beta}$ для общих и ряда конкретных моделей упругих, пластических и тел с реологическими свойствами.

2.5.2. Общие решения ТЛТУДТ для несжимаемых тел. Обсуждаемые общие решения для несжимаемых тел представим в единой общей форме для **теорией 1, 2 и 3** (по терминологии вводной части п. 2.4) отдельно для плоских и пространственных задач. Необходимо отметить, что в случае несжимаемых тел общие решения представлены для составляющих вектора \mathbf{u} и для скаляра p в отличие от сжимаемого тела (п. 2.5.1), для которого общие решения представлены только для составляющих вектора \mathbf{u} . Кроме того, в основные соотношения для несжимаемого тела в виде (2.46) – (2.48) входят еще величины q^{ij} , которые в декартовых координатах имеют вид

$$q_{ij} = \delta_{ij} q_j, \quad (2.90)$$

где величины q_j , соответственно, для теорий **1, 2 и 3** определяются выражениями

$$q_j = \lambda_j^{-1}; \quad q_j = \lambda_j; \quad q_j = 1. \quad (2.91)$$

Коэффициенты удлинений λ_j ($j=1, 2, 3$) связаны между собой соотношениями, которые следуют из условия несжимаемости для докритического состояния; обсуждаемые соотношения, соответственно, для теорий **1, 2 и 3** имеют следующий вид:

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1; \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3 = 0; \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3 = 0. \quad (2.92)$$

Плоская задача. Рассмотрим плоскую деформацию в плоскости $x_1 0 x_2$ для случая (2.78) и (2.79). В этом случае следует принять

$$u_1 = u_1(x_1, x_2); \quad u_2 = u_2(x_1, x_2); \quad u_3 = 0; \quad p = p(x_1, x_2). \quad (2.93)$$

В общем случае обсуждаемой плоской деформации имеют место выражения (2.92). В частном случае плоской деформации, когда докритическое состояние тоже определяется в условиях плоской деформации, дополнительно следует принять $\lambda_3 = 1$; таким образом, с учетом $\lambda_3 = 1$ из (2.92), соответственно, для теорий **1, 2 и 3** получаем

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1; \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2 = 0; \quad \lambda_1 + \lambda_2 - 2 = 0. \quad (2.94)$$

В рассматриваемом общем решении для плоской деформации перемещения u_j ($j=1, 2$) и скаляр p определяются через функции $\chi^{(n)}$ ($n=1, 2, 4$) следующим образом:

$$\begin{aligned} u_1 &= -q_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \chi^{(1)} + q_1 q_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \chi^{(2)} - \left[q_1 \left(\kappa_{1221} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \kappa_{2222} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) - q_2 (\kappa_{1122} + \kappa_{2121}) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right] \frac{\partial}{\partial x_1} \chi^{(4)}; \\ u_2 &= q_1 q_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \chi^{(1)} - q_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \chi^{(2)} - \left[q_2 \left(\kappa_{1111} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \kappa_{2112} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) - q_1 (\kappa_{2211} + \kappa_{1212}) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right] \frac{\partial}{\partial x_2} \chi^{(4)}; \\ p &= - \left[q_1 \left(\kappa_{1221} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \kappa_{2222} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) - q_2 (\kappa_{2211} + \kappa_{1212}) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right] \frac{\partial}{\partial x_1} \chi^{(1)} - \\ &\quad - \left[q_2 \left(\kappa_{1111} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \kappa_{2112} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) - q_1 (\kappa_{1122} + \kappa_{2121}) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right] \frac{\partial}{\partial x_2} \chi^{(2)}. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Уравнение для определения функций $\chi^{(n)}$ ($n=1, 2, 4$) имеет следующий вид:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \eta_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \eta_3^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) \chi^{(j)} = 0; \quad j = 1, 2, 4. \quad (2.96)$$

В (2.96) величины η_2^2 и η_3^2 определяются из следующих выражений:

$$\begin{aligned} \eta_{2,3}^2 &= c \pm (c^2 - q_1^2 \kappa_{1221} q_2^{-2} \kappa_{2112}^{-1})^{1/2}; \\ 2c q_2^2 \kappa_{2112} &= q_2^2 \kappa_{1111} + q_1^2 \kappa_{2222} - q_1 q_2 (\kappa_{1122} + \kappa_{2121} + \kappa_{2211} + \kappa_{1212}). \end{aligned} \quad (2.97)$$

Примечание 2.13. Общие решения для плоских задач ТЛТУДТ в виде (2.83) – (2.85) для сжимаемых тел и в виде (2.95) – (2.97) для несжимаемых тел широко применялись в монографиях [30, 31, 34, 35, 44, 49, 54, 57, 334] и в ряде других моногра-

фий, а также в соответствующих статьях, опубликованных в периодических изданиях; при этом в большинстве исследований достаточно было удержать одну функцию $\chi^{(2)}$, приняв для сжимаемых тел $\chi^{(1)} = 0$ и для несжимаемых тел $\chi^{(1)} = 0$ и $\chi^{(4)} = 0$. Существуют ситуации (классы задач или отдельные проблемы), когда в обсуждаемых общих решениях целесообразно удерживать для сжимаемых и несжимаемых тел по две функции, приняв для сжимаемых тел $\chi^{(1)} \neq 0$ и $\chi^{(2)} \neq 0$ и для несжимаемых тел $\chi^{(1)} \neq 0$, $\chi^{(2)} \neq 0$ и $\chi^{(4)} = 0$. Вышеуказанная ситуация рассмотрена в монографиях [44] и в т. 2 [154] при введении представления через комплексные потенциалы, чтобы обеспечить их переход при $\sigma_{ij}^0 \rightarrow 0$ в классические представления Колосова-Мусхелишвили [148] и Лехницкого [140] для линейной теории.

Пространственная задача. Общее решение пространственной задачи для несжимаемых тел представлено для докритического состояния в виде (2.78) и (2.79), для которого выполняется условие (2.86). В этом случае из выражений (2.91) и (2.86) в общем виде для теорий 1, 2 и 3 получаем для величин q_j (2.91) следующее условие:

$$q_1 = q_2. \quad (2.98)$$

Кроме того, из условий (2.86) и выражений (2.92) получаем соотношения для определения величины λ_3 через величину λ_1 , соответственно, для теорий 1, 2 и 3 в следующем виде:

$$\lambda_3 = \lambda_1^{-2}; \quad \lambda_3 = (3 - 2\lambda_1^2)^{1/2}; \quad \lambda_3 = 3 - 2\lambda_1. \quad (2.99)$$

Как и в случае сжимаемых тел, так и в обсуждаемом случае несжимаемых тел для пространственной задачи принимается, что нелинейные упругие и пластические тела являются трансверсально-изотропными телами, в которых плоскости $x_3 = \text{const}$ являются плоскостями изотропии (в этом случае ось $0x_3$ является осью изотропии). Общее решение представлено в форме, которая является удобной при исследовании задач для цилиндрического тела с произвольным контуром поперечного сечения, ось которого направлена вдоль оси $0x_3$; в связи с этим применяются все обозначения, введенные для сжимаемых тел перед выражениями (2.87). При вышеуказанных обозначениях общее решение для несжимаемого тела (для перемещений u_N, u_S и u_3 и скаляра p) можно представить в следующей форме:

$$u_N = \frac{\partial}{\partial S} \psi - \frac{\partial^2}{\partial N \partial x_3} \chi; \quad u_S = -\frac{\partial}{\partial N} \psi - \frac{\partial^2}{\partial S \partial x_3} \chi; \\ u_3 = q_1 q_3^{-1} \Delta_1 \chi; \quad \Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}; \quad (2.100)$$

$$p = q_1^{-1} q_3^{-1} \left\{ [q_3 \kappa_{1111} - q_1 (\kappa_{1133} + \kappa_{3131})] \Delta_1 + q_3 \kappa_{3113} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right\} \frac{\partial}{\partial x_3} \chi.$$

Функции ψ и χ определяются из уравнений (2.88) при следующих обозначениях

$$\xi_1^2 = \kappa_{3113} \kappa_{1221}^{-1}; \quad \xi_{2,3}^2 = c \pm (c^2 - q_3^2 \kappa_{3113} q_1^{-2} \kappa_{1331})^{1/2}; \\ 2c q_1^2 \kappa_{1331} = q_1^2 \kappa_{3333} + q_3^2 \kappa_{1111} - q_1 q_3 (\kappa_{1133} + \kappa_{3311} + \kappa_{1313} + \kappa_{3131}). \quad (2.101)$$

Построение решений в конкретных классах задач определяется структурой параметров ξ_j^2 ($j = 1, 2, 3$) в виде (2.101) и соотношениями между ними.

Общие решения для несжимаемых тел в виде (2.95) – (2.97) для плоских задач и в виде (2.100), (2.88) и (2.101) для пространственных задач широко применялись в мо-

нографиях [30, 31, 34, 35, 44, 49, 54, 57, 334] и в ряде других монографий, а также в соответствующих статьях, опубликованных в периодических изданиях; наиболее полно и последовательно обсуждаемые общие решения представлены в монографиях [49, 334], в которых также приведены выражения для определения составляющих $k_{ij\alpha\beta}$ тензора k для общих и ряда конкретных моделей упругих, пластических и тел с реологическими свойствами.

2.5.3. Комплексные потенциалы в плоских задачах ТЛТУДТ. Предварительное обсуждение. Комплексные потенциалы в плоских задачах ТЛТУДТ для статического метода исследования (метода Эйлера) последовательно введены в монографии [44] в 1983 г.; предварительно в более сокращенном виде обсуждаемые результаты были представлены в статьях, которые указаны в списке литературы к [44]. В последующие годы обсуждаемые результаты были представлены в полном объеме в т. 2 коллективной монографии [154] в 1991 г., в Дополнении к монографии [334] в 1999 г. и в т. 2 двухтомной монографии [57] в 2008 г.; поскольку монография [334] издана на английском языке издательством **Springer**, то обсуждаемые результаты вполне доступны для англоязычных исследователей.

Рассматриваемые комплексные потенциалы в плоских задачах ТЛТУДТ вводятся для статического (метода Эйлера) метода исследования при отсутствии возмущений массовых и поверхностных сил (при выполнении условий (2.81)), как и во всех других результатах п. 2.5; в этом случае согласно п. 2.4.2 выполняются достаточные условия применимости статического метода (метода Эйлера). Следовательно, при применении обсуждаемых комплексных потенциалов результаты решений задач при динамическом и статическом методах совпадают.

Ниже в п. 2.5.3 обсудим, следуя обозначениям [57], построение комплексных потенциалов плоских задач ТЛТУДТ для линеаризированной механики материалов с начальными (остаточными) напряжениями, так как последняя в соответствии с Примечанием 2.4 совпадает с ТЛТУДТ, если величины в ТЛТУДТ, отмеченные индексом «0» (в ТЛТУДТ это величины докритического состояния), считать известными и называть их начальными (остаточными) напряжениями. К тому же, из *восьми* неклассических проблем механики разрушения, рассматриваемых в настоящей статье, в соответствии с п. 1.3 в **Проблеме 4** (*хрупкое разрушение материалов с трещинами с учетом действия начальных (остаточных) напряжений вдоль трещины*) применяются комплексные потенциалы плоских задач линеаризированной механики материалов с начальными (остаточными) напряжениями.

При построении комплексных потенциалов плоских задач линеаризированной механики материалов с начальными (остаточными) напряжениями необходимо учитывать следующую ситуацию. В §2 настоящей статьи при рассмотрении основных соотношений ТЛТУДТ в соответствии с п. 2.1 применялась лагранжева система координат, которая в отсчетном состоянии (первом состоянии) совпадала с определенной криволинейной системой координат; при этом использовались составляющие тензора напряжений, отнесенные также к размерам площадок в отсчетном (первом состоянии), что является общепринятым в механике деформируемых тел. В случае плоских задач ТЛТУДТ в п. 2.5.1 применительно к сжимаемым телам и в п. 2.5.2 применительно к несжимаемым телам применялась лагранжева система координат, введенная в отсчетном (первом состоянии) и совпадающая в этом отсчетном (первом) состоянии с декартовой системой координат. При введении комплексных потенциалов плоских задач линеаризированной механики материалов с начальными (остаточными) напряжениями, как и в любой другой проблеме указанной механики, уже отсчетным состоянием следует считать начальное состояние (второе, невозмущенное состояние по терминологии п. 2.1); таким образом, во втором состоянии следует вводить лагранжевы координаты, которые во втором состоянии совпадают с определенными криволинейными системами координат. Кроме того, в рассматриваемом случае целесообразно вводить тензора напряжений, составляющие которых измеряются на единицу площади также во втором (невозмущенном) состоянии.

Ниже, следуя вышеизложенному подходу, рассматриваются основные соотношения и общие решения линеаризованной механики материалов с начальными (остаточными) напряжениями, когда начальное состояние определяется соотношениями (2.78) и (2.79) и является однородным состоянием; кроме того, будем рассматривать материалы со свойствами симметрии, указанными во вводной части п. 2.5.

2.5.4. Основные соотношения и общие решения ТЛТУДТ в координатах начального состояния. Целесообразно отметить, что основные соотношения обсуждаемой механики для случая (2.78) и (2.79) в компактной форме представлены в §4 главы 1 первого тома двухтомной монографии [57], которым будем также следовать ниже.

В соответствии с вышеизложенным в рассматриваемом случае вводятся лагранжеры координаты y_m ($m = 1, 2, 3$), которые в начальном состоянии (втором, невозмущенном, в обсуждаемом случае – отсчетном) совпадают с декартовыми координатами. В обсуждаемом случае связь между введенными декартовыми координатами y_n и декартовыми координатами x_n , которые применялись в пп. 2.5.1 и 2.5.2, для одной и той же материальной точки имеет следующий вид:

$$y_n = \lambda_n x_n; \lambda_n = \text{const.} \quad (2.102)$$

Составляющие вектора перемещений (2.79) для начального состояния в координатах y_n можно представить в следующей форме:

$$u_m^0 = \lambda_m^{-1} (\lambda_m - 1) y_m. \quad (2.103)$$

В дальнейшем для всех величин, которые рассматриваются в начальном (втором, невозмущенном, в обсуждаемом случае – отсчетном) состоянии и отнесены к геометрическим объектам в этом же состоянии, вводятся обозначения с индексом «штрих»; исключение представляют комплексные потенциалы, в которых индекс «штрих» обозначает производную по комплексной переменной. Таким образом, вводятся: Q'_{nm} – составляющие несимметричного тензора напряжений; P'_m – составляющие вектора поверхностной нагрузки на площадке с ортом нормали N ; ρ' – плотность материала. Для введенных величин имеют место следующие выражения:

$$Q'_{nm} = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{-1} \lambda_n t_{nm}; P'_m = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{-1} \lambda_n N_n^{-1} P_m; \rho' = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{-1} \rho. \quad (2.104)$$

Отметим, что во всех монографиях автора настоящей статьи при применении лагранжева метода описания движения сплошной среды через N обозначается орт нормали в определенной точке материальной поверхности в отсчетном состоянии, в качестве которого выбрано недеформированное (первое) состояние; составляющие N_m орта нормали в (2.104) также относятся к вышеуказанному орту нормали. При указанных обозначениях в той же точке материальной поверхности в возмущенном состоянии (третьем состоянии, в актуальной конфигурации) действует поверхностная нагрузка P .

Для формулировки основных соотношений в координатах начального состояния в настоящем п. 2.5.4 вводится орт N^0 нормали к той же материальной поверхности в той же определенной точке в начальном (втором, невозмущенном, докритическом) состоянии; в этом случае имеет место [57] (т. 1, стр. 153) следующее соотношение:

$$N_j^0 = (\lambda_\alpha N_\alpha^{-1}) \lambda_j^{-1} N_j. \quad (2.105)$$

Учитывая выражения (2.102) – (2.105), получаем в декартовых координатах y_n ($n = 1, 2, 3$), введенных в начальном состоянии, основные соотношения линеаризованной механики материалов с начальными (остаточными) напряжениями в виде следующих соотношений:

уравнения движения

$$Q'_{ij,i} - \rho' \ddot{u}_j = 0, \quad y_n \in V'; \quad (2.106)$$

уравнения несжимаемости

$$u_{n,n} = 0, \quad y_m \in V'; \quad (2.107)$$

граничные условия в напряжениях на части S'_1 поверхности тела

$$Q'_j = P'_j, \quad y_n \in S'_1; \quad Q'_j = N_i^0 Q'_{ij}; \quad (2.108)$$

граничные условия в перемещениях на части S'_2 поверхности тела

$$u_j = 0, \quad y_n \in S'_2; \quad (2.109)$$

линеаризованные определяющие соотношения для сжимаемых тел

$$Q'_{ij} = \omega'_{ij\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}, \quad (2.110)$$

где составляющие тензора ω' имеют следующий вид:

$$\omega'_{ij\alpha\beta} = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{-1} \lambda_i \lambda_j \omega_{ij\alpha\beta}; \quad (2.111)$$

линеаризованные определяющие соотношения для несжимаемых тел

$$Q'_{ij} = \kappa'_{ij\alpha\beta} u_{\alpha,\beta} + \delta_{ij} p', \quad (2.112)$$

где составляющие тензора κ' имеют следующий вид:

$$\kappa'_{ij\alpha\beta} = \lambda_i \lambda_j \kappa_{ij\alpha\beta}. \quad (2.113)$$

Следует отметить, что в монографиях [30, 31, 34, 35, 44, 49, 54, 57, 334] приведены для общих и конкретных моделей упругих, пластических и тел с реологическими свойствами выражения для определения составляющих тензоров ω и κ при однородных начальных (остаточных) состояниях или докритических состояниях в виде (2.78) и (2.79).

Таким образом, выражения (2.106) – (2.113) совместно с выражениями для определения составляющих тензоров ω и κ в вышеуказанных монографиях представляют собой основные соотношения линеаризованной механики материалов с начальными (остаточными) напряжениями в виде (2.78) и (2.79) или ТЛТУДТ (что тождественно в силу **Примечания 2.2**) при однородном докритическом состоянии в виде (2.78) и (2.79). Вышеуказанные основные соотношения построены в лагранжевых координатах, которые совпадают с декартовыми координатами, введенными в начальном (втором, докритическом, невозмущенном) состоянии; при этом все величины отнесены к геометрическим объектам в этом же начальном состоянии. Отметим, что обсуждаемые основные соотношения выше приведены в обозначениях, которые соответствуют обозначениям §4 главы 1 первого тома монографии [57]; при этом вышеизложенные основные соотношения представлены в едином общем виде для **теорий 1, 2 и 3** (по терминологии вводной части (п. 2.4).

Для вышеизложенных основных соотношений в координатах начального состояния можно построить общие решения в форме, аналогичной общим решениям в координатах первого (недеформированного, отсчетного) состояния, которые изложены в пп. 2.5.1 и 2.5.2; обсуждаемые общие решения достаточно подробно представлены в §4 главы 1 первого тома монографии [57]. Ниже в качестве примера приведем общие решения для плоской деформации при применении статического метода исследования (метода Эйлера) по аналогии с результатами пп. 2.5.1 и 2.5.2; поскольку для рассматриваемого случая (2.81) возмущений массовых и поверхностных сил выполняются достаточные условия применимости статического метода (метода Эйлера), то результаты, полученные на основе обсуждаемых общих решений для статического метода, будут совпадать с результатами, полученными в рамках динамического метода.

Таким образом, рассматривается плоская деформация в плоскости $y_1 0 y_2$; в этом случае по аналогии с (2.82) и (2.93) имеют место следующие соотношения:
для сжимаемых тел

$$u_1 = u_1(y_1, y_2); u_2 = u_2(y_1, y_2); u_3 = 0 \quad (2.114)$$

и для несжимаемых тел

$$u_1 = u_1(y_1, y_2); u_2 = u_2(y_1, y_2); u_3 = 0; p = p(y_1, y_2). \quad (2.115)$$

В рассматриваемом случае плоской деформации все величины определяются через функции $\chi^{(j)}$ ($j = 1, 2$ для сжимаемых тел и $j = 1, 2, 4$ для несжимаемых тел) или через их линейные комбинации, которые являются решениями уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \eta_2'^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \eta_3'^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \right) \chi^{(j)} = 0; \quad (2.116)$$

при этом параметры $\eta_2'^2$ и $\eta_3'^2$ можно представить в следующей форме:

$$\eta_{2,3}'^2 = A' \pm \sqrt{A'^2 - A_1'}. \quad (2.117)$$

В (2.117) введены следующие обозначения для сжимаемых тел:

$$2\omega'_{2222}\omega'_{2112}A' = \omega'_{1111}\omega'_{2222} + \omega'_{2112}\omega'_{1221} - (\omega'_{1122} + \omega'_{1212})^2; \omega'_{2222}\omega'_{2112}A_1' = \omega'_{1111}\omega'_{1221} \quad (2.118)$$

и для несжимаемых тел

$$2\kappa'_{2112}A' = \kappa'_{1111} + \kappa'_{2222} - 2(\kappa'_{1122} + \kappa'_{1212}); \kappa'_{2222}A_1' = \kappa'_{1221}. \quad (2.119)$$

С учетом вышеприведенных результатов и обозначений общее решение можно представить в следующей форме для сжимаемых тел:

$$\begin{aligned} u_1 &= \left(\omega'_{1221} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \omega'_{2222} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \chi^{(2)} - (\omega'_{1122} + \omega'_{1212}) \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} \chi^{(2)}; \\ u_2 &= -(\omega'_{1122} + \omega'_{1212}) \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} \chi^{(2)} + \left(\omega'_{1111} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \omega'_{2112} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \chi^{(1)} \end{aligned} \quad (2.120)$$

и для несжимаемых тел:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \chi^{(1)} + \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} \chi^{(2)} - \left[\kappa'_{1221} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + (\kappa'_{2222} - \kappa'_{1122} - \kappa'_{1212}) \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right] \frac{\partial}{\partial y_1} \chi^{(4)}; \\ u_2 &= \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} \chi^{(1)} - \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \chi^{(2)} - \left[(\kappa'_{1111} - \kappa'_{1122} - \kappa'_{1212}) \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \kappa'_{2112} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right] \frac{\partial}{\partial y_2} \chi^{(4)}; \\ p' &= -\left[\kappa'_{1221} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + (\kappa'_{2222} - \kappa'_{1122} - \kappa'_{1212}) \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right] \frac{\partial}{\partial y_1} \chi^{(1)} - \\ &\quad - \left[(\kappa'_{1111} - \kappa'_{1122} - \kappa'_{1212}) \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \kappa'_{2112} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right] \frac{\partial}{\partial y_2} \chi^{(2)}. \end{aligned} \quad (2.121)$$

Общие решения для плоской задачи (плоская деформация) в виде (2.114) – (2.121) применяются для введения комплексных потенциалов; краткая информация и основные результаты по обсуждаемому вопросу приведены в следующем пункте.

2.5.5. Комплексные потенциалы в плоских линейризованных задачах в координатах начального состояния. Как уже отмечалось в п. 2.5.3, комплексные потенциалы в плоских задачах для статического метода исследования (метода Эйлера) последовательно и в полном объеме введены в монографии [44] в 1983 г.; предварительно в более сокращенном виде обсуждаемые результаты были представлены в статьях, которые указаны в списке литературы к [44]. В последующие годы обсуждаемые результаты были представлены в полном объеме в т. 2 коллективной монографии [154] в 1991 г., в Дополнении к монографии [334] в 1999 г. и в т. 2 двухтомной монографии [57] в 2008 г. Ниже приведем краткие сведения о комплексных потенциалах в плоских линейризованных задачах, которые введены в координатах начального (второго, невозмущенного) состояния; более подробно обсуждаемые результаты изложены в §2 главы 7 второго тома двухтомной монографии [57], обозначения и стиль изложения которого также применяется ниже применительно к упругим и пластическим материалам.

Наряду с параметрами η_2^2 и η_3^2 , которые вводятся выражениями (2.117) – (2.119) и которые полностью характеризуют рассматриваемый сжимаемый или несжимаемый материал и действующие начальные (остаточные) напряжения, также вводятся комплексные параметры μ_1' и μ_2' следующими соотношениями:

$$\mu_{1,2}' = -\eta_{2,3}^2 = -\left(A' \pm \sqrt{A'^2 - A_1'}\right); \mu_{1,2}' = i\sqrt{A' \pm \sqrt{A'^2 - A_1'}}. \quad (2.122)$$

Комплексные переменные в рассматриваемом случае плоской деформации вводятся следующим образом:

$$z_k = y_1 + \mu_k' y_2; \bar{z}_k = y_1 + \bar{\mu}_k' y_2; k = 1, 2. \quad (2.123)$$

В силу (2.117) – (2.118) и (2.122) комплексные переменные z_k (2.123) зависят от свойств рассматриваемого сжимаемого или несжимаемого материала и действующих начальных (остаточных) или докритических напряжений.

Строго доказано, что имеют место случаи равных и неравных комплексных параметров или корней μ_1' и μ_2' , для которых выполняются определенные условия.

Так, в случае неравных корней получаем

$$\mu_1' \neq \mu_2'; \mu_1' = -\bar{\mu}_2' \quad (2.124)$$

и в случае равных корней получаем

$$\mu_1' = \mu_2'; \bar{\mu}_1' = -\mu_1'; \operatorname{Re} \mu_1' = 0. \quad (2.125)$$

После введения комплексных переменных в виде (2.123) с учетом обозначений (2.122) представление напряжений Q_{ij}' и перемещений u_m для плоской задачи через комплексные потенциалы строится с применением уравнения (2.116) и представлений общих решений в виде (2.120) для сжимаемых тел и в виде (2.121) для несжимаемых тел. При указанном построении применяются определенные линейные комбинации функций $\chi'^{(1)}$, $\chi'^{(2)}$ и $\chi'^{(4)}$ чтобы обеспечить переход к классическим комплексным представлениям Колосова-Мусхелишвили [148] и Лехницкого [140] при стремлении начальных (остаточных, докритических) напряжений к нулю; соответствующие преобразования достаточно подробно изложены в монографии [44], в т. 2 коллективной монографии [154] и в т. 2 двухтомной монографии [57].

Ниже приведем комплексные представления для напряжений и перемещений отдельно для случаев неравных (2.124) и равных (2.125) корней, следуя §2 главы 7 второго тома двухтомной монографии [57].

Так, для случая неравных корней (2.124) имеет место представление

$$\begin{aligned}
Q'_{22} &= 2 \operatorname{Re} [\Phi'_1(z_1) + \Phi'_2(z_2)]; \\
Q'_{21} &= -2 \operatorname{Re} [\gamma_{21}^{(1)} \mu'_1 \Phi'_1(z_1) + \gamma_{21}^{(2)} \mu'_2 \Phi'_2(z_2)]; \\
Q'_{12} &= -2 \operatorname{Re} [\mu'_1 \Phi'_1(z_1) + \mu'_2 \Phi'_2(z_2)]; \\
Q'_{11} &= 2 \operatorname{Re} [\gamma_{11}^{(1)} \mu_1'^2 \Phi'_1(z_1) + \gamma_{11}^{(2)} \mu_2'^2 \Phi'_2(z_2)]; \\
u_k &= 2 \operatorname{Re} [\gamma_k^{(1)} \Phi_1(z_1) + \gamma_k^{(2)} \Phi_2(z_2)]; \quad k = 1, 2.
\end{aligned} \tag{2.126}$$

В (2.126) и ниже, как и отмечалось после выражений (2.103), индекс «штрих» возле функций от комплексных переменных обозначает производную от функций по комплексной переменной. Таким образом, выражения (2.126) определяют напряжения и перемещения плоской линейризированной задачи в случае (2.124) неравных корней через комплексные потенциалы $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$; при этом $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$ являются аналитическими функциями в области, занятой рассматриваемым материалом. Для сжимаемых и несжимаемых материалов с моделями достаточно общего вида в [57] (§2, глава 7, т. 2) приведены выражения для определения величин $\gamma_{21}^{(j)}$, $\gamma_{11}^{(j)}$, $\gamma_1^{(j)}$ и $\gamma_2^{(j)}$ (при $j=1, 2$) через μ'_1 , μ'_2 , $\omega'_{\text{нм}\alpha\beta}$ и $\kappa'_{\text{нм}\alpha\beta}$.

Для случая равных корней (2.125) имеет место следующее представление:

$$\begin{aligned}
Q'_{22} &= \operatorname{Re} \{ [\Psi(z_1) + \bar{z}_1 \Phi'(z_1)] + \gamma_{22}^{(2)} \Phi(z_1) \}; \\
Q'_{21} &= \operatorname{Re} \{ \mu'_1 \gamma_{21}^{(1)} [\Psi(z_1) + \bar{z}_1 \Phi'(z_1)] + \gamma_{21}^{(2)} \Phi(z_1) \}; \\
Q'_{12} &= \operatorname{Re} \{ -\mu'_1 [\Psi(z_1) + \bar{z}_1 \Phi'(z_1)] + \gamma_{12}^{(2)} \Phi(z_1) \}; \\
Q'_{11} &= \operatorname{Re} \{ \mu_1'^2 \gamma_{11}^{(1)} [\Psi(z_1) + \bar{z}_1 \Phi'(z_1)] + \gamma_{11}^{(2)} \Phi(z_1) \}; \\
u_k &= \operatorname{Re} \{ \gamma_k^{(1)} [\psi(z_1) + \bar{z}_1 \varphi'(z_1)] + \gamma_k^{(2)} \varphi(z_1) \}; \quad k = 1, 2; \\
\Phi(z_1) &= \varphi'(z_1), \quad \Psi(z_1) = \psi'(z_1).
\end{aligned} \tag{2.127}$$

В (2.127) и ниже, как и отмечалось после выражений (2.103) и (2.126), индекс «штрих» возле функций от комплексных переменных обозначает производную от функций по комплексной переменной. Таким образом, выражения (2.127) определяют напряжения и перемещения плоской линейризированной задачи в случае (2.125) равных корней через комплексные потенциалы $\Psi(z_1)$ и $\Phi(z_1)$; при этом $\Psi(z_1)$ и $\Phi(z_1)$ являются аналитическими функциями в области, занятой рассматриваемым материалом. Для сжимаемых и несжимаемых материалов с моделями достаточно общего вида в [57] (§2, глава 7, т. 2) приведены выражения для определения величин $\gamma_{22}^{(2)}$, $\gamma_{21}^{(j)}$, $\gamma_{12}^{(2)}$, $\gamma_{11}^{(j)}$, $\gamma_1^{(j)}$ и $\gamma_2^{(j)}$ (при $j=1, 2$) через μ'_1 , $\omega'_{\text{нм}\alpha\beta}$ и $\kappa'_{\text{нм}\alpha\beta}$.

Необходимо отметить, что представления (2.126) и (2.127) перемещений и напряжений плоских линейризированных задач через аналитические функции комплексных переменных относятся к материалам с *однородными* механическими свойствами в случае определяющих уравнений достаточно общего вида, имеющими рассматриваемые свойства симметрии, и *однородных* начальных (остаточных, докритических) состояний в виде (2.78) и (2.79). Обсуждаемые представления (2.126) и (2.127) для вышеуказанной общности постановки задач дают возможность с привлечением методов теории аналитических функций комплексных переменных получать точные решения

различных смешанных задач, когда граничные условия заданы при $y_2 = \text{const}$. В частности, с привлечением формулы Келдыша-Седова [126] и представления через комплексные потенциалы в виде (2.126) для неравных корней (2.124) и в виде (2.127) для равных корней (2.125) при рассматриваемой общности постановки задач (в единой общей форме для теорий 1, 2 и 3 по терминологии вводной части п. 2.4) получены точные решения для трещины, расположенной в плоскости $y_2 = \text{const}$.

Для простейшего случая *неоднородного* материала (кусочно-однородный материал, трещина расположена в границе раздела свойств материала, в *interface*, при $y_2 = \text{const}$) уже нельзя получить точные решения при применении вышеуказанных методов. В обсуждаемом случае (*кусочно-однородный материал*, смешанные граничные условия заданы на линии раздела свойств материала при $y_2 = \text{const}$) для задач статики в рамках классической линейной теории упругости изотропного тела в монографии Мухелишвили [148] изложен метод решения указанных задач, который основан на сведении к задаче сопряжения двух голоморфных функций, заданных во всей плоскости.

Ниже в весьма краткой форме излагаются результаты по сведению плоских линейаризованных задач при рассматриваемой общности постановки задач для обсуждаемого случая (кусочно-однородный материал, граница раздела $y_2 = 0$, трещина в границе раздела) к задаче сопряжения двух голоморфных функций, заданных во всей плоскости; более подробно рассматриваемые результаты изложены в монографии [57] (§2, глава 8, т. 2). Через L_1 обозначим совокупность отрезков на линии $y_2 = 0$, соответствующих трещинам; через L_2 обозначим совокупность отрезков на линии $y_2 = 0$, соответствующих полному соединению двух компонент композитного материала (непрерывность векторов напряжений и перемещений). В обсуждаемом случае граничные условия на линии соединения (при $y_2 = 0$) в соответствии с [57] (стр. 171, т. 2) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} Q_{22}^{(\pm)} = 0, \quad Q_{21}^{(\pm)} = 0 \quad \text{при } y_1 \in L_1 \text{ и } y_2 = 0; \\ Q_{22}^{(+)} = Q_{22}^{(-)}, \quad Q_{21}^{(+)} = Q_{21}^{(-)}, \quad \frac{\partial}{\partial y_1}(u_1^{(+)} - u_1^{(-)}) = 0; \\ \frac{\partial}{\partial y_1}(u_2^{(+)} - u_2^{(-)}) = 0 \quad \text{при } y_1 \in L_2 \text{ и } y_2 = 0; \end{aligned} \quad (2.128)$$

при этом также получаем соответствующие условия затухания «на бесконечности» при $y_2 \rightarrow \pm\infty$, поскольку рассматриваем композитный материал, составленный из двух полуплоскостей. Индексами (\pm) в (2.128) и ниже отмечены все величины, относящиеся к вышеуказанным двум полуплоскостям. Принадлежность комплексных потенциалов в представлениях (2.126) и (2.127) к определенному конкретному материалу, занимающему соответствующую полуплоскость, достигается за счет применения комплексных параметров μ_1' и μ_2' (2.122), вычисленных для этого же материала. Таким образом, в обсуждаемом случае кусочно-однородного материала, состоящего из двух полуплоскостей, получаем по два комплексных потенциала (в представлениях (2.126) и (2.127)) для каждой из полуплоскостей; при этом вышеуказанные комплексные потенциалы являются аналитическими функциями *только* для соответствующих полуплоскостей. Для разработки метода построения точных решений для соединенных двух полуплоскостей в рамках плоской линейаризованной задачи, аналогичного методу Мухелишвили [148] в рамках плоской задачи классической линейной теории упругости изотропного тела, необходимо вместо представлений (2.126) и (2.127) построить представления для *полуплоскости* через аналитические функции комплексных переменных, когда эти функции определены для всей плоскости. Такого типа

представления построены в статьях [377 – 380, 482] и достаточно подробно изложены в монографии [57] (§2, глава 8, т. 2); в связи с этим ниже лишь приведем соответствующие представления для величин, которые входят в граничные условия (2.128) на линии соединения (при $y_2 = 0$) отдельно для случая неравных корней (2.124) и случая равных корней (2.125).

Так, для случая неравных корней (2.124) для величин, входящих в граничные условия (2.128), получено представление

$$\begin{aligned} Q'_{22} &= 2 \operatorname{Re} \left\{ C_{11} [\Phi(z_1) - (\bar{z}_2)\Phi] + C_{12} [\overline{\Phi(z_1)} - \overline{\Phi(z_2)}] \right\}; \\ Q'_{21} &= 2 \operatorname{Re} \left\{ C_{21} [\Phi_1(z_1) - \Phi(\bar{z}_2)] + C_{22} [\Phi(z_1) - \Phi(z_2)] \right\}; \\ \frac{\partial u_1}{\partial y_1} &= 2 \operatorname{Re} [C_{31}\Phi(z_1) + C_{32}\Phi(\bar{z}_2) + C_{33}\Phi(z_2)]; \\ \frac{\partial u_2}{\partial y_1} &= 2 \operatorname{Re} [C_{41}\Phi(z_1) + C_{42}\Phi(\bar{z}_2) + C_{43}\Phi(z_2)]. \end{aligned} \quad (2.129)$$

Выражения (2.129) относятся в равной мере к верхней и нижней полуплоскостям; для получения выражений, относящихся только к верхней или нижней полуплоскостям необходимо во всех величинах и функциях, входящих в (2.129), поставить индексы (\pm). В монографии [57] (т. 2, стр. 175) представлены выражения для определения C_{nm} , входящих в (2.129), через μ'_1, μ'_2 и коэффициенты, входящие в представление (2.126) для случая неравных корней (2.124). Необходимо отметить, что в (2.129) функция $\Phi(z)$ является голоморфной во всей плоскости.

Аналогичным образом для случая равных корней (2.125) для величин, входящих в граничные условия (2.128), получено следующее представление:

$$\begin{aligned} Q'_{22} &= 2 \operatorname{Re} \left\{ C_{11} [\Phi(z_1) - \Phi(\bar{z}_1)] \right\} + C_{12} (z_1 - \bar{z}_1) [\Phi'(z_1) - \overline{\Phi'(z_1)}]; \\ Q'_{21} &= 2 \operatorname{Re} \left\{ C_{21} [\Phi(z_1) - \Phi(\bar{z}_1)] \right\} + C_{22} (z_1 - \bar{z}_1) [\Phi'(z_1) + \overline{\Phi'(z_1)}]; \\ \frac{\partial u_1}{\partial y_1} &= 2 \operatorname{Re} [C_{31}\Phi(z_1) + C_{32}\Phi(\bar{z}_1)] + C_{33} (z_1 - \bar{z}_1) [\Phi'(z_1) - \overline{\Phi'(z_1)}]; \\ \frac{\partial u_2}{\partial y_1} &= 2 \operatorname{Re} [C_{41}\Phi(z_1) + C_{42}\Phi(\bar{z}_1)] + C_{43} (z_1 - \bar{z}_1) [\Phi'(z_1) + \overline{\Phi'(z_1)}]. \end{aligned} \quad (2.130)$$

Выражения (2.130) относятся в равной мере к верхней и нижней полуплоскостям; для получения выражений, относящихся только к верхней или нижней полуплоскостям, необходимо во всех величинах и функциях, входящих в (2.130), поставить индексы (\pm). В монографии [57] (т. 2, стр. 178) представлены выражения для определения C_{nm} , входящих в (2.130), через μ'_1 и коэффициенты, входящие в представление (2.127) для случая равных корней (2.125). Необходимо отметить, что в (2.130) функция $\Phi(z)$ является голоморфной во всей плоскости.

С привлечением представлений (2.129) в случае неравных корней (2.124) и (2.130) в случае равных корней (2.125) *смешанные* плоские линеаризованные задачи или задачи ТЛТУДТ для кусочно-однородного материала (две полуплоскости, соединенные между собой) с линией раздела $y_2 = 0$ сводятся к задаче сопряжения двух голоморфных во всей плоскости функций. В ряде случаев можно получить точное решение обсуждаемой задачи сопряжения двух функций в рамках математического аппарата плоских линеаризованных задач; в частности, в статьях [337 – 380, 482] за 2000

– 2001 г. и в монографии [57] (т. 2, глава 8, §2) за 2008 г. изложено точное решение задачи об устойчивости кусочно-однородного материала (две полуплоскости, соединенные между собой) при сжатии вдоль границы раздела, в которой расположены плоские трещины, при общей постановке задач, рассматриваемой в п. 2.5 настоящей статьи.

Целесообразно отметить, что в монографии [57] (т. 2) также изложено представление через комплексные потенциалы типа (2.126) и (2.127) для антиплоской линеаризованной задачи в координатах начального состояния; для сокращения объема статьи указанные результаты в настоящей статье не обсуждаются.

2.5.6. Комплексные потенциалы в динамических плоских линеаризованных задачах в координатах начального состояния для движущихся трещин и нагрузок. В настоящем пункте в весьма краткой форме, краткой даже по сравнению с пп. 2.5.4 и 2.5.5, приведем основные результаты по введению комплексных потенциалов в динамических плоских линеаризованных задачах в координатах начального состояния, когда трещины расположены в плоскости $y_2 = \text{const}$ и движутся равномерно и прямолинейно с постоянной скоростью $v = \text{const}$ вдоль оси Oy_1 ; рассматриваются плоские трещины в плоскости $y_2 = \text{const}$, которые являются бесконечными в направлении оси Oy_3 и имеют постоянную ширину вдоль оси Oy_1 . Поскольку в плоскости $y_2 = \text{const}$ расположены вышеуказанные трещины, то дополнительно к (2.78) и (2.79) для начального (остаточного, невозмущенного, докритического) состояния принимается следующее условие:

$$\sigma_{22}^0 = 0. \quad (2.131)$$

Также принимается, что материалы имеют такие же свойства симметрии, как и в пп. 2.5.3 – 2.5.4. Исследования проводятся для дозвукового режима движения трещин, т.е. выполняются следующие условия:

$$c_{11} > v, c_{s12} > v, c_{s13} > v. \quad (2.132)$$

В (2.132) использованы обозначения монографии [60] для «истинных» скоростей движения плоских волн в телах с начальными напряжениями (2.78), (2.79) и (2.131): c_{1m} – скорость продольных волн, распространяющихся вдоль оси Oy_m ; c_{smn} – скорость поперечных волн (волн сдвига), распространяющихся вдоль оси Oy_m и поляризованных в плоскости $y_n Oy_n$; c_{smk} – скорость поперечных волн (волн сдвига), распространяющихся вдоль оси Oy_m и поляризованных в плоскости $y_n Oy_k$; $m \neq n \neq k \neq m$.

При вышеуказанных в п. 2.5.6 условиях процесс введения и применения комплексных потенциалов в динамических плоских линеаризованных задачах в координатах начального состояния для движущихся трещин и нагрузок достаточно подробно изложен в монографии [44] за 1983 г.; предварительно результаты, полученные до 1983 г., были опубликованы в периодической печати в научных статьях, которые указаны в списке литературы к монографии [44]. Наиболее полно обсуждаемые результаты для динамических задач, включая и результаты для кусочно-однородных материалов (композитных материалов) типа результатов заключительной части п. 2.5.5, представлены в монографии [57] (т. 2, глава 10) за 2008 г.; предварительно соответствующие результаты, полученные в 1983 – 2007 гг., были опубликованы в научных статьях, которые указаны в списке литературы к монографии. Дополнительно следует указать современный обзор [58], который посвящен анализу результатов по механике движущихся трещин в материалах с начальными (остаточными) напряжениями, которые получены до 2011 г.

В обсуждаемом случае для введения комплексных потенциалов для плоских линеаризованных задач применительно к движущимся трещинам и нагрузкам следует исходить из основных соотношений в виде (2.106) – (2.113) динамики материалов с

рассматриваемыми начальными (остаточными) напряжениями, сформулированными в координатах начального состояния. Наряду с декартовой системой координат с координатами y_j ($j=1, 2, 3$) введем подвижную декартову систему координат с координатами η_j ($j=1, 2, 3$) следующими соотношениями:

$$\eta_1 = y_1 - v\tau; \eta_2 = y_2; \eta_3 = y_3. \quad (2.133)$$

Для плоской задачи в плоскости $\eta_1\eta_2$ в подвижных координатах η_j ($j=1, 2, 3$) комплексные переменные z_k ($k=1, 2$) вводятся следующими выражениями:

$$\begin{aligned} z_k &= \eta_1 + \mu'_k \eta_2 \equiv y_1 - v\tau + \mu'_k y_2; \\ \bar{z}_k &= \eta_1 + \bar{\mu}'_k \eta_2 \equiv y_1 - v\tau + \bar{\mu}'_k y_2; \quad k=1, 2, \end{aligned} \quad (2.134)$$

где комплексные параметры μ'_1 и μ'_2 определяются вторым выражением (2.122), в котором введены следующие обозначения:

для сжимаемых материалов

$$\begin{aligned} 2A'\omega'_{2222}\omega'_{2112} &= (\omega'_{1111} - \rho'v^2)\omega'_{2222} + \omega'_{2112}(\omega'_{1221} - \rho'v^2) - (\omega'_{1122} + \omega'_{1212})^2; \\ A'\omega'_{2222}\omega'_{2112} &= (\omega'_{1111} - \rho'v^2)(\omega'_{1221} - \rho'v^2) \end{aligned} \quad (2.135)$$

и для несжимаемых материалов

$$\begin{aligned} 2A'\kappa'_{2112} &= \kappa'_{1111} - \rho v^2 + \kappa'_{2222} - 2(\kappa'_{1122} + \kappa'_{1212}); \\ A'\kappa'_{2112} &= \kappa'_{1212} - \rho v^2. \end{aligned} \quad (2.136)$$

При обозначениях для A' и A'_1 в виде (2.135) для сжимаемых материалов и в виде (2.136) для несжимаемых материалов и второго выражения (2.122) для определения корней μ'_1 и μ'_2 строго доказано, что имеет место случай неравных корней в виде (2.124) и случай равных корней в виде (2.125).

Дальнейшая процедура введения комплексных потенциалов соответствует процедуре, изложенной в п. 2.5.5 для статических задач; эти результаты подробно изложены в монографии [57] (т. 2, глава 10), в связи с этим ниже приведем лишь конечные результаты, учитывая, что для динамических задач комплексные переменные вводятся соотношениями (2.134) и комплексные корни μ'_1 и μ'_2 определяются вторым выражением (2.122) пары обозначениях (2.135) и (2.136).

Так, в случае неравных корней (2.124) напряжения и перемещения динамических плоских линеаризированных задач определяются следующими соотношениями

$$\begin{aligned} Q'_{22} &= 2 \operatorname{Re}[\Phi'_1(z_1) + \Phi'_2(z_2)]; \\ Q'_{21} &= -2 \operatorname{Re}[\mu'_1 \gamma_{21}^{(1)} \Phi'_1(z_1) + \mu'_2 \gamma_{21}^{(2)} \Phi'_2(z_2)]; \\ Q'_{12} &= -2 \operatorname{Re}[\mu'_1 \gamma_{12}^{(1)} \Phi'_1(z_1) + \mu'_2 \gamma_{12}^{(2)} \Phi'_2(z_2)]; \\ Q'_{11} &= 2 \operatorname{Re}[\mu_1^2 \gamma_{11}^{(1)} \Phi'_1(z_1) + \mu_2^2 \gamma_{11}^{(2)} \Phi'_2(z_2)]; \\ u_k &= 2 \operatorname{Re}[\gamma_k^{(1)} \Phi_1(z_1) + \gamma_k^{(2)} \Phi_2(z_2)]; \quad k=1, 2 \end{aligned} \quad (2.137)$$

через комплексные потенциалы $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$, которые являются аналитическими функциями в области, занятой рассматриваемым материалом. Необходимо отметить, что представления (2.137) для динамических задач при неравных корнях *отличаются* от соответствующих представлений (2.126) для статических задач при неравных корнях не только различными выражениями для определения величин $\mu'_1, \mu'_2, A', A'_1, \dots, \gamma_k^{(2)}$, но и тем, что в (2.137) величины $\gamma_{12}^{(j)} \neq 1$ при $j = 1, 2$. В монографии [57] (т. 2, стр. 339) для сжимаемых и несжимаемых материалов с моделями достаточно общего вида приведены выражения для определения величин $\gamma_{21}^{(j)}, \gamma_{12}^{(j)}, \gamma_{11}^{(j)}, \gamma_1^{(j)}$ и $\gamma_2^{(j)}$ (при $j = 1, 2$) через $\mu'_1, \mu'_2, \omega'_{\alpha\beta}$ и $\kappa'_{\alpha\beta}$.

В случае равных корней (2.125) напряжения и перемещения динамических плоских линеаризованных задач определяются следующими соотношениями

$$\begin{aligned} Q'_{22} &= \operatorname{Re} \left\{ [\Psi(z_1) + \bar{z}_1 \Phi'(z_1)] + \gamma_{22}^{(2)} \Phi(z_1) \right\}; \\ Q'_{21} &= \operatorname{Re} \left\{ \mu'_1 \gamma_{21}^{(1)} [\Psi(z_1) + \bar{z}_1 \Phi'(z_1)] + \gamma_{21}^{(2)} \Phi(z_1) \right\}; \\ Q'_{12} &= \operatorname{Re} \left\{ -\mu'_1 \gamma_{12}^{(1)} [\Psi(z_1) + \bar{z}_1 \Phi'(z_1)] + \gamma_{12}^{(2)} \Phi(z_1) \right\}; \\ Q'_{11} &= \operatorname{Re} \left\{ \mu_1'^2 \gamma_{11}^{(1)} [\Psi(z_1) + \bar{z}_1 \Phi'(z_1)] + \gamma_{11}^{(2)} \Phi(z_1) \right\}; \\ u_k &= \operatorname{Re} \left\{ \gamma_k^{(1)} [\psi(z_1) + \bar{z}_1 \varphi(z_1)] + \gamma_k^{(2)} \varphi(z_1) \right\}; \quad k = 1, 2; \\ \Phi(z_1) &= \varphi'(z_1), \quad \Psi(z_1) = \psi'(z_1) \end{aligned} \tag{2.138}$$

через комплексные потенциалы $\Phi(z_1)$ и $\Psi(z_1)$, которые являются аналитическими функциями в области, занятой рассматриваемым материалом. Необходимо отметить, что представления (2.138) для динамических задач при равных корнях *отличаются* от соответствующих представлений (2.127) для статических задач при равных корнях не только различными выражениями для определения величин $\mu'_1, A', A'_1, \gamma_{22}^{(2)}, \dots, \gamma_k^{(2)}$, но и тем, что в (2.138) величина $\gamma_{12}^{(1)} \neq 1$. В монографии [57] (т. 2, стр. 342 – 344) для сжимаемых и несжимаемых материалов с моделями достаточно общего вида приведены выражения для определения величин $\gamma_{22}^{(2)}, \gamma_{21}^{(j)}, \gamma_{12}^{(j)}, \gamma_{11}^{(j)}, \gamma_1^{(j)}$ и $\gamma_2^{(j)}$ (при $j = 1, 2$) через $\mu'_1, \omega'_{\alpha\beta}$ и $\kappa'_{\alpha\beta}$.

Также отметим, что комплексные представления напряжений и перемещений динамических плоских линеаризованных задач в виде (2.137) для неравных корней (2.124) и в виде (2.138) для равных корней (2.125) при стремлении начальных (остаточных, докритических) напряжений к нулю переходят в известные комплексные представления Галина [19] динамической плоской задачи классической линейной теории упругости.

Необходимо отметить, что представления (2.137) и (2.138) перемещений и напряжений динамических плоских линеаризованных задач через аналитические функции комплексных переменных, как и соответствующие представления (2.126) и (2.127) для статических плоских линеаризованных задач, относятся к материалам с *однородными* механическими свойствами в случае определяющих уравнений достаточно общего вида, имеющими рассматриваемые свойства симметрии, и *однородных* начальных (остаточных, докритических) состояний в виде (2.78) и (2.79). Обсуждаемые представления (2.137) и (2.138) для вышеуказанной общности постановки задач дают возможность (с привлечением методов теории аналитических функций комплексных переменных) получать точные решения различных смешанных задач, когда

движущиеся граничные смешанные условия заданы при $y_2 = \text{const}$. В частности, с привлечением формулы Келдыша-Седова [126] и представлений для динамических плоских линеаризованных задач через комплексные потенциалы в виде (2.137) для случая неравных корней (2.124) и в виде (2.138) для равных корней (2.125) при рассматриваемой общности постановки задач (в единой общей форме для теорий 1, 2 и 3 по терминологии вводной части п. 2.4) получены точные решения для трещины, движущейся в плоскости $y_2 = \text{const}$.

Для простейшего случая *неоднородного* материала (кусочно-однородный материал, движущаяся трещина расположена в границе раздела свойств материала, в *interface*, при $y_2 = \text{const}$) уже нельзя получать точные решения при применении вышеуказанных методов. В рассматриваемом случае динамических плоских линеаризованных задач для двух соединенных полуплоскостей из различных материалов, по линии раздела которых (в *interface*) движутся плоские трещины, необходимо построить представление напряжений и перемещений для каждой из полуплоскостей через аналитические функции, которые определены для всей плоскости; аналогичная ситуация имеет место и для статических плоских линеаризованных задач, которая исследована во второй половине предыдущего пункта (п. 2.5.6). Следует отметить, что в вышеизложенных комплексных представлениях (2.137) и (2.138) для динамических плоских линеаризованных задач представлены комплексные потенциалы, которые являются аналитическими функциями *лишь* для областей, занятых рассматриваемым материалом; в обсуждаемом случае (две соединенные полуплоскости) в представлениях (2.137) и (2.138) комплексные потенциалы являются аналитическими функциями для соответствующих полуплоскостей. После получения представления напряжений и перемещений динамических плоских линеаризованных задач для *полуплоскости* через аналитические функции, которые определены *для всей плоскости*, точные решения в ряде случаев можно получить посредством сведения к задаче Римана – Гильберта или по терминологии монографии [148] к задаче сопряжения двух голоморфных функций, заданных во всей плоскости. Соответствующие результаты в достаточно полной форме представлены в монографии [57] (т. 2, глава 10, §§5 и 6), в связи с этим ниже приведем лишь некоторые основные результаты.

Граничные условия на линии раздела (при $y_2 = 0$) для движущихся трещин в границе раздела в подвижной системе координат по аналогии с (2.128) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} Q_{22}'^{(\pm)} = 0, \quad Q_{21}'^{(\pm)} = 0 \quad \text{при } \eta_1 \in L_1 \text{ и } \eta_2 = 0; \\ Q_{22}'^{(+)} = Q_{22}'^{(-)}, \quad Q_{21}'^{(+)} = Q_{21}'^{(-)}, \quad \frac{\partial}{\partial \eta_1} (u_1^{(+)} - u_1^{(-)}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \eta_1} (u_2^{(+)} - u_2^{(-)}) = 0. \end{aligned} \quad (2.139)$$

Представление величин, входящих в (2.139), для каждой из полуплоскостей приведем для неравных и равных корней μ_1' и μ_2' , которые определяются вторым выражением (2.122) при обозначениях (2.135) и (2.136) для динамических плоских линеаризованных задач.

Так в случае неравных корней (2.124) величины, входящие в (2.139), для каждой из полуплоскостей определяются следующими выражениями

$$\begin{aligned} Q_{22}' &= 2 \operatorname{Re} \left\{ C_{11} [\Phi(z_1) - \Phi(\bar{z}_2)] + C_{12} [\overline{\Phi(z_1) - \Phi(z_2)}] \right\}; \\ Q_{21}' &= 2 \operatorname{Re} \left\{ C_{21} [\Phi(z_1) - \Phi(\bar{z}_2)] + C_{22} [\Phi(z_1) - \Phi(z_2)] \right\}; \\ \frac{\partial u_1}{\partial \eta_1} &= 2 \operatorname{Re} [C_{31} \Phi(z_1) + C_{32} \Phi(\bar{z}_2) + C_{33} \Phi(z_2)]; \\ \frac{\partial u_2}{\partial \eta_1} &= 2 \operatorname{Re} [C_{41} \Phi(z_1) + C_{42} \Phi(\bar{z}_2) + C_{43} \Phi(z_2)] \end{aligned} \quad (2.140)$$

через функцию $\Phi(z_j)$ при $j = 1, 2$, которая является голоморфной во всей плоскости.

В монографии [57] (т. 2, стр. 401) представлены выражения для определения C_{nm} , входящих в (2.140), через μ'_1 и μ'_2 и коэффициенты, входящие в представление (2.137) для случая неравных корней (2.124), применительно к динамической плоской линеаризованной задаче. Выражения (2.140) относятся в равной мере к верхней и нижней полуплоскостям; для получения выражений, относящихся только к верхней или нижней полуплоскостям, необходимо во всех величинах и функциях, входящих в (2.140), поставить индекс (\pm) .

В случае равных корней (2.125) величины, входящие в (2.139), для каждой из полуплоскостей определяются следующими выражениями

$$\begin{aligned} Q'_{22} &= 2 \operatorname{Re}\{C_{11}[\Phi(z_1) - \Phi(\bar{z}_1)]\} + C_{12}(z_1 - \bar{z}_1)[\Phi'(z_1) - \overline{\Phi'(z_1)}]; \\ Q'_{21} &= 2 \operatorname{Re}\{C_{21}[\Phi(z_1) - \Phi(\bar{z}_1)]\} + C_{22}(z_1 - \bar{z}_1)[\Phi'(z_1) + \overline{\Phi'(z_1)}]; \\ \frac{\partial u_1}{\partial \eta_1} &= 2 \operatorname{Re}[C_{31}\Phi(z_1) + C_{32}\Phi(\bar{z}_1)] + C_{33}(z_1 - \bar{z}_1)[\Phi'(z_1) - \overline{\Phi'(z_1)}]; \\ \frac{\partial u_2}{\partial \eta_1} &= 2 \operatorname{Re}[C_{41}\Phi(z_1) + C_{42}\Phi(\bar{z}_1)] + C_{43}(z_1 - \bar{z}_1)[\Phi'(z_1) + \overline{\Phi'(z_1)}] \end{aligned} \quad (2.141)$$

через функцию $\Phi(z_1)$, которая является голоморфной во всей плоскости.

В монографии [57] (т. 2, стр. 405) представлены выражения для определения C_{nm} , входящих в (2.141), через μ'_1 и коэффициенты, входящие в представление (2.138) для случая равных корней (2.125), применительно к динамической плоской линеаризованной задаче. Выражения (2.141) относятся в равной мере к верхней и нижней полуплоскостям; для получения выражений, относящихся к верхней или нижней полуплоскостям, необходимо во всех величинах и функциях, входящих в (2.141), поставить индекс (\pm) .

С привлечением представлений (2.140) и (2.141) через одну функцию, которая является голоморфной во всей плоскости, и с последующим сведением к задаче Римана – Гильберта выполнен последовательный анализ ряда динамических плоских линеаризованных задач для композитного материала, состоящего из двух соединенных полуплоскостей из различных материалов, в линии раздела которых движется плоская трещина. Соответствующие строгие результаты были первоначально опубликованы в статьях [339 – 342] за 2002 г. и представлены в достаточно полной форме в монографии [57] (т. 2, глава 10, §§5 и 6) за 2008 г.; анализ результатов по построению механики движущихся трещин в материалах с начальными (остаточными) напряжениями представлен в современном обзоре [58] за 2011 г.

Целесообразно отметить, что применительно к динамическим линеаризованным задачам в координатах начального состояния для движущихся трещин и нагрузок получено представление напряжений и перемещений через комплексные потенциалы не только для плоской задачи, для которой они имеют вид (2.137) для случая неравных корней (2.124) и вид (2.138) для случая равных корней (2.125), но и для соответствующей антиплоской задачи. Для последней ситуации (антиплоская задача) представления напряжений и перемещений имеют более простой вид по сравнению с представлениями (2.137) и (2.138); соответствующие результаты приведены в монографии [57] (т. 2, глава 10, §2), для сокращения объема настоящей статьи вышеуказанные результаты здесь не приводятся.

Примечание 2.14. В пп. 2.5.5 и 2.5.6 для статических и динамических плоских линеаризованных задач в координатах начального состояния изложено представление напряжений и перемещений через комплексные потенциалы в единой общей форме для теорий 1, 2 и 3 (по терминологии вводной части п. 2.4). В обсуждаемых результатах при введении лагранжевых координат, которые в начальном (остаточном,

докритическом, невозмущенном, втором) состоянии совпадают с декартовыми координатами, учитывается **изменение** геометрических объектов при переходе от отсчетного (первого) состояния ко второму (невозмущенному) состоянию. Из результатов п. 2.2 настоящей статьи получаем, что в **теории 2** (*первый вариант теории малых докритических деформаций*) и в **теории 3** (*второй вариант теории малых докритических деформаций*) вышеотмеченные **изменения не следует** учитывать в силу принципов и точности построения обсуждаемых теорий. Таким образом, из вышеизложенного следует, что при последовательном рассмотрении обсуждаемых теорий отмеченное **изменение** необходимо учитывать **только в теории 1** (*теории больших (конечных) докритических деформаций*).

В заключение к §2 настоящей статьи следует отметить, что в обсуждаемом параграфе достаточно последовательно изложены математические основы ТЛТУДТ, что дает возможность в последующих параграфах не приводить рассмотренные результаты применительно к каждой соответствующей проблеме.

РЕЗЮМЕ. Оглядова стаття присвячена короткому опису та відповідному аналізу основних результатів по неklasичним проблемам механіки руйнування, які одержані автором статті та його учнями за останні 50 років у відділі динаміки та стійкості суцільних середовищ Інституту механіки ім.С.П.Тимошенка НАНУ.

Оглядова стаття розділена на три частини. Перша частина має підзаголовок «Загальні питання» і публікується в журналі «Прикладная механика» (55, № 2, 2019); в першу частину включено Вступ та §§1 і 2. Друга частина має підзаголовок «Руйнування композитних матеріалів при стиску»; в другу частину включено §§3 – 5. Третя частина має підзаголовок «Інші неklasичні проблеми механіки руйнування»; в третю частину включено §§6 – 10 та список літератури, який є загальним для всіх трьох частин.

Поступила 26.03.2018

Утверждена в печать 22.11.2018