и остается равным нулю. Таким образом, при $n > 0$ зона предразрушения в конце трещины расположена в области, прилегающей к границе раздела сред.

1. *Каминский А. А., Гаврилов Д. А.* Длительное разрушение полимерных и композитных материалов с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1992. – 248 с.
2. *Кортен Х. Т.* Механика разрушения композитов. Разрушение. Т. 7, ч. 1. – Москва: Мир, 1976. – С. 367–471.
3. *Kaminsky A. A., Dudik M. V., Kipnis L. A.* The calculation of side prefracture zone at the end of the crack on the interface of different media // Intern. Appl. Mech. – 2006. – **42**, No 2. – P. 14–23.
4. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости. – Москва: Наука, 1981. – 688 с.

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев
Уманский государственный педагогический университет

Поступило в редакцию 12.05.2006

УДК 629.7.054

© **2007**

В. М. Мельник

Хвильові процеси в підвісі гіроскопа з довільним окресленням лінії меридіана поплавця

(Представлено академіком НАН України В. М. Кошляковим)

The theory of the elastic interaction of the suspension of a gyroscope with an external wave perturbation under an arbitrary geometry of the meridian line form is constructed. The ways to compensate this influence with passive methods are presented.

Реалізація ідеї використання рідинностатичного підвісу в інерціальних навігаційних системах і пілотажному обладнанні [1, 2] дозволила значно зменшити похибки гіроскопічних приладів, практично усунувши сухе тертя на вихідній осі. Між іншим, вирішені інші питання поліпшення динамічних властивостей — ударо- та вібростійкість, бажаний коефіцієнт демпфірування в інтегруючому гіроскопі тощо. Нарешті стало можливим використання двостепеневих гіроскопів як чутливих елементів високоточних гіростабілізованих платформ.

Стримкий розвиток ракетно-космічної техніки та досягнення практичної космонавтики змусили, проте, істотно переглянути наявні відомості щодо відповідності паспортних характеристик поплавкових гіроскопів діючим реаліям за натурних умов [3, 4]. Мова йдеться про вплив на прилади інерціальної навігації акустичного випромінювання з боку реактивних двигунів.

Відомо, що в акустичні коливання трансформується близько 10^{-4} потужності рушійних установок. Наприклад, для одного літака стратегічної бомбардувальної авіації, а також літака тактичної і палубної авіації вона становить $1 \dots 4$ та $0{,}8 \dots 1{,}6$ кВт відповідно. Рівень акустичного тиску біля реактивного струменя РН може сягати 180 дБ і вище. Природно,

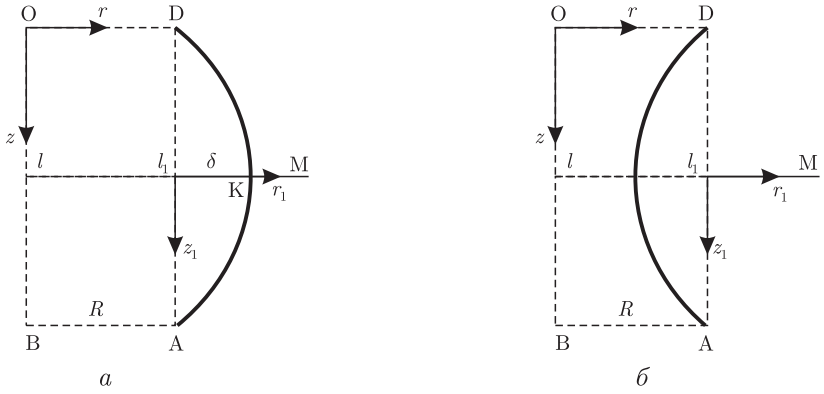

Рис. 1. Поплавець спеціальної форми: *а* — опукла оболонка обертання; *б* — угнута

що проникаючи всередину фюзеляжу, звукові збурення такого рівня здатні розгойдати механічні системи приладів. Особливо небезпечною проявляє себе антисиметрична складова надлишкового тиску.

Таким чином, рідинностатичний підвіс за цих умов постає чудовим ретранслятором акустичного випромінювання. Суттєво важливим тут є той факт, що ці поля мають просторовий характер на відміну від силового збурення, яке надходить усередину приладу крізь опори. Генеруючи в поплавковому підвісі акустичну вібрацію, звукові хвилі призводять до пружних деформацій поплавця гіроскопа, які в своїй сукупності сприймаються приладом як "хибна" кутова швидкість основи [5].

Конкретизуючи наукову задачу, оберемо за об'єкт досліджень серійно виготовлюваний промисловістю двостепеневий поплавковий гіроскоп серії ДУСМ та ДУСУ2–6АС, що використовується на літальних апаратах тривалої дії. Прилад являє собою два коаксіальні циліндри, розділені важкою рідиною. У внутрішньому цилінрі знаходиться, власне, гіроагрегат.

Проникаюче акустичне випромінювання генерує на поверхні поплавця пружні деформації. Причому найбільш підвладні цьому впливу радіальні складові, що пояснюється меншою жорсткістю оболонки в площині шпангоута порівняно з двома іншими — повздовжньою та коловою. Проаналізуємо можливість зменшення цього впливу шляхом відмови від класичної геометрії колового циліндра на користь оболонки обертання з ненульовою Гауссовою кривизною бічної поверхні — опуклою або угнутою (рис. 1). Як часткове, з отриманих закономірностей пружного руху поверхні поплавця у трьох напрямках походить випадок колового циліндра. Для цього слід прийняти сталі Ламе $A_1 = 1$; $A_2 = R = \text{const}$. Особливістю такого підходу є можливість узагальнення теорії поплавкого гіроскопа з подальшим вирішенням питань оптимізації конструкції з метою зменшення похибок вимірювань пасивними методами ізоляції імпедансної структури підвісу.

На рис. 1 в обох випадках прийнято, що $OD = AB = R$, а крива $f(z)$, яка утворює оболонку обертання, симетрична відносно лінії CM, що перетинає вісь обертання всередині:

$$OB = l; \qquad OC = CB = \frac{l}{2}.$$

Відзначимо також, що $f(0) = f(l) = R = \text{const}$.

Лінію меридіана задамо виразом

$$r_1 = \pm f_1(z_1),$$

причому клас функцій $f_1(z_1)$, для яких виконуються умови

$$f_1(-z_1) = f_1(z_1); \qquad f_1\left(\pm\frac{l}{2}\right) = 0,$$

визначимо так:

функції $[+f_1(z_1)]$ — тільки опуклі, а функції $[-f_1(z_1)]$ — угнуті;

точка з координатою $z_1 = 0$ є точкою екстремуму для функції $\pm f_1(z_1)$;

функція $f_1(z_1)$ вважається убуваючою, коли $\forall z_1 \in (0; l/2)$ (рис. 1, *а*), та зростаючою — за умови $\forall z_1 \in (0; l/2)$ (рис. 1, *б*).

Позначимо величину підйому параболи C_1K у точці $z_1 = 0$ за δ (рис. 1, *а*). Тоді

$$f_1(z_1) = \delta - \frac{4\delta}{l^2} z_1^2 = \delta\left(1 - 4\frac{z_l^2}{l^2}\right).$$

Рівняння лінії меридіана оболонки в опорній системі координат $0zr$ матиме вигляд

$$r = f(z) = R + \delta\left[l - \frac{4}{l^2}\left(z - \frac{l}{2}\right)^2\right].$$

Припустимо, що оболонка поплавця відноситься до криволінійних ортогональних координат α_1 і α_2. Їх будемо вважати за лінії кривизни *з* радіусами R_1 та R_2.

Якщо A_1 і A_2 — параметри Ламе серединної поверхні π оболонки, то, додавши сили інерції, можна скористатися рівняннями рівноваги, які в розгорнутому вигляді запишемо таким чином [6]:

$$\frac{\partial A_2 T_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1}\frac{\partial A_1^2 S}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_2 + \frac{1}{R_1}\left(\frac{\partial A_2 M_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1}\frac{\partial A_1^2 H}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_2\right) +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{A_1}{R_1} H\right) + \frac{1}{R_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} H = -A_1 A_2 q_1 + \rho A_1 A_2 h \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}; \tag{1}$$

$$\frac{\partial A_1 T_2}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2^2 S}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} T_1 + \frac{1}{R_2}\left(\frac{\partial A_1 M_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2^2 H}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_1\right) +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{A_2}{R_2} H\right) + \frac{1}{R_1}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} H = -A_1 A_2 q_2 + \rho A_1 A_2 h \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2}; \tag{2}$$

$$\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} - \frac{1}{A_1 A_2}\left\{\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial A_2 M_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1}\frac{\partial A_1^2 H}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_2\right) +\right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial A_1 M_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2^2 H}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_1\right)\right\} = q_n + \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \tag{3}$$

де

$$q_1 = p_1 + \frac{m_1}{R_1} \approx p_1; \qquad q_2 = p_2 + \frac{m_2}{R_2} \approx p_2;$$

$$q_n = p_n + \frac{1}{A_1 A_2}\left(\frac{\partial A_2 m_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 m_2}{\partial \alpha_2}\right) \approx p_n;$$

T_1, T_2 — нормальні, а S — дотичні складові зусиль; M_1, M_2 — згинні моменти; H — обертаючий момент; ρ — щільність матеріалу; h — товщина; U_i — пружні переміщення точок поверхні π в напрямку відповідної координати α_1.

Після математичних перетворень рівняння набувають форму, зручну для інтегрування:

$$\frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} - a_1(2z-1)\frac{\partial U_z}{\partial z} - a_2 U_z + a_3\frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial z\partial\varphi} - a_4\frac{\partial W}{\partial z} = -[1+\alpha_1(2z-1)^2]q_1^* +$$
$$+ [1+\alpha_1(2z-1)^2]\alpha_1^{*2}\frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2}; \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial\varphi^2} + b_1[1-\beta_1(2z-1)^2]\frac{\partial^2 U_z}{\partial z\partial\varphi} - b_2[1-2\beta_1(2z-1)^2]\frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial z^2} - b_3(2z-1)\frac{\partial U_\varphi}{\partial z} -$$
$$- b_4(2z-1)\frac{\partial U_z}{\partial\varphi} + b_5 U_\varphi - b_6\frac{\partial W}{\partial\varphi} = -[1-\beta_3(2z-1)^2]q_2^* +$$
$$+ \beta^{*2}[1-\beta_3(2z-1)^2]\frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial t^2}; \tag{5}$$

$$[-1+\beta_4(2z-1)^2]\frac{\partial^4 W}{\partial z^4} - c_1\frac{\partial^4 W}{\partial z^2\partial\varphi^2} - c_2\frac{\partial^4 W}{\partial\varphi^4} + c_3(2z-1)\frac{\partial^3 W}{\partial z^3} - c_4\frac{\partial^3 W}{\partial z\partial\varphi^2} +$$
$$+ c_5\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - c_6\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2} - c_7(2z-1)\frac{\partial W}{\partial z} - c_8\frac{\partial^3 U_\varphi}{\partial\varphi^3} - c_9\frac{\partial^3 U_\varphi}{\partial z^2\partial\varphi} - c_{10}\frac{\partial^3 U_z}{\partial z\partial\varphi^2} +$$
$$+ c_{11}(2z-1)\frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} + c_{12}(2z-1)\frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial z\partial\varphi} + c_{13}\frac{\partial U_z}{\partial z} + c_{14}\frac{\partial U_\varphi}{\partial\varphi} - c_{15}(2z-1)U_z =$$
$$= [1-\beta_5(2z-1)]q_3^* + \gamma^{*2}[1-\beta_5(2z-1)]\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}. \tag{6}$$

Оскільки поплавець являє собою замкнуту оболонку обертання, то в коловому напрямку (вздовж паралелі) слід очікувати періодичності силових та кінематичних полів і, отже, вони певним чином повинні залежати від періодичних функцій зразка $\cos k\varphi$, $\sin k\varphi$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Зовнішнє навантаження, хоча б формально, можна навести у вигляді рядів Фур'є за координатою φ:

$$q^* = q^*(z,\varphi,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[q_{ik}^{(1)}(z,t)\cos k\varphi + q_{ik}^{(2)}(z,t)\sin k\varphi\right], \qquad i = \overline{1,3}. \tag{7}$$

Аналогічно записуються пружні переміщення поверхні у трьох напрямках:

$$U_z = U_z(z,\varphi,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[U_{z,k}^{(1)}(z,t)\cos k\varphi + U_{z,k}^{(2)}(z,t)\sin k\varphi\right]; \tag{8}$$

$$U_\varphi = U_\varphi(z,\varphi,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[U_{\varphi,k}^{(1)}(z,t)\sin k\varphi + U_{\varphi,k}^{(2)}(z,t)\cos k\varphi\right]; \tag{9}$$

$$W = W(z,\varphi,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[W_k^{(1)}(z,t)\cos k\varphi + W_k^{(2)}(z,t)\sin k\varphi\right], \tag{10}$$

де U_z, U_φ, W — відповідно поздовжні, колові та радіальні пружні переміщення.

Найбільш цікавим, з точки зору розглядуваних задач, є випадок неосесиметричної деформації, тобто $k = 1$.

Приймемо

$$U_{z,1}^{(1)} = \omega_1(z)A_1^{(1)}(t)\varphi_1^{(1)}(z); \qquad U_{z,1}^{(2)} = \omega_1(z)A_1^{(2)}(t)\varphi_1^{(2)}(z); \tag{11}$$

$$U_{\varphi,1}^{(1)} = \omega_1(z)B_1^{(1)}(t)\psi_1^{(1)}(z); \qquad U_{\varphi,1}^{(2)} = \omega_1(z)B_1^{(2)}(t)\psi_1^{(2)}(z); \tag{12}$$

$$W_1^{(1)} = \omega_2(z)C_1^{(1)}(t)\gamma_1^{(1)}(z); \qquad W_1^{(2)} = \omega_2(z)C_1^{(2)}(t)\gamma_1^{(2)}(z). \tag{13}$$

де $\omega_1(z) = z^2(1-z)^2$; $\omega_2(z) = z^4(1-z)^4$ — функції Кравчука.

Тоді, інтегруючи рівняння (4)–(6) за допомогою методу Бубнова–Гальоркіна та зважаючи на співвідношення (11)–(13), отримуємо звичайні диференціальні рівняння для знаходження функцій A_i:

$$a_{z1}^{(1)}\ddot{A}_1^{(1)} + a_{z2}^{(1)}A_1^{(1)} + a_{z3}^{(1)}B_1^{(1)} + a_{z4}^{(1)}C_1^{(1)} = Q^{(1)}(t), \tag{14}$$

де

$$\begin{aligned}
a_{z1}^{(1)} &= -\alpha^{*2}\int_0^1 [1+\alpha_1(2z-1)^2]\omega_1^2(z)\varphi_1^{1(2)}\partial z;\\
a_{z2}^{(1)} &= \int_0^1 \left\{\frac{\partial^2}{\partial z^2}[\omega_1(z)\varphi_1^{(1)}(z)] - a_1(2z-1)\frac{\partial}{\partial z}[\omega_1(z)\varphi_1^{(1)}(z)] - a_2\omega_1(z)\varphi_1^{(1)}(z)\right\} \times\\
&\quad \times \omega_1(z)\varphi_1^{(1)}(z)\partial z;\\
a_{z3}^{(1)} &= a_3\int_0^1 \frac{\partial}{\partial z}[\omega_1(z)\psi_1^{(1)}(z)]\omega_1(z)\varphi_1^{(1)}(z)\partial z;\\
a_{z4}^{(1)} &= -a_4\int_0^1 \frac{\partial}{\partial z}[\omega_2(z)\gamma_1^{(1)}(z)]\omega_1(z)\varphi_1^{(1)}(z)\partial z;\\
Q^{(1)}(t) &= -\int_0^1 [1+\alpha_1(2z-1)^2]q_{1,1}^{(1)}(z,t)\omega_1(z)\varphi_1^{(1)}(z)\partial z.
\end{aligned} \tag{15}$$

Аналогічно для величини $A_1^{(2)}(t)$:

$$a_{z1}^{(2)}\ddot{A}_1^{(2)} + a_{z2}^{(2)}A_1^{(2)} + a_{z3}^{(2)}B_1^{(2)} + a_{z4}^{(2)}C_1^{(2)} = Q^{(2)}(t), \tag{16}$$

де

$$a_{z1}^{(2)} = -\alpha^{*2}\int_0^1 [1+\alpha_1(2z-1)^2]\omega_1^2(z)\varphi_1^{(2)2}\partial z;$$

$$a_{z2}^{(2)} = \int\limits_0^1 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2}[\omega_1(z)\varphi_1^{(2)}(z)] - a_1(2z-1)\frac{\partial}{\partial z}[\omega_1(z)\varphi_1^{(2)}(z)] - a_2\omega_1(z)\varphi_1^{(2)}(z) \right\} \omega_1(z)\varphi_1^{(2)}(z)\partial z;$$

$$a_{z3}^{(2)} = -a_3 \int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial z}[\omega_1(z)\varphi_1^{(2)}(z)]\omega_1(z)\varphi_1^{(2)}(z)\partial z;$$

$$a_{z4}^{(2)} = -a_4 \int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial z}[\omega_2(z)\gamma_1^{(1)}(z)]\omega_1(z)\varphi_1^{(2)}(z)\partial z.$$

Повторюючи процедуру, одержуємо з рівнянь (5), (6) співвідношення для визначення функцій B_i, C_i:

$$b_{\varphi 1}^{(1)}\ddot{B}_1^{(1)} - b_{\varphi 2}^{(1)}B_1^{(1)} + b_{\varphi 3}^{(1)}A_1^{(1)} + b_{\varphi 4}^{(1)}C_1^{(1)} = Q_{\varphi}^{(1)}(t); \tag{17}$$

$$b_{\varphi 1}^{(2)}\ddot{B}_1^{(2)} - b_{\varphi 2}^{(2)}B_1^{(2)} + b_{\varphi 3}^{(2)}A_1^{(2)} + b_{\varphi 4}^{(2)}C_1^{(2)} = Q_{\varphi}^{(2)}(t); \tag{18}$$

$$c_{w1}^{(1)}\ddot{C}_1^{(1)} - c_{w2}^{(1)}C_1^{(1)} + c_{w3}^{(1)}B_1^{(1)} + c_{w4}^{(1)}A_1^{(1)} = Q_{w}^{(1)}(t); \tag{19}$$

$$c_{w1}^{(2)}\ddot{C}_1^{(2)} - c_{w2}^{(2)}C_1^{(2)} + c_{w3}^{(2)}B_1^{(2)} + c_{w4}^{(2)}A_1^{(2)} = Q_{w}^{(2)}(t). \tag{20}$$

Пари рівнянь (14), (16), (17)–(18), (19), (20) записані у вигляді, який дозволяє з перших двох доданків визначити парціальні частоти. Очевидно, що коливальні процеси на поверхні поплавця впливають один на одний за всіма напрямками. Ступінь їх впливу, а, отже, можливість нехтування деякими, можна оцінити для конкретних масогабаритних модифікацій ДУСМ або ДУСУ. Таким чином, закладені наукові засади для глибокого аналізу динаміки поплавкового гіроскопа за натурних умов, з одного боку, та виявлена можливість для аргументованого порівняльного аналізу з класичною циліндричною модифікацією поплавця — з іншого. З'явилася можливість для розв'язання задач оптимізації масогабаритних характеристик приладу. Побудовані теоретичні основи розв'язання задач підвищення точності і надійності поплавкових приладів (і систем інерціальної навігації в цілому) на підгрунті пасивних методів звукоізоляції та їх поєднання з іншими методами — активними, автокомпенсаційними тощо.

1. *Draper C. S., et al.* US. Pat No 2752790. – No 2752792. – No 2752793. – (July 1956. – за заявкою від 22 березня 1951 р.); No 2853287. – (Sept. 1957).
2. *Ишлинский А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. – Москва: Наука, 1976. – 671 с.
3. *Mel'nick V. N., Karachun V. V.* Determining gyroscopic integrator errors to diffraction of sound waves // Internat. Appl. Mech. – 2004. – **40**, No 3. – P. 328–336.
4. *Мельник В. М., Карачун В. В.* Інжекція акустичної енергії РН і її вплив на похибки гіроскопа // Вісн. ЖДТУ – 2004. – **1**, № 4(31). – С. 135–138.
5. *Карачун В. В., Мельник В. Н., Саверченко В. Г.* Некоторые аспекты влияния проникающего акустического излучения на приборы и системы инерциальной навигации // Косм. наука і технологія. – 2004. – **10**, № 4. – С. 50–59.
6. *Черных К. Ф.* Линейная теория оболочек.: В 2-х ч. – Ленинград: Изд-во Ленинград. ун-та, 1962.

НТУ України "Київський політехнічний інститут" *Надійшло до редакції 27.04.2006*