

УДК 621.372

**В. И. Гук, О. А. Наконечная***Восточноевропейский университет экономики  
и менеджмента, г. Черкассы***ОБ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ  
ПРОИЗВОДСТВЕННО-СБЫТОВОЙ СИСТЕМЫ**

В работе описана динамическая модель производственно-сбытовой системы промышленного предприятия, когда каждое звено динамической производственной системы описывается с помощью дифференциальных и алгебраических уравнений на основании подхода, принятого в теории автоматического управления.

**Ключевые слова:** динамическое моделирование производственного предприятия, производственно-сбытовая модель, системы дифференциальных уравнений, уравнение накопителя, уравнение потоков, уравнение запаздывания, численно-аналитическое решение, автоматизация, системы управления.

**Введение.** Одной из важных задач системной динамики является построение динамических моделей и исследование с их помощью процессов в производственных, экономических, биологических, социальных и других сложных системах [1-3].

Наличие адекватной (в пределах точности исходных данных) модели динамики производственного процесса позволяет эффективно решать задачи анализа и прогнозирования результатов деятельности предприятия. Кроме того, динамическая модель позволяет представить деятельность предприятия как объект управления, пригодный для построения управляющей системы с применением современных методов и средств управления.

**Формирование динамической модели предприятия.** Методика построения динамической модели состоит из следующих этапов:

- 1) составления словесного описания моделируемой системы и его анализа;
- 2) построения диаграмм причинно-следственных связей в системе;
- 3) построения диаграмм потоков в системе, т.е. ее структурной схемы;
- 4) составления математического описания системы, т.е. получение уравнений динамической модели;
- 5) реализации динамической модели на ЭВМ и ее исследование.

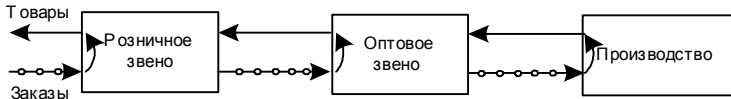
При разработке динамической модели весьма желательно сотрудничество специалистов соответствующей области науки и техники и специалистов по управлению и моделированию. В этом слу-

чае с помощью модели наиболее плодотворно решаются задачи создания автоматизированных систем управления, оптимизации процессов и их прогнозирования.

Любая сложная система состоит из ряда контуров с отрицательной и положительной обратной связью. Контур с отрицательной обратной связью встречается, например, в традиционных системах управления и регулирования, в системах регулирования человеческого организма. Контур с положительной обратной связью встречается, например, в неустойчивых объектах, в процессах инфляции и роста цен, роста населения, гонки вооружений.

При динамическом моделировании предприятия в общем случае необходимо учитывать шесть типов потоков: материалы, оборудование, заказы, денежные средства, рабочую силу, соединенные воедино с помощью потоков информации.

В качестве примера предприятия, являющегося информационной системой с обратными связями, рассмотрим производственно-сбытовую систему, укрупненная структура которой изображена на рис. 1. На предприятии изготавливается продукция, которая поступает на заводской склад. Со склада товары отгружаются сначала в оптовое звено, а затем в розничную сеть, т.е. в магазины, откуда поступают потребителям (сплошные линии изображают отгрузку товаров, а прерывистые линии с кружочками – поток заказов на товары).



*Рис. 1. Структура производственно-сбытовой системы*

Предполагаем, что поставка товаров покупателям в среднем занимает неделю с момента получения заказа; запаздывание бухгалтерских операций и закупок – в среднем три недели; время отправки заказа по почте – половину недели; оформление заказа и отправка товаров со склада в магазин – неделю. Подобные же запаздывания имеются в оптовом звене и на заводском складе. Предполагается, что с момента принятия решения об изменении плана выпуска продукции на заводе до момента, когда производство достигнет нового уровня, уходит шесть недель. Входным воздействием в системе является изменение потока заказов потребителей.

Традиционный подход к моделированию задач рассматриваемого класса предусматривает, что уравнения процессов в каждом элементе системы записываются на специальном языке и представляют собой по существу разностные уравнения, которые решаются обычно простейшим приближенным численным методом (методом Эйлера). Разностные уравнения не всегда удобны, так как для их решения нельзя применять более совершенные методы интегрирования, на-

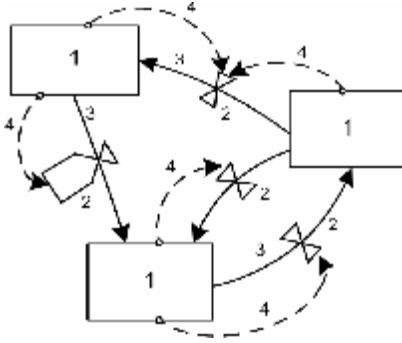


Рис. 2. Динамическая модель

“управляющие устройства” и “регуляторы” вместо “вентили”.

Динамическая модель любого предприятия состоит из накопителей, связанных между собой управляемыми потоками [1]. Изображенная на рис. 2 модель содержит четыре существенных элемента: накопители 1, потоки, перемещающие содержимое одного накопителя к другому, управляющие устройства 2, регулирующие величины потоков продукции 3 между накопителями, и каналы информации 4, соединяющие различные элементы системы.

Уровни переменных характеризуют накопления, возникающие внутри системы. Это, например, товары или готовые изделия на складах, производственные площади, численность работающих. Уровни переменных в накопителях являются интегралами по времени от разности между входящими и исходящими потоками; они существуют как в переходных, так и в установившихся режимах. Накопители существуют во всех шести типах потоков.

Производные от потоков по времени (темпы потоков) определяют мгновенные значения потоков между накопителями в системе и существуют во всех шести типах потоков. Они устанавливаются в соответствии с законами управления, регулируемыми заданные величины.

Уравнение накопителя в дифференциальной форме имеет вид

$$\frac{dy_1}{dt} = x_1(t) - x_2(t),$$

$$y_1|_{t=0} = y_{10},$$

а в интегральной форме

$$y_1(t) = y_{10} + \int_0^t (x_1(t) - x_2(t)) dt,$$

где  $y_{10}$  – начальное значение переменной  $y_1(t)$ ;  $x_1(t)$  – входящий поток, измеряемый в единицах в неделю;  $x_2(t)$  – исходящий поток,

пример, метод Рунге-Кутты или другие методы. Поэтому целесообразно моделируемую систему описывать дифференциальными уравнениями, от которых можно переходить к интегральным и разностным. Следует также отметить, что целесообразно использовать терминологию, применяемую в теории автоматического управления: “накопители” вместо “уровни” или “резервуары”, “производные от потоков”

по времени вместо “темпы потоков” и “регуляторы” вместо “вентили”.

имеющий ту же размерность;  $y_1(t)$  – искомый уровень переменной в накопителе, измеряемый в некоторых единицах.

Уравнения потоков обычно имеют форму уравнения аперидического (инерционного) звена первого порядка:

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{1}{T}(x_1(t) - x_2(t)),$$

где  $x_2(t)$  – исходящий поток;  $x_1(t)$  – входящий поток;  $T$  – коэффициент, имеющий размерность времени. К дифференциальным уравнениям должны быть заданы соответствующие начальные условия.

Кроме уравнений накопителей и потоков, в модели могут использоваться вспомогательные уравнения, связывающие переменные, определяемые из накопителей, с другими переменными системы через некоторые константы.

Предполагаем, что первые этапы построения модели выполнены. Далее строится схема накопителей и потоков, отображающая взаимосвязи в системе, и формируются основные уравнения модели.

При определении динамических характеристик информационных систем с обратными связями решающее значение имеет учет запаздываний. При моделировании процессов производства применяют различные способы реализации запаздываний. Наиболее часто используют инерционные звенья первого и третьего порядка или звенья транспортного запаздывания.

Управление предприятием представляет собой процесс преобразования информации о значении переменных в системе в управляющее воздействие. Этот процесс в экономических системах называют принятием решений. В технических системах автоматическое управление осуществляется путем реализации определенного закона регулирования.

Процесс принятия решений, под воздействием которых функционирует любое предприятие, представляет собой по существу формирование законов управления. При этом должен быть задан желаемый характер протекания процесса, т.е. его программное изменение, которое сравнивается с текущими значениями переменных, а сигнал рассогласования по тому или иному закону преобразуется в корректирующее воздействие, приближающее текущий процесс к программному. При формировании законов управления необходимо учитывать все запаздывания и искажения информации, которые имеются в реальной системе. Важное значение в процессе принятия решений имеет учет различных нелинейностей, характерных для реальных процессов. Во многих случаях необходимо учитывать ограниченные значения тех или иных потоков и запасов.

При построении динамической модели существенное значение для ее упрощения имеет объединение подобных процессов, их группировка. Это позволяет избавиться от излишних и малосущественных

деталей. Если некоторые переменные имеют одинаковые законы управления, а их выходные значения используются в модели для идентичных целей, то эти переменные также можно объединить в одном канале.

Пригодность динамической модели можно выявить на основании оценки ее соответствия поставленной цели. Модель является обоснованной только в том случае, когда она выполняет возложенные на нее функции. Если модель предназначена для улучшения работы промышленной системы и с ее помощью удастся улучшить организационную деятельность предприятия, то эта модель будет чрезвычайно полезна, ибо позволяет разработать более совершенную автоматизированную систему управления.

Модель применяется также для прогнозирования результатов изменений организационных форм или политики управления предприятием. Полезность модели здесь оценивается по тому, насколько она отражает отдельные организационные особенности и детали процесса принятия решений реальной системы, и по соответствию поведения модели и реальной системы. Модель может также применяться при проектировании новых систем и предприятий. В этом случае можно с помощью модели исследовать вопросы поведения создаваемой системы, более глубоко знакомиться с ее динамикой, учиться управлять предприятием.

**Уравнения модели производственно-сбытовой системы.** Для удобства записи уравнений динамической модели вводится единая система обозначений. Переменные, характеризующие накопления, обозначаются буквой  $y$  и измеряются в некоторых единицах. Потоки обозначаются буквой  $x$  и имеют размерность единиц в неделю. Исключением являются переменные, характеризующие усредненные значения накоплений: они имеют размерность единиц в неделю, обозначаются буквами  $x$ , но фактически являются некоторыми средними уровнями. Постоянные времени и запаздывания соответственно обозначаются буквами  $T$  и  $\tau$ , измеряются в неделях. Уравнения инерционных звеньев третьего порядка даются в операторной форме. Переменные имеют два индекса: первый индекс равен единице для переменных розничного звена, двум – для переменных оптового звена и трем – для производственного. Вторые индексы – порядковые номера переменных.

На структурной схеме (диаграмме потоков) розничного звена (рис. 3) внутри фигур обозначены переменные и указаны номера уравнений в фигурных скобках, определяющих данную величину.

Уравнения розничного звена имеют следующий вид:

$$\{1.1\} \frac{dy_{11}}{dt} = x_{11} - x_{12}; \quad \{1.2\} \frac{dy_{12}}{dt} = x_{13} - x_{14}; \quad \{1.3\} x_{15} = \frac{y_{11}}{\tau_{12}(t)};$$

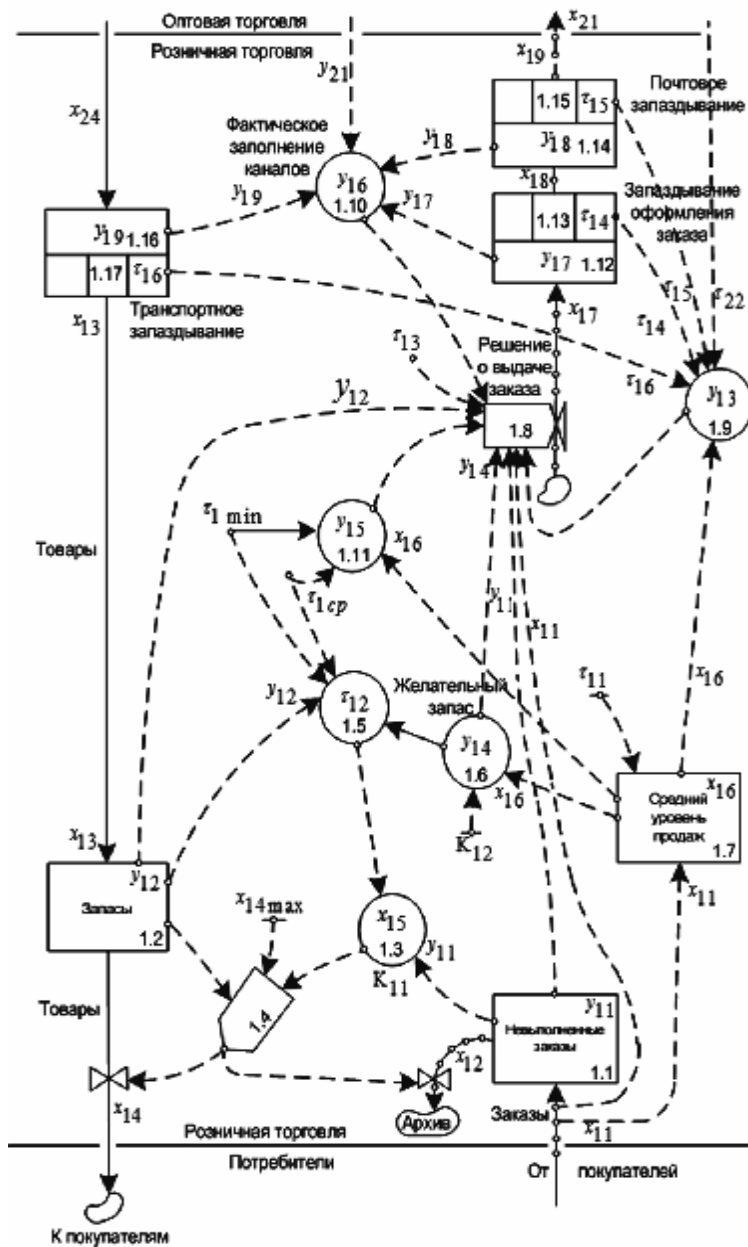


Рис. 3. Структурная схема розничного звена

$$\begin{aligned}
 \{1.4\} \quad x_{14} &= \begin{cases} x_{15}, & \text{если } x_{15} \leq x_{14 \max}, y_{12} > 0; \\ x_{14}, & \text{если } x_{15} > x_{14 \max}, y_{12} > 0; \\ 0, & \text{если } y_{12} < 0; \end{cases} \\
 \{1.5\} \quad \tau_{12}(t) &= \tau_{1 \min} + \tau_{1 \text{cp}} \frac{y_{14}}{y_{12}}; \\
 \{1.6\} \quad y_{14} &= k_{12} x_{16}; \quad \{1.7\} \quad \tau \frac{dx_{16}}{dt} = x_{11} - x_{16}; \\
 \{1.8\} \quad x_{17} &= x_{11} + \frac{1}{\tau_{13}} [(y_{11} + y_{13} + y_{14}) - (y_{12} + y_{15} + y_{16})]; \\
 \{1.9\} \quad y_{13} &= (\tau_{14} + \tau_{16} + \tau_{16} + \tau_{22}) x_{16}; \quad \{1.10\} \quad y_{16} = y_{17} + y_{18} + y_{19} + y_{21}; \\
 \{1.11\} \quad y_{15} &= (\tau_{1 \min} + \tau_{1 \text{cp}}) x_{16}; \quad \{1.12\} \quad \frac{dy_{17}}{dt} = x_{17} - x_{18}; \\
 \{1.13\} \quad x_{18}(\rho) &= \frac{x_{17}(\rho)}{\left(1 + \frac{1}{3} \tau_{14} \rho\right)}; \quad \{1.14\} \quad \frac{dy_{18}}{dt} = x_{18} - x_{19}; \\
 \{1.15\} \quad x_{19}(\rho) &= \frac{x_{18}(\rho)}{\left(1 + \frac{1}{3} \tau_{15} \rho\right)}; \quad \{1.16\} \quad \frac{dy_{19}}{dt} = x_{24} - x_{13}; \\
 \{1.17\} \quad x_{13}(\rho) &= \frac{x_{24}(\rho)}{\left(1 + \frac{1}{3} \tau_{16} \rho\right)}. \tag{1}
 \end{aligned}$$

Начальные условия определяются из следующих соотношений:

$$\left. \begin{aligned}
 y_{011} &= x_{016} (\tau_{1 \min} + \tau_{1 \text{cp}}); & y_{017} &= \tau_{14} x_{011}; \\
 y_{012} &= k_{12} x_{016}; & y_{018} &= \tau_{15} x_{011}; \\
 x_{016} &= x_{011}; & y_{019} &= \tau_{16} x_{011}; \\
 x_{014} &= x_{011}.
 \end{aligned} \right\}$$

Начальные значения других переменных вычисляются исходя из того, что до подачи возмущения система находится в стационарном режиме.

Система уравнений оптового звена аналогична системе уравнений розничного звена, и здесь не приводится.

В структурной схеме на *рис. 3* и в уравнениях розничного звена приняты обозначения:  $y_{11}$  – уровень невыполненных заказов;  $y_{12}$  – фактический запас товаров в звене;  $y_{13}$  – желательный уровень заказов в каналах звена;  $y_{14}$  – желательный запас товаров в звене;  $y_{15}$  – нормальное для розничной торговли число невыполненных заказов;

$y_{16}$  – фактичний рівень замовлень, що знаходяться в каналах розничного звена;  $y_{17}$  і  $y_{18}$  – замовлення в стадії оформлення і в поштових каналах, направляються в оптове звено;  $y_{19}$  – замовлення в пути к оптовому звену;  $x_{11}$  – потік замовлень від покупців;  $x_{12}$  – потік виконаних замовлень покупцям;  $x_{13}$  – потік товарів, поступаючих в розничне звено з оптового;  $x_{14} = x_{12}$  – фактичний потік товарів покупцям;  $x_{14\max}$  – граничний потік товарів покупцям;  $x_{15}$  – передбачуваний потік товарів, що задовольняє замовлення;  $x_{16}$  – усереднений потік продаваних товарів;  $x_{17}$  – потік закупок з оптового звена, встановлений в результаті прийнятого рішення;  $x_{19}$  – потік замовлень, що надходять оптовим звеном;  $\tau_{11}$  – постійна часу усереднення;  $\tau_{12}$  – затримка виконання замовлень розничним звеном;  $\tau_{13}$  – затримка регулювання запасів і заповнення каналів;  $\tau_{1\min}$  – мінімальна затримка виконання замовлення;  $\tau_{1cp}$  – середня затримка виконання замовлень з-за відсутності на складі деяких товарів при загальному достаточному кількості запасів;  $\tau_{14}$  – затримка оформлення замовлення;  $\tau_{15}$  – поштове затримка замовлень, що направляються оптовим базам;  $\tau_{16}$  – затримка транспортування товарів в розничне звено;  $k_{1i}$  – розмірні коефіцієнти пропорційності.

Система рівнянь виробничого звена має наступний вигляд:

$$\{3.1\} \quad \frac{dy_{31}}{dt} = x_{31} - x_{32}; \quad \{3.2\} \quad \frac{dy_{32}}{dt} = x_{33} - x_{34};$$

$$\{3.3\} \quad \tau_{31} \frac{dx_{36}}{dt} = x_{31} - x_{36}; \quad \{3.4\} \quad \tau_{32}(t) = \tau_{3\min} + \tau_{3cp} \frac{y_{34}}{y_{32}};$$

$$\{3.5\} \quad y_{34} = k_{32}x_{36}; \quad \{3.6\} \quad x_{35} = \frac{y_{31}}{\tau_{32}};$$

$$\{3.7\} \quad x_{34} = \begin{cases} x_{35}, & \text{якщо } x_{35} \leq x_{34\max}, y_{32} > 0; \\ x_{34\max}, & \text{якщо } x_{35} > x_{34\max}, y_{32} > 0; \\ 0, & \text{якщо } y_{32} \leq 0; \end{cases}$$

$$\{3.8\} \quad x_{37} = x_{31} + \frac{1}{\tau_{33}} [(y_{31} + y_{33} + y_{34}) - (y_{32} + y_{35} + y_{36})];$$

$$\{3.9\} \quad x_{38} = \begin{cases} x_{37}, & \text{якщо } x_{37} \leq x_{38\max}; \\ x_{38\max}, & \text{якщо } x_{37} > x_{38\max}; \end{cases} \quad \{3.10\} \quad y_{33} = (\tau_{34} + \tau_{35})x_{36};$$

$$\{3.11\} \quad y_{35} = (\tau_{3\min} + \tau_{3cp})x_{36}; \quad \{3.12\} \quad y_{36} = y_{37} + y_{38};$$

$$\{3.13\} \quad \frac{dy_{37}}{dt} = x_{38} - x_{39}; \quad \{3.14\} \quad x_{39}(\rho) = \frac{x_{38}(\rho)}{\left(1 + \frac{1}{3}\tau_{34}\rho\right)^3};$$



$$\{3.15\} \frac{dy_{38}}{dt} = x_{39} - x_{33}; \quad \{3.16\} \quad x_{38}(\rho) = \frac{x_{39}(\rho)}{\left(1 + \frac{1}{3}\tau_{35}\rho\right)^3}. \quad (2)$$

Начальные условия запишутся в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} x_{031} &= x_{011}; & y_{037} &= \tau_{34}x_{031}; \\ y_{031} &= (\tau_{3\min} + \tau_{3cp})x_{036}; & y_{038} &= \tau_{35}x_{031}; \\ y_{032} &= k_{32}x_{036}; & y_{036} &= x_{031}. \end{aligned} \right\}$$

В структурной схеме на *рис. 4* и в уравнениях производственного звена приняты следующие обозначения:  $x_{33}$  – поставки товаров на заводской склад;  $x_{37}$  – желательный поток выпуска продукции;  $x_{38}$  – поток продукции, определяемый на основании принятого решения;  $x_{38\max}$  – предельная величина потока  $x_{38}$ ;  $x_{39}$  – поток заказов заводу;  $y_{37}$  – заказы в процессе оформления на заводе;  $y_{38}$  – заказы в производстве;  $\tau_{34}$  – запаздывание оформления производственных заказов;  $\tau_{35}$  – затрата времени на подготовку производства и выпуск продукции. Остальные переменные имеют такой же смысл, как и в розничном звене.

Таким образом, получены уравнения производственно-сбытовой системы.

**Компьютерная реализация динамической модели.** В настоящее время в распоряжении исследователей имеются стандартные программы для решения систем дифференциальных уравнений классическими методами, например методом Рунге-Кутты 4-го порядка с автоматическим выбором шага, или методом Рунге-Кутты-Фельберга с контролем шага интегрирования, или обобщенным методом Адамса с переменным шагом. Однако при попытке применения этих программ для решения уравнений модели могут быть определенные трудности. Отметим, что большинство программ рассчитано на решение систем уравнений, приведенных к стандартному виду:  $Y' = AY + F$ . Но уравнения рассматриваемой системы составлены в соответствии с ее структурой. В модели кроме дифференциальных имеются и алгебраические уравнения. Преобразование уравнений к стандартному виду часто приводит к потере наглядности модели. Опыт показывает, что полученные уравнения целесообразно решать, пользуясь специализированными программными средствами. Наибольший эффект можно ожидать от применения системы Matlab-Simulink или аналогичных систем.

Для дискретизации уравнений накопителей, потоков и запаздываний в интегральной форме, разделим интервал решения на  $n$  равных участков длиной  $h$ . Тогда время  $t = nh$ .

Уравнение накопителя запишется в виде рекуррентных выражений

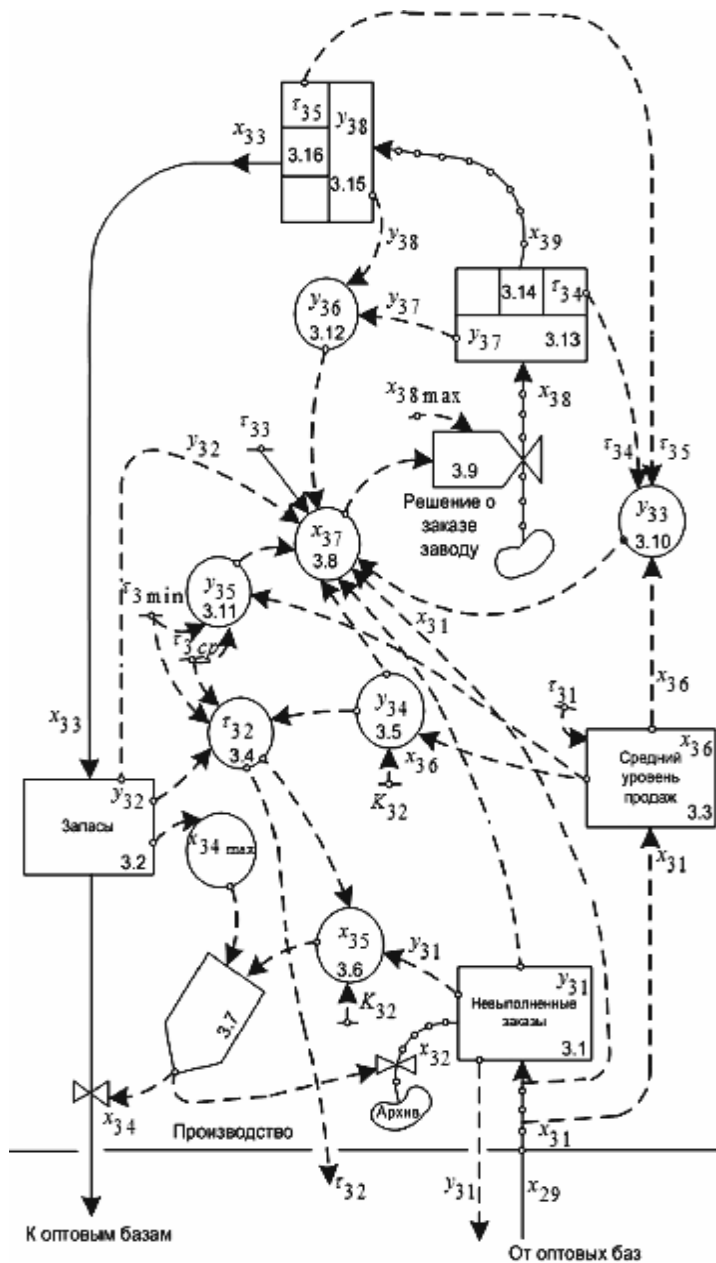


Рис. 4. Структурная схема производственного звена

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= y_0 + \int_0^h (x_1 - x_2) dt = y_0 + (x_{10} - x_{20})h; \\ y_2 &= y_1 + \int_0^{2h} (x_1 - x_2) dt = y_1 + (x_{11} - x_{21})h; \\ &\dots\dots\dots \\ y_{n+1} &= y_n + (x_{1n} - x_{2n})h. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Переменные  $x_{1n}$  и  $x_{2n}$  получаются в результате решения соответствующих уравнений для потоков. Поскольку в (3) в правую часть входят значения переменных, полученные на предыдущем шаге, уравнения накопителей могут решаться последовательно, независимо друг от друга в любом порядке.

Вспомогательные уравнения нельзя решать в произвольном порядке, так как результат решения одного уравнения используется для получения значений другой переменной. Например,

$$y_{14n} = k_{12}x_{16n}; \quad \tau_{12n} = \tau_{1\min} + \tau_{1cp} \frac{y_{14n}}{y_{12n}}.$$

Заметим, что и в левую, и в правую части уравнения входят значения переменных на одном и том же  $n$ -м шаге. Вспомогательные переменные, если они не представляют интереса как результат решения, можно исключать из системы.

Расчетное выражение для потока получается из соответствующего уравнения, представленного в интегральной форме. Например, поток  $x_{16}$  определяется выражением

$$x_{16(n+1)} = x_{16n} + (x_{11n} - x_{16n}) \frac{h}{\tau_{11}}. \quad (4)$$

Поскольку в правую часть (4) входят значения переменных, полученные на предыдущем шаге, уравнения потоков могут решаться последовательно, независимо друг от друга в любом порядке, но после всех остальных типов уравнений.

Инерционное запаздывание третьего порядка может быть описано эквивалентной системой трех дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\left. \begin{aligned} T_3 \frac{dz_3}{dt} + z_3 &= z_2; \\ T_2 \frac{dz_2}{dt} + z_2 &= z_1; \\ T_1 \frac{dz_1}{dt} + z_1 &= z_0. \end{aligned} \right\}$$

Здесь  $z_0$  – входная, а  $z_3$  – выходная величины.

Разностные уравнения при использовании метода прямоугольников имеют вид:

$$\begin{aligned}z_{3(n+1)} &= z_{3n} + (z_{2n} - z_{3n}) \frac{h}{T_3}; \\z_{2(n+1)} &= z_{2n} + (z_{1n} - z_{2n}) \frac{h}{T_2}; \\z_{1(n+1)} &= z_{1n} + (z_{0n} - z_{1n}) \frac{h}{T_1}.\end{aligned}\tag{5}$$

При численном интегрировании дифференциальных уравнений большое значение имеет правильный выбор шага интегрирования. Например, шаг при методе Эйлера должен выбираться не более половины минимальной постоянной времени в системе.

**Выводы.** Все изложенные соображения были использованы при составлении программы для системы Matlab. Использование математического моделирования, основанного на описании производственно-сбытовой системы с помощью дифференциальных уравнений, позволяет исследовать изменение во времени ряда важных производственных показателей предприятия. Несмотря на математическую сложность описанной модели на современном уровне развития компьютерной техники использование аппарата дифференциальных уравнений позволяет эффективно решать задачи управления и прогнозирования результатов деятельности предприятия.

#### Список использованной литературы:

1. Форрестер Дж. Основы кибернетики предприятия. – М.: Прогресс, 1971.
2. Глушков В. М. Об одном классе динамических макроэкономических моделей // Упр. системы и машины. – 1977. – № 2. – С. 3-6.
3. Яценко Ю. П. Интегральные модели систем с управляемой памятью. – К.: Наук. думка, 1991.

The article describes the dynamic model of the production-sales system designed for the industrial enterprise. It show that each unit of the dynamic production system can be described with the help of differential and algebraic equations basing on the approach applied in the automatic management theory.

**Key words:** *dynamic design of production enterprise, production sale model, systems of differential equalizations, equalization of store, equalization of streams, equalization of delay, numeral-analytical decision, automation, control system.*

Отримано: 25.04.2008