

УДК 004.942:519.876.5

В. М. Карпенко*, канд. техн. наук,

В. А. Федорчук**, канд. техн. наук

*ДП «Науканафтогаз» НАК «Нафтогаз України», м. Київ,

**Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова НАН України, м Київ

ПОБУДОВА СТРУКТУРНИХ АПРОКСИМАЦІЙНИХ МОДЕЛЕЙ РОЗПОДІЛЕНИХ ЛАНОК ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ НА ПРИКЛАДІ БУРИЛЬНОЇ КОЛОНИ БУРОВОЇ УСТАНОВКИ

Розглянуто спосіб побудови математичних моделей розподілених ланок електромеханічних систем на прикладі бурильної колони бурової установки. Проведено оцінку похибки апроксимації.

Ключові слова: *математична модель, апроксимація, розподілений об'єкт.*

Вступ. Розвиток електронних та комп'ютерних засобів дав поштовх також і до розвитку сучасних електромеханічних систем. Використання в їх складі комп'ютерних засобів дозволило розв'язати комплекс задач, які пов'язані не лише з керуванням, а також із контролем, адаптацією, діагностикою, сумісною роботою з іншими системами, підтримкою інтелектуальних функцій тощо. Слід відзначити, що поява можливості вирішення таких складних та специфічних задач обумовлена використанням в підсистемах керування, контролю та діагностики комп'ютерних моделей об'єктів керування. Отже, на сучасному етапі розвитку керованих електромеханічних систем виникає задача побудови комп'ютерних моделей реального часу для об'єктів керування.

Ще на етапі побудови математичної моделі доцільно проводити аналіз особливостей обраного класу динамічних об'єктів з метою отримання математичних залежностей в такому вигляді, який би давав змогу ефективно розв'язувати поставлені задачі. Різноманітність способів математичного опису динамічних систем, можливість комбінування різних підходів при моделюванні різнотипних елементів — все це приводить до необхідності врахування специфіки кожного елемента системи. Так при описі динаміки складних механічних елементів (довгих кінематичних передач, просторових рамних конструкцій і механізмів), які складаються як з однорідних, так і з неоднорідних елементів (балок, стержнів, пластин, оболонок і т.д.) з різними типами зв'язку між собою (з'єднання через пружні і демпферні елементи, жорсткі та рухомо-шарнірні з'єднання тощо), застосування універсального підходу моделювання є неможливим. Наявність різнотипних зв'язків та різ-

них типів руху між елементами в системах (поздовжнього, поперечного, крутильних коливань) ускладнюють задачу їх математичного опису. Така різноманітність способів взаємодії може бути відтворена за допомогою структурних моделей, які можуть складатися з різнотипних ланок, з'єднаних певним чином в єдину блочно-структурну схему.

Для побудови моделі використовуються два типи блоків — блоки із входами-виходами, що прийшли з теорії керування, і блоки з контактами, які успішно використовуються при проектуванні механічних, гідравлічних та електричних систем. Складні моделі, які складаються із компонентів різної фізичної природи та оснащені цифровими системами керування, вимагають одночасного використання блоків різного типу. Далі модель автоматично представляється у вигляді великої системи рівнянь, яку необхідно розв'язати чисельно. Автоматична побудова сукупної системи рівнянь та вибір для неї ефективного чисельного методу розв'язування є складною теоретичною і технічною задачею. Насамперед, складність обумовлена тим, що електромеханічні системи містять елементи різної фізичної природи з різними характеристиками та властивостями, що породжує неоднорідність їх математичного опису. При чисельній реалізації таких математичних моделей підхід, коли загальна система рівнянь розв'язується одним методом, без врахування специфіки математичного опису складових частин моделі, в переважній більшості випадків виявляється неефективним, а іноді і неможливим.

Побудова структурної моделі. Для забезпечення широких можливостей у виборі методів чисельної реалізації для структурних елементів математичної моделі доцільно використовувати структурно-алгоритмічний метод, який передбачає проведення синтезу моделі на рівні структурних елементів у вигляді блоків-алгоритмів.

При використанні структурно-алгоритмічного підходу процес побудови моделі складної електромеханічної системи можна розділити на такі етапи:

Аналіз і конкретизація задачі. При створенні моделі проводять аналіз класу задач, які будуть розв'язуватися з її використанням. Основна мета, що переслідується на цьому етапі — збір інформації про специфіку процесів, що моделюються та визначення вимог щодо необхідної адекватності і точності моделі.

Проведення декомпозиції системи. У разі необхідності проводиться перший рівень декомпозиції системи за фізичним принципом. При цьому система подається у вигляді сукупності m елементів $\Pi_i^{(1)}$, ($i = \overline{1, m}$) з певної множини фізичних підсистем 1-го рівня. Наприклад, для класу електромеханічних систем «бурові установки» до

множини фізичних підсистем 1-го рівня можуть входити: дизель, генератор електричної енергії, лебідка, електродвигун лебідки, талева система, насоси промивної рідини, електродвигун роторного столу, бурильна колона, забійний двигун, пристрої для автоматизації спуско-підйомних робіт тощо. Оскільки при функціонуванні електромеханічної системи її фізичні підсистеми, що отримуються в результаті першого рівня декомпозиції, взаємодіють між собою через різного роду зв'язки (механічні, гідравлічні, пневматичні, електричні та ін.), то при синтезі моделі задається ще і їх опис $F_{\Pi_j}^{(1)}(\Pi_1^{(1)}, \Pi_2^{(1)}, \dots, \Pi_m^{(1)})$, $j = \overline{1, l}$, де l — кількість існуючих зв'язків між підсистемами першого рівня.

Якщо в результаті проведення першого рівня декомпозиції деякі структурні елементи (підсистеми) виявляються занадто складними і виникають труднощі при їх математичному описі, або є необхідність контролю параметрів підсистеми на рівні їх внутрішньої структури, тоді для таких елементів доцільно проводити повторну декомпозицію, тобто декомпозицію 2-го рівня. В результаті отримаємо розширення множини фізичних підсистем $\Pi_r^{(2)}$, ($r = \overline{1, k}$) та зв'язків між ними $F_{\Pi_j}^{(2)}(\Pi_1^{(1)}, \Pi_2^{(1)}, \dots, \Pi_m^{(1)}, \Pi_1^{(2)}, \Pi_2^{(2)}, \dots, \Pi_k^{(2)})$, $j = \overline{1, g}$, де g — кількість існуючих зв'язків між підсистемами першого і другого рівня.

Описаний процес можна проводити поетапно, доки не отримаємо елементарні фізичні підсистеми, для яких проводити декомпозицію вже не доцільно.

Формування математичної моделі. Для кожного структурного елемента системи, що моделюється, обирається один із можливих варіантів його математичного опису, виходячи із аналізу поставленої задачі. Побудова моделей структурних елементів може проводитись двома способами: на основі відомих фізичних законів чи на основі експериментальних даних. Отримані математичні моделі можуть мати різні форми опису: алгебраїчну, диференціальну, інтегральну, алгебраїчно-диференціальну, інтегро-диференціальну і т.п. Загалом отримаємо структурну неоднорідну математичну модель системи.

Перетворення та апроксимація вихідних математичних моделей до зручного для моделювання вигляду. Різноманітність форм математичного опису динамічних об'єктів вимагає окремо розв'язання задачі вибору ефективного способу подання математичних моделей з урахуванням їх подальшої чисельної реалізації. Вибір способу математичного опису структурних елементів залежить від багатьох факторів: від характеру залежностей (лінійні, нелінійні); від вимірності (просторово-одновимірні та багатовимірні); від просторової залежно-

сті параметрів (із зосередженими чи розподіленими параметрами); від залежності в часі (стаціонарні, нестаціонарні), від швидкості зміни параметрів (високочастотні чи низькочастотні) і т.п. Також враховується арсенал алгоритмічних засобів для чисельної реалізації різних типів моделей та можливості еквівалентних та апроксимаційних перетворень моделей, в тому числі, за допомогою розроблених спеціалізованих програмних засобів. Отже, для отримання можливості вибору ефективного способу математичного опису структурних елементів моделей складних електромеханічних систем виникає необхідність у розробці для цього класу об'єктів методів їх математичного опису та перетворення, на основі яких створюється базова множина математичних моделей підсистем. Це дає змогу використовувати в повній мірі структурно-алгоритмічний підхід з можливістю врахування на кожному етапі синтезу моделі додаткової інформації про об'єкт, що в цілому дозволяє підвищити ефективність розв'язання поставленої задачі.

Розробка структурно-алгоритмічної моделі. Оскільки при чисельній реалізації структурних математичних моделей задача зводиться до чисельної реалізації окремих структурних елементів моделі, які, в свою чергу, отримано на основі базової множини математичних моделей підсистем, тоді є зміст в розробці для кожного елемента базової множини алгоритму його чисельної реалізації. В результаті отримаємо базову множину алгоритмів для чисельної реалізації моделей підсистем, що дає можливість синтезу моделей складних електромеханічних систем із певного базового набору скалярних моделей-алгоритмів. При цьому виникає важлива задача — забезпечення алгоритмічної сумісності програмних модулів в незалежності від методів їх внутрішньої алгоритмічної реалізації.

Введення параметрів моделі та розв'язування задачі. При чисельній реалізації отриманих структурних елементів математичної моделі виникає необхідність в обчисленні необхідних параметрів, які, власне кажучи, можуть і не збігатися з відомими фізичними параметрами вихідної моделі. Тоді, для зручності роботи з комп'ютерною моделлю, необхідно передбачити можливість їх автоматичного перерахунку.

Реєстрація результатів моделювання. На цьому етапі відображаються результати обчислень у вигляді чисел, графіків, діаграм. Вони виводяться на екран, паперовий або магнітний носій. Для цього модель доцільно будувати таким чином, щоб контрольні параметри були присутні в моделі у явному вигляді.

Контроль точності. Для оцінки вірогідності отриманих результатів необхідно проводити контроль точності розв'язків. Оскільки строгий аналіз точності є складною задачею, то в більшості випадків

можна обмежитися наближеними, але оперативними методами контролю точності. Для цього можна використовувати метод порівняння аналітичного і машинного розв'язків при однакових вихідних даних. В якості тестових вхідних сигналів у багатьох випадках використовують одиничний стрибок.

Аналіз результатів і доопрацювання моделі. Для підвищення адекватності комп'ютерної моделі необхідно проводити аналіз отриманих результатів і, якщо потрібно, здійснювати корекцію моделі. При алгоритмічно-структурному методі моделювання елементам комп'ютерної структурної моделі, як правило, відповідають окремі фізичні елементи, що дає можливість контролю та корегування окремих фрагментів моделі.

Отримання математичних залежностей. Вихідним пунктом задачі математичного моделювання є виділення та аналіз сукупності незалежних і залежних змінних, що характеризують досліджуваний об'єкт.

У загальному випадку в результаті цього етапу утворюється набір $\{t, x, y, u, u_t, u_x, u_{xx} \dots\}$, (1) де t — час, x та y — просторові (незалежні) змінні; в набір входить залежна змінна u та її похідні, склад яких визначається з апіорних передумов.

Величини (1) використовуються для одержання математичної моделі об'єкта одним із двох основних шляхів: або на основі відомих законів, тобто на основі розробленої раніше теорії досліджуваного об'єкта, або на основі експериментальних даних про впливи на об'єкт і його реакції, тобто, на основі методів ідентифікації. Будемо вважати, що в кінцевому результаті величини (1) зв'язуються якоюсь точною залежністю Φ , якщо застосувати перший підхід, або наближеною залежністю $\tilde{\Phi}$, якщо застосувати другий, і модель буде подаватись рівнянням

$$\Phi(t, x, y, u, u_t, \dots) = 0 \quad (2)$$

у першому випадку, або

$$\tilde{\Phi}(t, x, y, u, u_t, \dots) = 0 \quad (3)$$

у другому.

В залежності від виду об'єкта та ступеня адекватності його математичної моделі рівняння (2) або (3) можуть бути звичайними диференціальними рівняннями, рівняннями в частинних похідних, одномірними або багатомірними інтегральними, інтегро-диференціальними рівняннями тощо.

Отже, при моделюванні динамічних систем важливим способом виявлення їх специфічних властивостей і можливостей чисельної реалізації є подання моделей у різних еквівалентних формах, що вимагає

розвитку методів еквівалентних перетворень. Найчастіше отримання моделі, виходячи з її фізичних властивостей, зручно здійснювати в одній формі, а її чисельну реалізацію — в іншій, еквівалентній вихідній.

У зв'язку із зростанням складності досліджуваних динамічних систем, а отже і складності їх моделей, істотну роль набувають методи нееквівалентних (апроксимаційних) перетворень математичних описів систем. В основі даних методів лежить можливість спрощення вихідної динамічної моделі шляхом визначення і виключення тих її компонент, які слабо (виходячи з деякого критерію) впливають на результат моделювання.

При реалізації такого підходу проводиться апроксимація вихідної моделі більш простим описом шляхом редукції, тобто виконується заміна $\Phi \rightarrow \tilde{\Phi}$ (або $\tilde{\Phi} \rightarrow \tilde{\tilde{\Phi}}$), виходячи з мінімізації обраного й обґрунтованого критерію близькості виду

$$\mu(\tilde{\Phi}, \tilde{\tilde{\Phi}}) = \varepsilon \rightarrow \min.$$

На даний час нееквівалентні методи перетворення моделей ще не одержали достатнього розвитку, незважаючи на те, що вони приводять до досить ефективних результатів.

Зіставлення декількох видів математичних моделей одного і того ж об'єкта дозволяє повніше оцінити їх адекватність, вибрати ту чи іншу модель за умов найбільш ефективної реалізації. Від якості вибраної моделі залежить ефективність результатів дослідження об'єкта в цілому. Так при моделюванні об'єктів з розподіленими параметрами, математичні моделі яких, зазвичай, подаються у вигляді диференціальних рівнянь в частинних похідних, виникає необхідність в їх апроксимації системами звичайних диференціальних рівнянь. З фізичної точки зору такий перехід означає заміну моделі системи з нескінченим числом степенів свободи моделлю системи зі скінченим числом степенів свободи.

Розглянемо математичний опис об'єкта з розподіленими параметрами, заданий в прямокутній області $G \{ \alpha < x < \beta; y_0 < y < y_0 + l \}$ у вигляді еліптичного диференціального рівняння

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + d(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + e(x, y)u = f(x, y), \quad (4)$$

$$(a, b > 0 \text{ в } G + \Gamma),$$

з граничними умовами

$$\left. \begin{aligned} u(x, y_0) &= \varphi_0(x); \quad u(x, y_0 + l) = \varphi_1(x); \\ u(x, y_0) &= \varphi_0(x); \quad u(x, y_0 + l) = \varphi_1(x) \quad (\alpha \leq x \leq \beta), \\ u(\alpha, y) &= \psi_0(y); \quad u(\beta, y) = \psi_1(y) \quad (y_0 \leq y \leq y_0 + l), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

де $\varphi_i(x), \psi_i(y)$ ($i = 0, 1$) — задані функції.

Застосувавши метод прямих [1] до рівнянь (4)—(5) отримаємо систему з n звичайних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку:

$$a_k(x)u_k''(x) + \frac{b_k(x)}{h^2}[u_{k+1}(x) - 2u_k(x) + u_{k-1}(x)] + c_k(x)u_k'(x) + \frac{d_k(x)}{2h}[u_{k+1}(x) - u_{k-1}(x)] + e_k(x)u_k(x) = f_k(x) + O(h^2), \quad (6)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n),$$

де $y_k = y_0 + k_n$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$), $h = \frac{l}{n+1}$, $y_k(x) = u(x, y_k)$.

Нехтуючи в (6) членами $O(h^2)$ та позначивши через $U_k(x)$ наближені значення розв'язку $u(x, y)$ на прямій $y = y_k$ для їх визначення, отримаємо систему рівнянь

$$a_k(x)U_k''(x) + \frac{b_k(x)}{h^2}[U_{k+1}(x) - 2U_k(x) + U_{k-1}(x)] + c_k(x)U_k'(x) + \frac{d_k(x)}{2h}[U_{k+1}(x) - U_{k-1}(x)] + e_k(x)U_k(x) = f_k(x), \quad (7)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n).$$

Використовуючи граничні умови на Γ , маємо:

$$\left. \begin{aligned} U_0(x) &= \varphi_0(x) \quad (\alpha \leq x \leq \beta), \\ U_{n+1}(x) &= \varphi_1(x) \quad (\alpha \leq x \leq \beta), \\ U_k(\alpha) &= \psi(y_k); \quad U_k(\beta) = \psi_1(y_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Отже, отримана модель у вигляді системи диференціальних рівнянь (7) з граничними умовами (8) апроксимує з точністю до h^2 диференціальне рівняння (4) з граничними умовами (5). Слід відзначити, що за допомогою методу прямих, який використовується для розв'язування диференціальних рівнянь в частинних похідних по суті проводиться декомпозиція вихідної моделі за однією змінною на n структурних елементів. На основі проведеної декомпозиції можна здійснювати побудову структурних моделей об'єктів з розподіленими параметрами. При цьому слід враховувати, що заміна моделі з нескінченною кількістю степенів свободи скінченновимірною приводить до розходжень значень їх власних частот. Отже, для оцінки точності отриманих структурних апроксимаційних моделей можна скористатись величиною відмінності власних частот розподіленого і скінченнозосередженого об'єкта.

Оцінимо точність апроксимації при заміні однорідного об'єкта з розподіленими параметрами, що зазнає деформації розтягу та стиснення багатомасовою системою. Його власні частоти знаходяться шляхом розв'язування наступної задачі:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0,$$

де u — зсув перерізу розподіленого об'єкта; $a^2 = \frac{Es}{\rho} = \frac{Esl}{M_0}$; M_0 — повна маса розподіленого об'єкта.

Частоти знаходяться зі співвідношення

$$\omega_q = \frac{\pi a q}{l} = \pi \chi q, \quad q = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

де q — номер гармоніки; $\chi = \sqrt{\frac{k_0}{M_0}}$; $k_0 = \frac{Es}{l}$ — повна жорсткість розподіленого об'єкта.

В якості оцінки точності апроксимації прийемо величину різниці власних частот еквівалентних об'єктів із розподіленими та зосередженими параметрами. Для переходу до багатомасової моделі розділимо стержень на n однакових ділянок. Масу кожної ділянки $m_i = M_0/n$ зосередимо в її середині у вигляді абсолютно жорсткого тіла. Жорсткості між сусідніми ділянками приймаємо рівними жорсткості ділянок $k_{i,i+1} = nk_0$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. Надалі для спрощення запишу індекси для величин $k_{i,i+1}$ та m_i опустимо.

Для визначення власних частот багатомасової системи позначимо відносний зсув сусідніх мас через u_i . Тоді, враховуючи (7), можна записати $n-1$ рівнянь

$$\begin{cases} mu_1'' + 2ku_1 - ku_2 = 0; \\ mu_2'' - ku_1 + 2ku_2 - ku_3 = 0; \\ \dots \dots \dots \\ mu_i'' - ku_{i-1} + 2ku_i - ku_{i+1} = 0; \\ \dots \dots \dots \\ mu_{n-1}'' - ku_{n-2} + 2ku_{n-1} = 0. \end{cases}$$

Запишемо характеристичне рівняння цієї системи

$$\Delta_{n-1}(\omega) = k^{n-1} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 2 - \frac{m\omega^2}{k} & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 - \frac{m\omega^2}{k} & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 - \frac{m\omega^2}{k} & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 - \frac{m\omega^2}{k} \end{bmatrix} = (10)$$

$$= k^{n-1} \Delta_{n-1}(\omega) = 0.$$

Розкриття визначника $\Delta_{n-1}(\omega)$ за степенями ω^2 і знаходження власних частот вимагає навіть при відносно невеликому порядку визначника значної обчислювальної роботи. Для скорочення обчислень і знаходження власних частот без розв'язання рівняння $(n-1)$ -го порядку відносно ω^2 можна скористатися методом виробляючих функцій.

Нехай $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\Delta}_n z^n$ — виробляюча функція послідовності $\{\tilde{\Delta}_n\}$. Розкриваючи визначник $\tilde{\Delta}_{i+2}$ за елементами першого рядка і алгебраїчне доповнення до члена -1 у першому рядку за елементами першого стовпця, отримуємо

$$\tilde{\Delta}_{i+2} = \left(2 - \frac{m\omega^2}{k} \right) \tilde{\Delta}_{i+1} - \tilde{\Delta}_i. \quad (11)$$

При цьому

$$\tilde{\Delta}_0 = 1; \quad \tilde{\Delta}_1 = 2 - \frac{m\omega^2}{k}. \quad (12)$$

Рівняння (11) множимо на z^{i+2} та підсумуємо по i :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\Delta}_{i+2} z^{i+2} = \left(2 - \frac{m\omega^2}{k} \right) z \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\Delta}_{i+1} z^{i+1} - z^2 \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\Delta}_i z^i. \quad (13)$$

Оскільки

$$\sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\Delta}_{i+2} z^{i+2} = \sum_{m=2}^{\infty} \tilde{\Delta}_m z^m = G(z) - \tilde{\Delta}_0 - \tilde{\Delta}_1 z;$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\Delta}_{i+1} z^{k+2} = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\Delta}_m z^m = G(z) - \tilde{\Delta}_0,$$

то рівняння (13) можна записати в такий спосіб:

$$G(z) - \tilde{\Delta}_0 - \tilde{\Delta}_1 z = \left(2 - \frac{m\omega^2}{k} \right) z \left[G(z) - \tilde{\Delta}_0 \right] - z^2 G(z).$$

Розв'язуючи це рівняння відносно $G(z)$ і використовуючи (12), знаходимо виробляючу функцію

$$G(z) = \frac{1}{1 - \left(2 - \frac{m\omega^2}{k} \right) z + z^2}.$$

Оскільки в характеристичному рівнянні діагональні члени завжди позитивні, позначаючи

$$1 - \frac{m\omega^2}{k} = \cos \alpha, \quad (14)$$

одержуємо

$$G(z) = \frac{1}{1 - \cos \alpha z + z^2}.$$

Останній вираз для виробляючої функції розвиваємо в степеневий ряд по z :

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin[(n+1)\alpha]}{\sin \alpha} z^n. \quad (15)$$

Коефіцієнти цього розвинення і є шуканими $\tilde{\Delta}_n$. Рівняння (10) для власних частот у випадку механічної багатомасової системи згідно (15) буде мати вигляд

$$\tilde{\Delta}_{n-1}(\omega) = \sin n\alpha = 0,$$

звідки $\alpha = \frac{\pi q}{n}$, $q = 1, 2, \dots, n-1$. З урахуванням (14) власні частоти системи, що складається з n мас, рівні

$$\omega_q^{(n)} = 2n\chi \sin \frac{\pi q}{(2n)}.$$

При збільшенні числа зосереджених мас значення низьких власних частот багатомасової системи із зосередженими параметрами

будуть наближатися до відповідних значень власних частот об'єкта з розподіленими параметрами:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ q \ll n}} \omega_q^{(n)} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ q \ll n}} 2n\chi \sin \frac{\pi q}{2n} = \pi\chi q = \omega_q.$$

Відносна похибка заміни об'єкта з розподіленими параметрами на систему із зосередженими параметрами рівна

$$\delta_q^{(n)} = \frac{\omega_q - \omega_q^{(n)}}{\omega_q} = 1 - \sin \frac{\pi q}{2n} / \frac{\pi q}{2n}. \quad (16)$$

Із цієї формули слідує, що похибка не залежить від параметрів об'єкта, а визначається лише числом зосереджених мас n і номером гармоніки q . На рис. 1 представлена залежність відносної похибки від значень номера гармоніки та числа зосереджених мас при апроксимації багатомасовою моделлю.

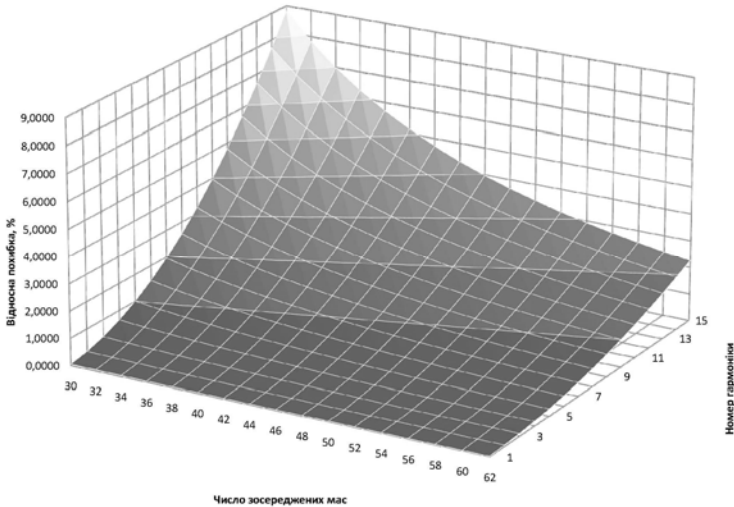


Рис. 1. Залежність відносної похибки від номера гармоніки та числа зосереджених мас

Отже, задаючись похибкою апроксимації або знаючи зону робочих частот усієї системи, при побудові апроксимаційної моделі можна визначити з (16) необхідну кількість диференціальних рівнянь системи (кількість зосереджених мас).

Побудова комп'ютерної моделі бурильної колони бурової установки. При розв'язуванні задач аналізу динаміки бурової установки, в задачах керування виникає необхідність створення адекватних математичних та комп'ютерних моделей як окремих елементів, так і всієї сис-

теми в цілому. При цьому доводиться мати справу з моделями елементів різної фізичної природи (із розподіленими та зосередженими параметрами, нелінійними та лінійними, просторово одномірними та багатомірними), які мають суттєві відмінності при їх математичному описі [2]. Аналіз таких систем за допомогою традиційних методів, коли розв'язується система рівнянь, в яку входять звичайні диференціальні рівняння, рівняння в частинних похідних, нелінійні диференціальні рівняння, інтегральні та інтегро-диференціальні рівняння, утруднюється, насамперед, відсутністю загальних методів їх розв'язування.

На сьогоднішній день для розв'язування окресленого кола задач можна використати велику кількість програмних засобів. Серед них доцільно відзначити такі, як MathCAD, Mathematica, Maple, MatLab, FemLab, WorkBench, Scilab, MAPC, ADAMS та ін. Однак, для реалізації структурно-алгоритмічного підходу при синтезі комп'ютерних моделей найбільш ефективним середовищем моделювання є Simulink/MatLab.

При моделюванні блоків бурової установки найбільші труднощі при чисельній реалізації викликають елементи з розподіленими параметрами. В першу чергу, це стосується колони бурильних труб, яка є неоднорідною, оскільки складається з різноманітного устаткування (сталених та поважчених бурильних труб, центраторів, перевідників, калібраторів, розширювачів, шламоуловлювачів та ін.).

Також типовим елементом з розподіленими параметрами є стовп промивної рідини, яка подається через бурову колону до забою. Необхідність врахування динаміки руху промивної рідини в буровій колоні викликана ще і тим, що промивна рідина при бурінні забійним двигуном використовується для передачі енергії до нього, а керування обертовим моментом на долоті здійснюється через гідравлічний зв'язок.

Колону бурильних труб, із врахуванням ряду припущень, можна вважати пружним стержнем із розподіленою масою, пружністю та в'язким тертям. До нижнього кінця колони прикладена осьова реакція забою і реакція долота, а по довжині — розподілені сили ваги, в'язкого тертя, інерції. У буровій колоні присутні три види деформації — кручення, згину та розтягу-стиску.

Деформація кручення впливає на динаміку обертального руху долота. При цьому на долото діє поздовжня сила зі сторони бурової колони, яка, у свою чергу, залежить від динаміки поздовжнього руху колони. Отже, для підтримки оптимального навантаження на долото необхідно враховувати також деформації розтягу-стиску в елементах колони. Зв'язок параметрів, що характеризують поступальний та обертальний рухи здійснюється через модель взаємодії долото-порода. Якщо використовується шарошечне долото, то при його обертанні, в результаті пере-

кочування шарошок по забою, виникають поздовжні коливання корпусу долота, які передаються бурильній колоні, а зубці шарошки, внаслідок ударної взаємодії з породою, спричинюють її руйнування.

Таким чином, для отримання повноцінних результатів моделювання необхідно враховувати взаємодію породи, шарошечного долота, забійного двигуна та колони бурильних труб.

Розглянемо способи математичного опису динаміки поздовжнього та обертального руху колони бурильних труб.

Швидкість зміщення перерізів колони $V(x,t)$, яка викликана дією погонної зовнішньої сили $F(x,t)$, описується диференціальним рівнянням в частинних похідних

$$m(x) \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} + h(x) \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} - k \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial F(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \quad (17)$$

із граничними та початковими умовами:

$$\frac{\partial V(l,t)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial V(0,t)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial V(x,0)}{\partial t} = 0; \quad V(x,0) = 0,$$

де $m(x)$ — погонна маса колони; $h(x)$ — погонний коефіцієнт опору колони; k — коефіцієнт пружності; $F(x,t)$ — погонна зовнішня сила; $T(x,t)$ — погонна сила тяжіння; $V(x,t)$ — швидкість руху перерізу колони.

Для опису динаміки обертального руху стержня використовується рівняння

$$J \frac{\partial^2 \omega(x,t)}{\partial t^2} + \tau \frac{\partial \omega(x,t)}{\partial t} - GJ_p \frac{\partial^2 \omega(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial M(x,t)}{\partial t} \quad (18)$$

із граничними та початковими умовами відповідно (19) та (20)

$$\frac{\partial \omega(l,t)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \omega(0,t)}{\partial x} = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial \omega(x,0)}{\partial t} = 0; \quad \omega(x,0) = 0, \quad (20)$$

де ω — частота обертання колони; J — момент інерції; G — модуль зсуву; M — момент кручення; τ — коефіцієнт опору обертального руху; J_p — полярний момент інерції.

Застосувавши метод прямих до рівнянь (17) та (18) отримаємо дві системи з n диференціальних рівнянь кожна

$$m_i \frac{\partial^2 V_i}{\partial t^2} + h_i \frac{\partial V_i}{\partial t} - k_i (V_{i-1} - 2V_i + V_{i+1}) = \frac{\partial F_i}{\partial t} - \frac{\partial T_i}{\partial t}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (21)$$

$$J_i \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial t^2} + \tau_i \frac{\partial \omega_i}{\partial t} - GJ_{pi} (\omega_{i-1} - 2\omega_i + \omega_{i+1}) = M_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (22)$$

де V_i — швидкість руху i -го елемента; F_i — зовнішня сила, що діє на i -й елемент; T_i — сила тяжіння, що діє на i -й елемент; h_i — коефіцієнт опору, що діє на i -й елемент; k_i — коефіцієнт пружності для i -го елемента; ω_i — частота обертання i -го елемента колони; M_i — момент кручення, що діє на i -й елемент; τ_i — коефіцієнт опору обертальному руху i -го елемента колони; J_{pi} — полярний момент інерції i -го елемента колони.

Після інтегрування систем рівнянь (21) та (22) отримаємо

$$m_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} + h_i \frac{\partial x_i}{\partial t} - k(x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}) = F_i - T_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (23)$$

$$J_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} + \tau_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} - GJ_{pi}(\varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1}) = M_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (24)$$

де x_i — та — координата i -го елемента; φ_i — кут зсуву i -го елемента.

При побудові моделі бурильної колони зробимо припущення, що вона є однорідною на скінченній кількості ділянок ненульової довжини. Тоді в межах однієї такої ділянки будемо мати незмінні параметри. Розглянемо деякі з них.

Момент інерції ділянки колони масою m та довжиною l знаходимо з виразу

$$J = \frac{m(R^2 - r^2)l}{2},$$

де R та r — відповідно, зовнішній та внутрішній радіус колони.

Полярний момент інерції ділянки колони обчислюється за формулою

$$J_p = \pi d^4 \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right) \frac{1}{32},$$

де d — зовнішній діаметр колони.

Момент опору, викликаний силами в'язкості при обертальному русі колони у промивній рідині, обчислюється за формулою Маргулеса

$$\tau = \frac{4\pi\eta h \varepsilon^2}{(\varepsilon^2 - 1)r_T} \omega; \quad \varepsilon = \frac{R_C}{r_T},$$

де η — коефіцієнт в'язкості для промивної рідини; h — довжина ділянки колони; R_C — радіус свердловини; r_T — зовнішній радіус перерізу бурильної труби.

Важливим моментом в процесі побудови комп'ютерної моделі бурильної колони є відтворення взаємодії долота із забоем свердловини. При обертанні шарошечного долота відбувається складний процес перекошування зубців вінця шарошки по забою та їх вдавлю-

вання в породу, що викликає її руйнування [3]. При перекочуванні зубця конічної шарошки навколо миттєвого центру обертання корпус долота зміщується у вертикальному напрямі на величину

$$h = r_e \left(\cos \left(\frac{\pi}{z} - \omega_{ш} t \right) - \cos \frac{\pi}{z} \right) \sin \beta,$$

де $\omega_{ш}$ — кутова швидкість обертання шарошки; r_e — радіус периферійного вінця шарошки; z — число зубців шарошки; β — кут між віссю долота і віссю шарошки.

При повороті шарошки на кут $\varphi = \omega_{ш} t$ виникає момент сили, прикладений до осі шарошки

$$M_{ш} = r_e P \operatorname{tg} \left(\varphi_{ш} - \frac{\pi}{z} \right),$$

де P — сила, що діє на долото з боку бурильної колони. В положенні $\varphi = 0$ момент сили $M_{ш}$ змінює знак, тобто на проміжку $[-\varphi_{\max}, 0]$ момент сили протидіє оберտальному руху долота, а на проміжку $[0, \varphi_{\max}]$ — прискорює його.

Особливістю процесу перекочування шарошки є те, що час t і кут $\varphi = \omega_{ш} t$ знаходяться в проміжках відповідно $0 \leq t \leq T_1$ і $0 \leq \varphi_{ш} t \leq 2\pi/z$, де T_1 — час перекочування шарошки із зубця на зубець. Параметри h , T_1 визначаються виходячи із допущень, що всі шарошки долота синхронно перекочуються по забою, тобто одночасно контактують з ним то одним, то двома зубцями. В момент перескоку з одного опорного зубця шарошки на другий швидкість майже миттєво змінюється від максимального від'ємного значення до максимального додатного значення. В цей момент осьове прискорення теоретично прямує до нескінченості, а практично, враховуючи деформації елементів, набуває дуже великого значення.

Отримана модель у вигляді системи диференціальних рівнянь дозволяє провести декомпозицію вихідної моделі за змінними x та φ на n ланок. Якщо проводити декомпозицію далі на рівні отриманих ланок, то доцільно виділити в її структурі величини, які мають фізичний зміст, що дасть можливість реалізувати динамічні нелінійні залежності через статичні (наприклад, використання гістерезисної нелінійної залежності дозволяє відтворити в структурній моделі ефект втрати частини енергії деформації внаслідок внутрішнього тертя).

Після еквівалентних перетворень для реалізації i -х диференціальних рівнянь систем (23) та (24) отримаємо структурну ланку у вигляді підсистеми simulink-моделі, приведенної на рис. 2.

Отримана підсистема складає основу для синтезу структурної комп'ютерної моделі, що реалізує системи рівнянь (23)—(24). З'єднання підсистем здійснюється у відповідності до зв'язків між параметрами в системах диференціальних рівнянь.

Синтезована таким чином структурна модель бурильної колони має ряд важливих властивостей. По-перше, дискретизація колони на ланки із зосередженими масами дає можливість для кожної ланки проводити уточнення моделі шляхом врахування певних особливостей на ділянках колони, в тому числі і нелінійних залежностей (наприклад, зміну температури з ростом глибини, а отже й інших параметрів моделі, які залежать від температури). По-друге, за рахунок організації прямих та зворотних зв'язків між ланками, модель є оборотною, що дає змогу здійснювати вхідні впливи та отримувати результати на рівні будь-якої структурної ланки моделі.

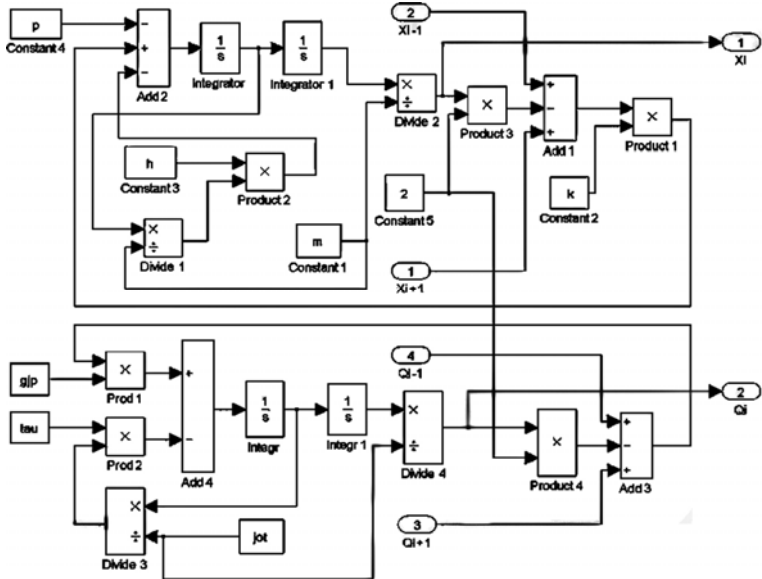


Рис. 2. Структурна реалізація ланки для моделювання ділянки колони із зосередженою масою при поступальному та обертовальному русі

Використаємо отримані структурні елементи для побудови моделі бурильної колони із урахуванням її поздовжнього та обертового руху та взаємодії долота із забоем. Керуючими діями будемо вважати силу, прикладену зі сторони лебідки через талеву систему та момент сили зі сторони роторного столу або забійного двигуна. При цьому будемо враховувати: неоднорідність бурової колони внаслідок використання різнотипних бурильних труб; деформацію бурової вишки при

навантаженні та її інертність; сили опору, викликані взаємодією промивної рідини зі стінками колони; виштовхувальну силу та інерцію стовпа промивної рідини; сили опору при взаємодії долота з породою.

Колону бурильних труб доцільно подати у вигляді багатомасової системи з числом мас, що відповідає кількості бурильних свічок в колоні. По мірі нарощення колони буде збільшуватись кількість модулів моделі. Структурна *simulink*-модель складається із однотипних ланок, починаючи з другої, які виконані у вигляді підсистеми, приведеної на рис. 2. В модель також входять ланки для відтворення динаміки бурової вишки, забійного двигуна, інерції промивної рідини в свердловині, взаємодії долота з породою.

За допомогою отриманої моделі було проведено ряд обчислювальних експериментів. На рис. 3 відображено результати моделювання взаємодії шарошечного долота із дном свердловини.

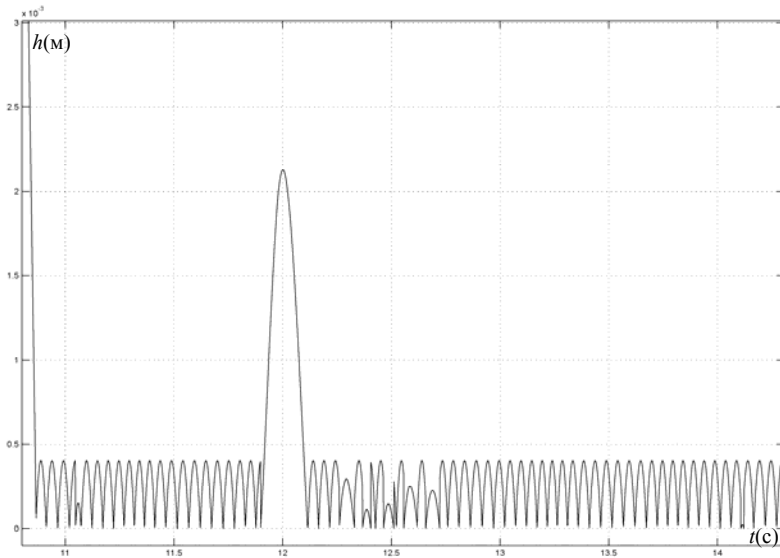


Рис. 3. Графік коливань корпусу долота

Колона в початковий момент часу знаходилась у підвішеному стані в промивній рідині на висоті 0,4 м від дна свердловини. Для спуску колони було зменшено зусилля на крюку талевої системи на 750 кгс. В момент часу 7,5 с відбувся контакт шарошок долота із дном свердловини. На графіку спостерігається складний характер коливань долота, який викликаний, в першу чергу, змінами динамічного зусилля з боку колони на долото, а також силами, що виникають під час пере-

кочування шарошок по забою. Також було отримано графік зміни навантаження на долото (рис. 4) при його контакті з дном свердловини.

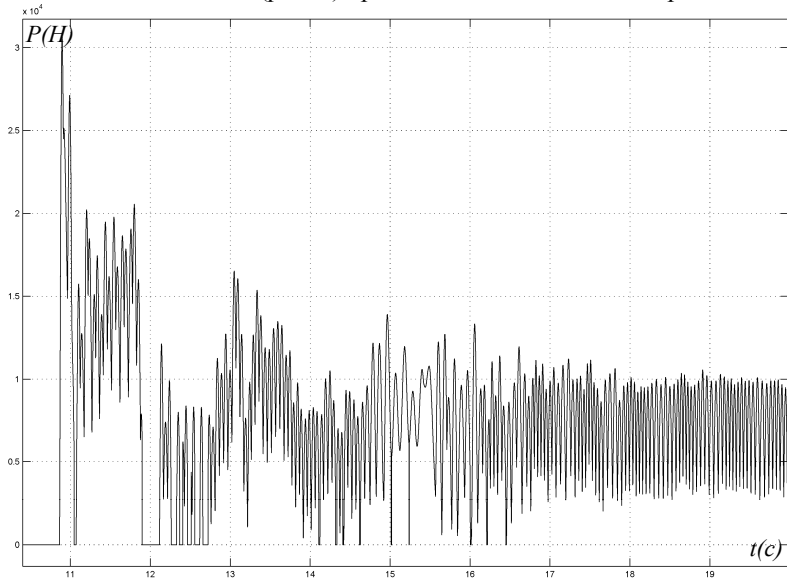


Рис. 4. Графік зміни навантаження на долото

Висновки. Результати моделювання свідчать, що приведена структурна модель може використовуватись як на стадії проектування обладнання бурової установки, так і на стадії компонування бурильної колони. Крім того, модель може використовуватись в системі керування при проходці свердловини для підтримки оптимальних режимів буріння та для оптимізації спуско-підйомних робіт.

Список використаних джерел:

1. Березин И. С. Методы вычислений Т.2. / И. С. Березин, Н. П. Жидков. — М. : Физматгиз, 1960. — 620 с.
2. Харченко Е. В. Динамические процессы буровых установок / Е. В. Харченко. — Львов : Свит, 1991. — 176 с. — Библиогр. : с. 171—174.
3. Балицкий П. В. Взаимодействие бурильной колонны с забоем скважины. / П. В. Балицкий. — М. : Недра, 1975. — 293 с. — Библиогр. : с. 281—289.

The way of construction of mathematical models of the distributed links of electromechanical systems on an instance of a drilling string of the drilling rig is observed. The estimation of a lapse of approximation is spent.

Key words: *Mathematical model, approximation, distributed object.*

Отримано 23.05.10