

УДК 621.318.001.2

© 2009

Член-корреспондент НАН України А. Е. Божко

О сингуларисной формуле тягового усилия двухтактного электромагнитного вибровозбудителя

На основі Фур'є-сингуларисного розкладення несинусоїдальних функцій виводиться формула тягового зусилля у двотактному електромагнітному вібровозбуджувачі.

Известно [1], что в двухтактных электромагнитных вибровозбудителях (ЭМВ) на каждую электрическую обмотку, расположенную на соответствующем магнитопроводе, подается однополупериодное полусинусоидальное напряжение. Причем полупериоды этих напряжений на обмотках разные, т. е. напряжения противопололярные. Вид таких напряжений изображен на рис. 1, где U_1, U_2 — электрические напряжения; t — время.

Напряжения U_1, U_2 создают в обмотках O_1 и O_2 соответственно электрические токи i_1 и i_2 , которые, по закону полного тока [2], наводят в своих магнитопроводах (M_1, M_2) и общем якоре (Я) магнитные потоки Φ_1 и Φ_2 соответственно. Эти магнитные потоки в свою очередь создают соответствующие тяговые усилия F_1, F_2 в якоре, которые в соответствующий полупериод притягивают якорь к полюсам M_1 или M_2 и таким образом формируют колебания якоря. Следовательно, тяговые усилия F_1, F_2 являются основополагающими для возбуждения колебаний якоря в ДЭМВ.

Для определения F_1, F_2 необходимо последовательно рассмотреть процессы, происходящие в ДЭМВ. Электромагнитомеханическая схема ДЭМВ изображена на рис. 2, где D_1, D_2 — диоды; Пр — пружины; δ — воздушный зазор; остальные обозначения были представлены ранее.

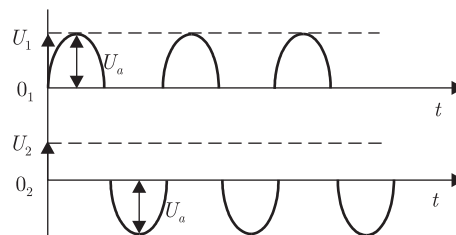


Рис. 1

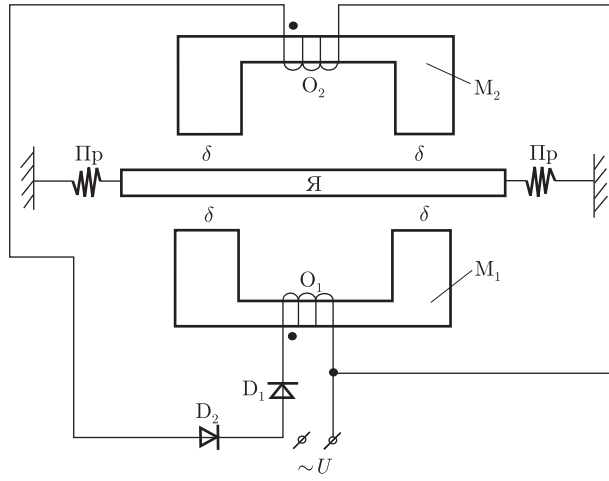


Рис. 2

Как видно из рис. 2, ДЭМВ состоит из электрической, магнитной и механической частей. Известно [1], что тяговое усилие в ЭМВ определяется по формуле

$$F = \frac{dW_e}{d\delta}, \quad (1)$$

где $W_e = Li^2/2$ — электромагнитная энергия; L — индуктивность электрической обмотки; I — электрический ток в обмотке.

Ток i определяется в результате решения дифференциального уравнения

$$U = ri + L \frac{di}{dt}, \quad (2)$$

где r — активное сопротивление обмотки.

Напряжения U_1 , U_2 , графики которых изображены на рис. 1, соответствуют напряжению U из (2) и являются несинусоидальными величинами. Аналитически такое напряжение представляется в виде следующего ряда Фурье [2]:

$$U(t) = \frac{2U_a}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \cos \omega t + \frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2\omega t - \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4\omega t + \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6\omega t - \dots \right), \quad (3)$$

где U_a — амплитуда $U(t) = U_a \sin \omega t$; ω — круговая частота.

В выражении (3) имеется постоянная составляющая U_a/π , которая в виде входного напряжения в электроцепи (2) является скачкообразной, математически интерпретируемой в виде скачкообразной функции $(U_a/\pi)1(t)$, где $1(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0 \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}$. Согласно работе [3],

$$\frac{U_a}{\pi} 1(t) = \frac{U_a}{\pi} \left(1 - e^{-\alpha t} + e^{-\alpha t} \sum_{k=1}^n U_{ak} \cos \omega_k t \right). \quad (4)$$

Здесь α — коэффициент затухания; $U_{a1} = 1/\pi$, $k = \omega_k/\omega_1$, $U_{ak} = U_{a1}/k$, $n \approx 12$, $\sum_{k=1}^n U_{ak} = 1$, т. е. $(U_a/\pi)1(t)$ разлагается в сингулярный ряд.

Тогда с учетом (4) напряжение (3) приобретает вид

$$U(t) = \frac{U_a}{\pi} \left(1 - e^{-\alpha t} + e^{-\alpha t} \sum_{k=1}^n U_{ak} \cos \omega_k t \right) + \frac{2U_a}{\pi} \left(\frac{\pi}{4} \cos \omega t + \frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2\omega t - \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4\omega t + \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6\omega t - \dots \right) \quad (5)$$

и уравнение (2) с учетом (5) записывается в следующей форме:

$$U(t) = \frac{U_a}{\pi} \left(1 - e^{-\alpha t} + e^{-\alpha t} \sum_{k=1}^n U_{ak} \cos \omega_k t \right) + \frac{2U_a}{\pi} \left(\frac{\pi}{4} \cos \omega t + \frac{1}{3} \cos 2\omega t \right) = ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}. \quad (6)$$

В (6) не включены слагаемые

$$\frac{2U_a}{\pi} \left(-\frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4\omega t + \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6\omega t - \dots \right)$$

из-за их малых значений относительно первых двух слагаемых. Ток $i(t)$ определяем методом операционного исчисления Карсона [4]. В операционном виде (6) имеет вид

$$U(p) = \frac{U_a}{\pi} \left[\frac{\alpha}{p + \alpha} + \sum_{k=1}^n \frac{U_{ak} p(p + \alpha)}{(p + \alpha)^2 + \omega_k^2} \right] + \frac{2U_a}{\pi} \left(\frac{\pi}{4} \frac{p^2}{p^2 + \omega^2} + \frac{1}{1 \cdot 3} \frac{p^2}{p^2 + 4\omega^2} \right) = + I(p)L(p + \varepsilon), \quad (7)$$

где $p = d/dt$ — оператор; $U(p)$ — изображение Карсона оригинала $U(t)$; $I(p)$ — изображение Карсона оригинала $i(t)$; $\varepsilon = r/L$ — коэффициент затухания в rL входной цепи одного ЭМВ.

Используя таблицы 13, 35 и 36 из работы [4], с учетом (7) получаем выражение переходного процесса тока $i(t)$

$$i(t) = i_0(t) + i_1(t) + i_2(t) + i_3(t), \quad (8)$$

где

$$i_0 = \frac{U_a}{\pi L \varepsilon} = \frac{U_a}{\pi r};$$

$$i_1(t) = \frac{U_a}{\pi L} e^{-\alpha t} \left\{ \frac{1}{\alpha - \varepsilon} + \sum_{k=1}^n \frac{U_{ak}}{(\alpha - \varepsilon)^2 + \omega_k^2} [\omega_k \sin \omega_k t - (\alpha - \varepsilon) \cos \omega_k t] \right\};$$

$$i_2(t) = \frac{U_a}{\pi L} e^{-\varepsilon t} \left\{ -\frac{\alpha}{\varepsilon(\alpha - \varepsilon)} + \left[(\alpha - \varepsilon) \sum_{k=1}^n \frac{U_{ak}}{(\alpha - \varepsilon)^2 + \omega_k^2} \right] - 2\varepsilon \left[\frac{\pi}{4(\varepsilon^2 + \omega^2)} + \frac{1}{3(\varepsilon^2 + 4\omega^2)} \right] \right\};$$

$$i_3(t) = \frac{2U_a}{\pi L} \left[\frac{\pi}{4(\varepsilon^2 + \omega^2)} (\varepsilon \cos \omega t + \omega \sin \omega t) + \frac{1}{3(\varepsilon^2 + 4\omega^2)} (\varepsilon \cos 2\omega t + 2\omega \sin 2\omega t) \right].$$

Заметим, что (8) относится к току $i(t)$, идущему по входной цепи обмотки одного магнитопровода M_1 , например, в положительный полупериод входного напряжения $U(t) = U_a \sin \omega t$. Для тока входной цепи обмотки другого магнитопровода M_2 в отрицательный полупериод $U(t)$ в аналитическом выражении, подобном (8), необходимо в аргументах слагаемых изменить t на $t - \pi/\omega$. Тогда в этом выражении будут $e^{-\alpha}(t - \pi/\omega)$, $\cos(\omega_k t - \pi)$, $\cos(\omega t - \pi)$, $\cos(2\omega t - \pi)$, $\sin(\omega_k t - \pi)$, $\sin(\omega t - \pi)$, $\sin(2\omega t - \pi)$, т. е. в обмотке магнитопровода M_1 ток будет записан в виде $i(t)$, а в обмотке магнитопровода M_2 — $i(t - \pi/\omega)$. В каждый полупериод, согласно (1), токи $i(t)$, $i(t - \pi/\omega)$ создают соответствующие тяговые усилия [5]

$$F(t) = \mu_0 S \left(\frac{w}{2\delta} \right)^2 i^2(t), \quad F\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right) = \mu_0 S \left(\frac{w}{2\delta} \right)^2 i^2\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right), \quad (9)$$

где μ_0 — магнитная проницаемость воздуха; S — площадь поперечного сечения полюса магнитопровода M_1 или M_2 у воздушного зазора δ ; w — число витков электрических обмоток O_1 , O_2 .

Будем считать, что U_a , L , ε для цепей O_1 и O_2 одинаковые. Тогда с учетом того, что $|F(t) = F(t - \pi/\omega)|$ и $F(t)$ противоположно по знаку $F(t - \pi/\omega)$, постоянные составляющие в $F(t)$ и $F(t - \pi/\omega)$ компенсируют друг друга, а колебания якоря обуславливают $i_1(t) + i_2(t) + i_3(t)$ и $i_1(t - \pi/\omega) + i_2(t - \pi/\omega) + i_3(t - \pi/\omega)$.

Включая (8) в (9), получаем выражение тяговых усилий в виде

$$F(t) = a \left[\sum_{l=0}^3 i_l(t) \right]^2, \quad F\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right) = a \left[\sum_{l=0}^3 i_l\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right) \right]^2, \quad (10)$$

где $a = \mu_0 S (w/(2\delta))^2$.

Представим в развернутом виде выражения из (10) в следующей форме:

$$F(t) = a \left\langle \left[\sum_{l=0}^3 i_l^2(t) \right] + 2 \left\{ \left[i_0 \sum_{l=1}^3 i_l(t) \right] + \left[i_1(t) \sum_{l=2}^3 i_l(t) \right] + i_2(t) i_3(t) \right\} \right\rangle, \quad (11)$$

$$F\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right) = a \left\langle \left[\sum_{l=0}^3 i_l^2\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right) \right] + 2 \left\{ \left[i_0 \sum_{l=1}^3 i_l\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right) \right] + \left[i_1\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right) \sum_{l=2}^3 i_l\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right) \right] + i_2\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right) i_3\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right) \right\} \right\rangle. \quad (12)$$

Заметим, что составляющие токов в $i_1(t)$, $i_1(t - \pi/\omega)$ в переходном процессе убывают очень быстро, так как $\alpha \rightarrow \infty$. Составляющие токов в $i_2(t)$, $i_2(t - \pi/\omega)$ убывают в зависимости от $\varepsilon = r/L$. Обычно в ЭМВ индуктивное сопротивление $\omega L \gg r$. А это значит, что $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда $i_2(t)$, $i_2(t - \pi/\omega)$ вместе с $i_3(t)$, $i_3(t - \pi/\omega)$ обуславливают вынужденные процессы в $i(t)$, $i(t - \pi/\omega)$. Для быстрого затухания $i_2(t)$, $i_2(t - \pi/\omega)$ необходимо, чтобы в ДЭМВ $U(t) = U_a \sin \omega t$ было направлено от источника тока, когда $r + r_u \gg \omega L$, где r_u — активное сопротивление источника тока. Но в этом случае теряется входная энергия, превращаясь в тепло.

Таким образом, с учетом (8), (11) и (12) сингулярная формула тягового усилия двухтактного электромагнитного вибровозбудителя записывается в виде $F(t, t - \pi/\omega) = (11) + (12)$.

Если учесть тригонометрические преобразования [6]

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)], \quad \cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) + \cos(x + y)],$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x - y) + \sin(x + y)],$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

и др., то видно, что в формулу $F_{\Sigma}(t, t - \pi/\omega)$ входят гармонические составляющие с множеством частот, кроме ω .

Такой вывод является дополнением к прежним суждениям [1] о том, что ДЭМВ воспроизводит только гармонику с частотой задающего напряжения $U(t)$.

1. *Вибрации* в технике: В 6-ти т. / Под ред. Э. Э. Лавендела. – Москва: Машиностроение, 1981. – Т. 4. – 510 с.
2. *Бессонов Л. А.* Теоретические основы электротехники. – Москва: Высш. шк., 1978. – 528 с.
3. *Божко А. Е.* О сингулярном разложении скачкообразной функции // Доп. НАН Украины. – 2008. – № 2. – С. 42–47.
4. *Гинзбург С. Г.* Методы решения задач по переходным процессам в электрических цепях. – Москва: Сов. радио, 1959. – 404 с.
5. *Божко А. Е., Личкатый Е. А., Мякохлеб К. Б.* О двухтактном электромагнитном вибровозбудителе // Доп. НАН Украины. – 2006. – № 5. – С. 90–93.
6. *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.* Справочник по математике. – Москва: ГИТТЛ, 1956. – 608 с.

*Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков*

Поступило в редакцию 20.05.2008

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. E. Bozhko**

On the singularisnal formula for the tractive effort of a two-stroke electromagnetic vibroexciter

The formula for the tractive effort of a two-stroke electromagnetic vibroexciter is obtained. This formula is based on a Fourier-singularisnal expansion of nonsinusoidal functions.