УДК 539.3

А. П. Громик[1], І. М. Конет[2]

[1]*Подільський державний аграрно-технічний університет, м. Кам'янець-Подільський*

[2]*Кам'янець-Подільський національний університет*

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ПРОЦЕСІВ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В НАПІВОБМЕЖЕНИХ БАГАТОШАРОВИХ ПРОСТОРОВИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Методом фундаментальних функцій та функцій Гріна (головних розв'язків) побудовано інтегральні зображення точних аналітичних розв'язків алгоритмічного характеру нестаціонарних задач феноменологічної теорії теплопровідності в напівобмежених багатошарових (кусково-однорідних) просторових середовищах. Для побудови головних розв'язків залучено відповідні інтегральні перетворення Фур'є для однорідних середовищ та перетворення Фур'є на декартовій півосі з *n* точками спряження.

Ключові слова: *рівняння теплопровідності, початкові та крайові умови, умови спряження, інтегральні перетворення, головні розв'язки.*

Вступ. Проблеми математичного моделювання реальних фізичних процесів, зокрема процесів теплопровідності для кусково-однорідних середовищ у декартовій, сферичній та циліндричній системах координат становлять значний теоретичний та практичний інтерес [1-4]. Питанням побудови методом інтегральних перетворень точних аналітичних розв'язків двовимірних та тривимірних лінійних температурних задач присвячені монографії [5-8]. Зокрема, в [8] розглянуто випадок напівобмежених кусково-однорідних за декартовою координатою циліндрично-кругових середовищ. Необмежені двоскладові та тришарові просторові середовища розглянуто у працях [9-12]. У цій статті ми пропонуємо точні аналітичні розв'язки нестаціонарних задач теплопровідності для напівобмежених кусково-однорідних середовищ у просторовій декартовій системі координат.

Постановка задачі. Задача про структуру нестаціонарного температурного поля в ортотропному напівобмеженому $(n+1)$-шаровому просторовому середовищі математично зводиться до побудови обмеженого на множині

$$D_3 = \Big\{(t,x,y,z)\Big|\, t>0;\,(x,y)\in\Omega_2=\langle a;b\rangle\times\langle c;d\rangle;$$

$$\left. z\in I_n^+ \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1}\big(l_{j-1};l_j\big);\ l_0\ge 0;\ l_k<l_{k+1};\ l_{n+1}=\infty \right\}$$

розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь теплопровідності [13, 14]

$$\frac{\partial T_j}{\partial t}-\left[a_{xj}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+a_{yj}^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+a_{zj}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]T_j+\chi_j^2 T_j=f_j(t,x,y,z);\ j=\overline{1,n+1},\quad(1)$$

з початковими умовами

$$T_j(t,x,y,z)\big|_{t=0}=g_j(x,y,z);z\in I_j;\ j=\overline{1,n+1},\qquad(2)$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{11}^0\right)T_1\bigg|_{z=l_0}=g_0(t,x,y);\ \frac{\partial^p T_{n+1}}{\partial z^p}\bigg|_{z=+\infty}=0,\ p=0,1;\qquad(3)$$

умовами неідеального теплового контакту [15]

$$\begin{cases}\left[\left(R_k\frac{\partial}{\partial z}+1\right)T_k-T_{k+1}\right]\bigg|_{z=l_k}=0,\\ \left(\nu_k\frac{\partial T_k}{\partial z}-\nu_{k+1}\frac{\partial T_{k+1}}{\partial z}\right)\bigg|_{z=l_k}=0;\ k=\overline{1,n}\end{cases}\qquad(4)$$

та відповідними крайовими умовами на межі Ω_2, де $a_{xj},a_{yj},a_{zj}\ge 0$ – коефіцієнти температуропровідності у напрямках координатних осей *x, y, z* ($j=\overline{1,n+1}$); $\chi_j^2\ge 0$ – коефіцієнти дисипації теплової енергії; $f(t,x,y,z)=\{f_1(t,x,y,z),f_2(t,x,y,z),\dots,f_{n+1}(t,x,y,z)\}$ – інтенсивність теплових джерел; $g(x,y,z)=\{g_1(x,y,z),g_2(x,y,z),\dots,g_{n+1}(x,y,z)\}$ – температура середовища в початковий момент часу; $\alpha_{11}^0,\beta_{11}^0$ – деякі дійсні сталі; $g_0(t,x,y)$ – задана обмежена неперервна функція в області $(0;+\infty)\times\Omega_2$; $R_k\ge 0$ – коефіцієнти термоопору; $\nu_k,\nu_{k+1}\ge 0$ – коефіцієнти теплопровідності; $T(t,x,y,z)=\{T_1(t,x,y,z),T_2(t,x,y,z),\dots,$ $T_{n+1}(t,x,y,z)\}$ – шукана температура.

Випадки областей $\Omega_2=(-\infty;+\infty)\times(-\infty;+\infty)$, $\Omega_2=(-\infty;+\infty)\times$ $\times(0;+\infty)$ розглянуто в [16].

1. Математичне моделювання процесу теплопровідності в кусково-однорідному середовищі $(0;+\infty)\times(0;+\infty)\times\{z\in I_n^+\}$.

Розглянемо область $\Omega_2=(0;+\infty)\times(0;+\infty)$. У цьому випадку на межі області Ω_2 виконуються крайові умови

$$\left(-\frac{\partial}{\partial x}+p\right)T_j\bigg|_{x=0}=g_j^1(t,y,z);\ \frac{\partial^k T_j}{\partial x^k}\bigg|_{x=+\infty}=0;k=0,1;\ j=\overline{1,n+1}\qquad(5)$$

щодо змінної x та крайові умови

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y}+h\right)T_j\Bigg|_{y=0}=g_j^2(t,x,z);\ \frac{\partial^k T_j}{\partial y^k}\Bigg|_{y=+\infty}=0; k=0,1;\ j=\overline{1,n+1} \quad (6)$$

щодо змінної y, де $p\geq 0$ – коефіцієнт теплообміну через поверхню $x=0$; $g_j^1(t,y,z)=pT_j^c(t,y,z)$, $T_j^c(t,y,z)$ – температура середовища на поверхні $x=0$; $h\geq 0$ – коефіцієнт теплообміну через поверхню $y=0$; $g_j^2(t,x,z)=hT_j^c(t,x,z)$, $T_j^c(t,x,z)$ – температура середовища на поверхні $y=0$.

Вважаємо, що для задачі (1)-(6) виконуються умови узгодженості [13]:

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{11}^0\right)g_1\Bigg|_{z=l_0}=g_0(0,x,y);\ \frac{\partial^p g_{n+1}}{\partial z^p}\Bigg|_{z=+\infty}=0,\ p=0,1;$$

$$\begin{cases}\left[\left(R_k\frac{\partial}{\partial z}+1\right)g_k-g_{k+1}\right]\Bigg|_{z=l_k}=0,\\ \left(\nu_k\frac{\partial g_k}{\partial z}-\nu_{k+1}\frac{\partial g_{k+1}}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=l_k}=0;\ k=\overline{1,n};\end{cases}$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial x}+p\right)g_j\Bigg|_{x=0}=g_j^1(0,y,z);\ \frac{\partial^k g_j}{\partial x^k}\Bigg|_{x=+\infty}=0; k=0,1;\ j=\overline{1,n+1};$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y}+h\right)g_j\Bigg|_{y=0}=g_j^2(0,x,z);\ \frac{\partial^k g_j}{\partial y^k}\Bigg|_{y=+\infty}=0; k=0,1;\ j=\overline{1,n+1}.$$

Припустимо, що розв'язок задачі (1)-(6) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [17, 5].

До задачі (1)-(6) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій півосі щодо змінної x [17]:

$$F_{+x}[g(x)]=\int_0^{+\infty}g(x)K_x(x,\sigma)dx\equiv\tilde{g}(\sigma), \quad (7)$$

$$F_{+x}^{-1}[\tilde{g}(\sigma)]=\int_0^{+\infty}\tilde{g}(\sigma)K_x(x,\sigma)d\sigma\equiv g(x), \quad (8)$$

$$F_{+x}\left[\frac{d^2 g}{dx^2}\right] = -\sigma^2 \tilde{g}(\sigma) + K_x(0,\sigma)\left(-\frac{dg}{dx} + pg\right)\Bigg|_{x=0}, \tag{9}$$

де ядро перетворення $K_x(x,\sigma) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sigma\cos(\sigma x) + p\sin(\sigma x)}{\sqrt{\sigma^2 + p^2}}$.

Інтегральний оператор F_{+x} за правилом (7) внаслідок тотожності (9) початково-крайовій задачі (1)-(6) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D_3' = \{(t, y, z) \mid t > 0; y \in (0;+\infty); z \in I_n^+\}$ розв’язку сепаратної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial \tilde{T}_j}{\partial t} - \left[a_{yj}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\tilde{T}_j + \left(a_{xj}^2\sigma^2 + \chi_j^2\right)\tilde{T}_j = \tilde{F}_j(t,\sigma,y,z);\ j = \overline{1,n+1}, \tag{10}$$

з початковими умовами

$$\tilde{T}_j(t,\sigma,y,z)\Big|_{t=0} = \tilde{g}_j(\sigma,y,z);\ z \in I_j;\ j = \overline{1,n+1}, \tag{11}$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0\right)\tilde{T}_1\Bigg|_{z=l_0} = \tilde{g}_0(t,\sigma,y);\ \frac{\partial^p \tilde{T}_{n+1}}{\partial z^p}\Bigg|_{z=+\infty} = 0;\ p = 0{,}1; \tag{12}$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y} + h\right)\tilde{T}_j\Bigg|_{y=0} = \tilde{g}_j^2(t,\sigma,z);\ \frac{\partial^k \tilde{T}_j}{\partial y^k}\Bigg|_{y=+\infty} = 0;\ k = 0, 1;\ j = \overline{1, n+1}, \tag{13}$$

та умовами спряження

$$\begin{cases} \left[\left(R_k \dfrac{\partial}{\partial z} + 1\right)\tilde{T}_k - \tilde{T}_{k+1}\right]\Bigg|_{z=l_k} = 0, \\ \left(\nu_k \dfrac{\partial \tilde{T}_k}{\partial z} - \nu_{k+1}\dfrac{\partial \tilde{T}_{k+1}}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=l_k} = 0;\ k = \overline{1, n}, \end{cases} \tag{14}$$

де $\tilde{F}_j(t,\sigma,y,z) = \tilde{f}_j(t,\sigma,y,z) + a_{xj}^2 K_x(0,\sigma) g_j^1(t,y,z);\ j = \overline{1,n+1}.$

До задачі (10)-(14) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій півосі щодо змінної y [17]:

$$F_{+y}[g(y)] = \int_0^{+\infty} g(y) K_y(y,s)\,dy \equiv \tilde{g}(s), \tag{15}$$

$$F_{+y}^{-1}[\tilde{g}(s)] = \int_0^{+\infty} \tilde{g}(s) K_y(y,s)\,ds \equiv g(y), \tag{16}$$

$$F_{+y}\left[\frac{d^2 g}{dy^2}\right]=-s^2\tilde{g}(s)+K_y(0,s)\left(-\frac{dg}{dy}+hg\right)\Bigg|_{y=0}, \qquad (17)$$

де ядро перетворення

$$K_y(y,s)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{s\cos(sy)+h\sin(sy)}{\sqrt{s^2+h^2}}.$$

Інтегральний оператор F_{+y} за правилом (15) внаслідок тотожності (17) початково-крайовій задачі (10)-(14) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D_3''=\{(t,z)\mid t>0; z\in I_n^+\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial\tilde{\tilde{T}}_j}{\partial t}-a_{zj}^2\frac{\partial^2\tilde{\tilde{T}}_j}{\partial z^2}+\left(a_{xj}^2\sigma^2+a_{yj}^2 s^2+\chi_j^2\right)\tilde{\tilde{T}}_j=\tilde{\tilde{F}}_j(t,\sigma,s,z); z\in I_j \qquad (18)$$

з початковими умовами

$$\tilde{\tilde{T}}_j(t,\sigma,s,z)\Big|_{t=0}=\tilde{\tilde{g}}_j(\sigma,s,z); z\in I_j; j=\overline{1,n+1}, \qquad (19)$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{11}^0\right)\tilde{\tilde{T}}_1\Bigg|_{z=l_0}=\tilde{\tilde{g}}_0(t,\sigma,s);\ \frac{\partial^p\tilde{\tilde{T}}_{n+1}}{\partial z^p}\Bigg|_{z=+\infty}=0; p=0,1 \qquad (20)$$

та умовами спряження

$$\begin{cases}\left[\left(R_k\frac{\partial}{\partial z}+1\right)\tilde{\tilde{T}}_k-\tilde{\tilde{T}}_{k+1}\right]\Bigg|_{z=l_k}=0,\\ \left(\nu_k\frac{\partial\tilde{\tilde{T}}_k}{\partial z}-\nu_{k+1}\frac{\partial\tilde{\tilde{T}}_{k+1}}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=l_k}=0; k=\overline{1,n},\end{cases} \qquad (21)$$

де $\tilde{\tilde{F}}_j(t,\sigma,s,z)=\tilde{\tilde{f}}_j(t,\sigma,s,z)+a_{xj}^2K_x(0,\sigma)\tilde{g}_j^1(t,s,z)+a_{yj}^2K_y(0,s)\tilde{g}_j^2(t,\sigma,z)$.

До задачі (18)-(21) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій півосі $z\ge l_0\ge 0$ з n точками спряження щодо змінної z [5]:

$$F_{n,+}[g(z)]=\int_{l_0}^{+\infty}g(z)V(z,\beta)\sigma(z)dz\equiv\tilde{g}(\beta), \qquad (22)$$

$$F_{n,+}^{-1}[\tilde{g}(\beta)]=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\tilde{g}(\beta)V(z,\beta)\Omega_n(\beta)\,d\beta\equiv g(z), \qquad (23)$$

$$F_{n,+}\left[\sum_{j=1}^{n} a_j^2\theta\left(z-l_{j-1}\right)\theta\left(l_j-z\right)\frac{d^2g}{dz^2}+a_{n+1}^2\theta\left(z-l_n\right)\frac{d^2g}{dz^2}\right]\equiv$$

$$\equiv\sum_{j=1}^{n+1} a_j^2\int_{l_{j-1}}^{l_j}\frac{d^2g}{dz^2}V_j\left(z,\beta\right)\sigma_j dz=-\beta^2\widetilde{g}\left(\beta\right)- \tag{24}$$

$$-\sigma_1 a_1^2\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1}V_1\left(l_0,\beta\right)\left(\alpha_{11}^0\frac{dg}{dz}+\beta_{11}^0 g\right)\Bigg|_{z=l_0}-\sum_{j=1}^{n+1}k_j^2\int_{l_{j-1}}^{l_j}g\left(z\right)V_j\left(z,\beta\right)\sigma_j dz.$$

У рівностях (22)-(24) беруть участь величини і функції:

$$V\left(z,\beta\right)=\sum_{k=1}^{n}V_k\left(z,\beta\right)\theta\left(z-l_{k-1}\right)\theta\left(l_k-z\right)+V_{n+1}\left(z,\beta\right)\theta\left(z-l_n\right);$$

$$\sigma\left(z\right)=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k\theta\left(z-l_{k-1}\right)\theta\left(l_k-z\right)+\sigma_{n+1}\theta\left(z-l_n\right);$$

$$V_m\left(z,\beta\right)=\prod_{j=m}^{n}c_{2j}q_{n+1}\left(\beta^2\right)G_m\left(z,\beta\right);\ m=\overline{1,n}\ ;$$

$$V_{n+1}\left(z,\beta\right)=\omega_{n2}\left(\beta\right)\cos\left(q_{n+1}\left(\beta^2\right)z\right)-\omega_{n1}\left(\beta\right)\sin\left(q_{n+1}\left(\beta^2\right)z\right);$$

$$\sigma_k=\prod_{j=k}^{n}\frac{c_{1j}a_{n+1}}{c_{2j}a_k^2}\ ;\ \sigma_n=\frac{c_{1n}a_{n+1}}{c_{2n}a_n^2}\ ;\ \sigma_{n+1}=\frac{1}{a_{n+1}}\ ;$$

$$G_k\left(z,\beta\right)=\omega_{k-1,2}\left(\beta\right)\cos\left(q_k\left(\beta^2\right)z\right)-\omega_{k-1,1}\left(\beta\right)\sin\left(q_k\left(\beta^2\right)z\right);\ k=\overline{1,n}\ ;$$

$$q_j\left(\beta^2\right)=a_j^{-1}\left(\beta^2+k_j^2\right)^{1/2}\ ;\ j=\overline{1,n+1}\ ;\ b_j\left(\beta^2\right)=\left(\beta^2+k_j^2\right)^{1/2}\ ;\ j=\overline{1,n+1}\ ;$$

$$\omega_{01}\left(q_1l_0\right)=-\nu_{11}^{01}\left(q_1l_0\right);\ \omega_{02}\left(q_1l_0\right)=-\nu_{11}^{02}\left(q_1l_0\right);$$

$$\omega_{jm}\left(\beta\right)=\omega_{j-1,2}\left(\beta\right)\psi_{1m}^{j}\left(q_jl_j;q_{j+1}l_j\right)-\omega_{j-1,1}\left(\beta\right)\psi_{2m}^{j}\left(q_jl_j;q_{j+1}l_j\right);$$

$$\psi_{jm}^{k}\left(q_kl_k;q_{k+1}l_k\right)=\nu_{11}^{kj}\left(q_kl_k\right)\nu_{22}^{km}\left(q_{k+1}l_k\right)-\nu_{21}^{kj}\left(q_kl_k\right)\nu_{12}^{km}\left(q_{k+1}l_k\right);$$

$$\nu_{ij}^{k1}\left(q_sl_m\right)=-\alpha_{ij}^{k}q_s\sin\left(q_sl_m\right)+\beta_{ij}^{k}\cos\left(q_sl_m\right);\ i,\ j=1,2\ ;\ k=\overline{1,n}\ ;$$

$$\nu_{ij}^{k2}\left(q_sl_m\right)=\alpha_{ij}^{k}q_s\cos\left(q_sl_m\right)+\beta_{ij}^{k}\sin\left(q_sl_m\right);\ s=\overline{1,n+1}\ ;\ m=\overline{1,n+1}\ ;$$

$$\alpha_{11}^k=R_k\ ;\ \beta_{11}^k=1\ ;\ \alpha_{12}^k=0\ ;\ \beta_{12}^k=1\ ;$$

$$\alpha_{21}^k=\nu_k\ ;\ \beta_{21}^k=0\ ;\ \alpha_{22}^k=\nu_{k+1}\ ;\ \beta_{22}^k=0\ ;$$

$$c_{jk}=\alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k-\alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k\neq 0\ ;\ i,\ j=1,2\ ;\ k=\overline{1,n}\ ;$$

$$\omega_n(\beta) = [\omega_{n1}(\beta)]^2 + [\omega_{n2}(\beta)]^2 ; \ \Omega_n(\beta) = \frac{\beta}{b_{n+1}(\beta^2)\,\omega_n(\beta)},$$

$\theta\,(x)$ – одинична функція Гевісайда [18].

Запишемо систему диференціальних рівнянь (18) та початкові умови (19) у матричній формі

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_1^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + q_1^2(\sigma, s)\right)\tilde{\tilde{T}}_1(t,\sigma,s,z) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_2^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + q_2^2(\sigma, s)\right)\tilde{\tilde{T}}_2(t,\sigma,s,z) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_{n+1}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + q_{n+1}^2(\sigma, s)\right)\tilde{\tilde{T}}_{n+1}(t,\sigma,s,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{f}}_1(t,\sigma,s,z) \\ \tilde{\tilde{f}}_2(t,\sigma,s,z) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{\tilde{f}}_{n+1}(t,\sigma,s,z) \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$\left.\begin{bmatrix} \tilde{\tilde{T}}_1(t,\sigma,s,z) \\ \tilde{\tilde{T}}_2(t,\sigma,s,z) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{\tilde{T}}_{n+1}(t,\sigma,s,z) \end{bmatrix}\right|_{t=0} = \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{g}}_1(\sigma,s,z) \\ \tilde{\tilde{g}}_2(\sigma,s,z) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{\tilde{g}}_{n+1}(\sigma,s,z) \end{bmatrix}, \quad (26)$$

де $q_j^2(\sigma,s) = a_{xj}^2\sigma^2 + a_{yj}^2 s^2 + \chi_j^2$; $a_j^2 \equiv a_{zj}^2$; $j = \overline{1, n+1}$.

Інтегральний оператор $F_{n,+}$, який діє за правилом (22), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$F_{n,+}[\dots] = \left[\int_{l_0}^{l_1} \dots V_1(z,\beta)\sigma_1 dz \int_{l_1}^{l_2} \dots V_2(z,\beta)\sigma_2 dz \dots \int_{l_n}^{+\infty} \dots V_{n+1}(z,\beta)\sigma_{n+1} dz\right] \quad (27)$$

і застосуємо за правилом множення матриць до задачі (25), (26).

Внаслідок тотожності (24) одержуємо задачу Коші

$$\sum_{i=1}^{n+1}\left(\frac{d}{dt} + \beta^2 + q_j^2(\sigma,s) + k_i^2\right)\tilde{\tilde{\tilde{T}}}_i = \sum_{i=1}^{n+1}\tilde{\tilde{\tilde{F}}}_i - \sigma_1 a_1^2 \left(\alpha_{11}^0\right)^{-1} V_1(l_0,\beta)\tilde{\tilde{g}}_0(t,\sigma,s), \quad (28)$$

$$\left.\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{\tilde{T}}}_j\right|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{\tilde{g}}}_j, \quad (29)$$

де $\tilde{\tilde{\tilde{T}}}_j \equiv \tilde{\tilde{\tilde{T}}}_j(t,\sigma,s,\beta) = \int_{l_{j-1}}^{l_j} \tilde{\tilde{T}}_j(t,\sigma,s,z) V_j(z,\beta)\sigma_j dz$; $j = \overline{1, n+1}$;

$$\tilde{\tilde{\tilde{F}}}_j \equiv \tilde{\tilde{\tilde{F}}}_j(t,\sigma,s,\beta) = \int\limits_{l_{j-1}}^{l_j} \tilde{\tilde{F}}_j(t,\sigma,s,z)V_j(z,\beta)\sigma_j dz;\; j=\overline{1,n+1};$$

$$\tilde{\tilde{\tilde{g}}}_j \equiv \tilde{\tilde{\tilde{g}}}_j(\sigma,s,\beta) = \int\limits_{l_{j-1}}^{lj} \tilde{\tilde{g}}_j(\sigma,s,z)V_j(z,\beta)\sigma_j dz;\; j=\overline{1,n+1}.$$

Припустимо, не зменшуючи загальності, що $\max\{q_1^2, q_2^2, ..., q_{n+1}^2\} = q_1^2$ і покладемо всюди $k_j^2 = q_1^2 - q_j^2 \quad \left(j=\overline{1,\, n+1}\right)$. Задача Коші (28), (29) набуває вигляду

$$\frac{d\tilde{\tilde{\tilde{T}}}}{dt} + \left(\beta^2 + a_{x1}^2\sigma^2 + a_{y1}^2 s^2 + \chi_1^2\right)\tilde{\tilde{\tilde{T}}} = \tilde{\tilde{\tilde{F}}}(t,\sigma,s,\beta) - \\ -\sigma_1 a_1^2\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1} V_1(l_0,\beta)\tilde{\tilde{g}}_0(t,\sigma,s), \tag{30}$$

$$\tilde{\tilde{\tilde{T}}}(t,\sigma,s,\beta)\Big|_{t=0} = \tilde{\tilde{\tilde{g}}}(\sigma,s,\beta), \tag{31}$$

де
$$\tilde{\tilde{\tilde{T}}}(t,\sigma,s,\beta) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{\tilde{\tilde{T}}}_j(t,\sigma,s,\beta),$$

$$\tilde{\tilde{\tilde{F}}}(t,\sigma,s,\beta) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{\tilde{\tilde{F}}}_j(t,\sigma,s,\beta),$$

$$\tilde{\tilde{\tilde{g}}}(\sigma,s,\beta) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{\tilde{\tilde{g}}}_j(\sigma,s,\beta).$$

Безпосередньо перевіряється, що єдиним обмеженим розв’язком задачі (30), (31) є функція

$$\tilde{\tilde{\tilde{T}}}(t,\sigma,s,\beta) = \int\limits_0^t \exp\left[-\left(\beta^2 + a_{x1}^2\sigma^2 + a_{y1}^2 s^2 + \chi_1^2\right)(t-\tau)\right]\times \\ \times\left[\tilde{\tilde{\tilde{F}}}(\tau,\sigma,s,\beta) - \sigma_1 a_1^2(\alpha_{11}^0)^{-1}V_1(l_0,\beta)\tilde{\tilde{g}}_0(\tau,\sigma,s) + \delta_+(\tau)\tilde{\tilde{\tilde{g}}}(\sigma,s,\beta)\right]d\tau. \tag{32}$$

де $\delta_+(\tau)$ – міра Дірака, зосереджена в точці $\tau = +0$ [18].

Оскільки суперпозиція операторів $F_{n,+}$ та $F_{n,+}^{-1}$ є одиничним оператором, то оператор $F_{n,+}^{-1}$ зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$F_{n,+}^{-1}[\ldots]=\begin{bmatrix} \dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\ldots V_1(z,\beta)\Omega_n(\beta)\,d\beta \\ \dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\ldots V_2(z,\beta)\Omega_n(\beta)\,d\beta \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\ldots V_{n+1}(z,\beta)\Omega_n(\beta)\,d\beta \end{bmatrix}. \tag{33}$$

За правилом множення матриць застосуємо операторну матрицю-стовпець (33) до матриці-елемента $\left[\tilde{\tilde{\tilde{T}}}(t,\sigma,s,\beta)\right]$, де функція $\tilde{\tilde{\tilde{T}}}(t,\sigma,s,\beta)$ визначена формулою (32). Одержуємо єдиний обмежений розв'язок задачі (18)-(21):

$$\tilde{\tilde{T}}_j(t,\sigma,s,z)=\int\limits_0^t\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\exp\left[-\left(\beta^2+a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2s^2+\chi_1^2\right)(t-\tau)\right]\times$$
$$\times\left[\tilde{\tilde{\tilde{F}}}(t,\sigma,s,\beta)-\sigma_1a_1^2(\alpha_{11}^0)^{-1}V_1(l_0,\beta)\tilde{\tilde{g}}_0(\tau,\sigma,s)+\delta_+(\tau)\tilde{\tilde{g}}(\sigma,s,\beta)\right]\times \tag{34}$$
$$\times V_j(z,\beta)\Omega_n(\beta)d\beta d\tau.$$

До функцій $\tilde{\tilde{T}}_j(t,\sigma,s,z)$ послідовно застосуємо обернені оператори F_{+y}^{-1} за правилом (16) та F_{+x}^{-1} за правилом (8). Виконавши нескладні перетворення, одержуємо функції

$$T_j(t,x,y,z)=\sum_{k=1}^{n+1}\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{l_{k-1}}^{l_k}E_{ik}(t-\tau,x,\xi,y,\eta,z,\zeta)\times$$
$$\times\left[f_k(\tau,\xi,\eta,\zeta)+\delta_+(\tau)g_k(\xi,\eta,\zeta)\right]\sigma_k\,d\xi d\eta d\zeta d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}W_j(t-\tau,x,\xi,y,\eta,z)g_0(\tau,\xi,\eta)d\xi d\eta d\tau+ \tag{35}$$
$$+a_{xj}^2\sum_{k=1}^{n+1}\int\limits_0^t\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{l_{k-1}}^{l_k}W_{xjk}(t-\tau,x,y,\eta,z,\zeta)g_k^1(\tau,\eta,\zeta)\sigma_k\,d\eta d\zeta d\tau+$$

$$+a_{yj}^2\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^t\int_0^{+\infty}\int_{l_{k-1}}^{l_k}W_{yjk}(t-\tau,x,\xi,y,z,\zeta)g_k^2(\tau,\xi,\zeta)\sigma_k d\xi d\zeta d\tau;\ j=\overline{1,n+1},$$

які описують структуру нестаціонарного температурного поля в розглянутому середовищі.

У формулах (35) застосовано компоненти:
фундаментальної матриці розв'язків

$$E_{jk}(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\exp\left[-\left(\beta^2+a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2s^2+\chi_1^2\right)t\right]\times$$
$$\times V_j(z,\beta)V_k(\zeta,\beta)\Omega_n(\beta)K_x(x,\sigma)K_x(\xi,\sigma)K_y(y,s)K_y(\eta,s)d\sigma ds d\beta, \tag{36}$$

аплікатної матриці Гріна

$$W_j(t,x,\xi,y,\eta,z)=-\sigma_1 a_1^2(\alpha_{11}^0)^{-1}E_{j1}(t,x,\xi,y,\eta,z,l_0)\,, \tag{37}$$

абсцисної матриці Гріна

$$W_{xjk}\left(t,x,y,\eta,z,\zeta\right)=E_{jk}\left(t,x,0,y,\eta,z,\zeta\right), \tag{38}$$

ординатної матриці Гріна

$$W_{yjk}\left(t,x,\xi,y,z,\zeta\right)=E_{jk}\left(t,x,\xi,y,0,z,\zeta\right) \tag{39}$$

параболічної початково-крайової задачі (1)-(6).

З використанням властивостей фундаментальних функцій $E_{jk}(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta)$ і функцій Гріна $W_j(t,x,\xi,y,\eta,z)$, $W_{xjk}(t,x,y,\eta,z,\zeta)$, $W_{yjk}\left(t,x,\xi,y,z,\zeta\right)$ безпосередньо перевіряється, що функції $T_j(t,x,y,z)$, визначені формулами (35), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умові (3), (5), (6) та умови спряження (4) в сенсі теорії узагальнених функцій [18].

Зауваження 1. У випадку $a_{xj}^2=a_{yi}^2=a_{zj}^2\equiv a_j^2\geq 0$ формули (35) визначають структуру нестаціонарного температурного в ізотропному напівобмеженому ($n+1$)-шаровому просторовому середовищі.

Зауваження 2. Якщо деякі з коефіцієнтів термоопору R_k дорівнюють нулю, то безпосередньо з формул (35) одержуємо структуру нестаціонарного температурного поля у випадку здійснення на відповідних площинах $z=l_k$ ідеального теплового контакту.

Зауваження 3. При $R_k=0\left(k=\overline{1,n}\right)$ безпосередньо з формул (35) одержуємо структуру нестаціонарного температурного поля у випадках здійснення на всіх площинах $z=l_k$ ідеального теплового контакту.

Зауваження 4. Параметри α_{11}^0, β_{11}^0 дають можливість виділяти із формул (35) розв'язки початково-крайових задач у випадках задання на поверхні $z = l_0$ крайової умови 1-го роду $\left(\alpha_{11}^0 = 0,\, \beta_{11}^0 = 1,\right.$ $\left.g_0(t,x,y) = \alpha_{11}^0 T_0(t,x,y)\right)$, 2-го роду $\left(\alpha_{11}^0 = -1,\, \beta_{11}^0 = 0\right)$ та 3-го роду $\left(\alpha_{11}^0 = -1,\, \beta_{11}^0 \equiv h > 0\right)$.

Зауваження 5. Аналіз розв'язку (35) в залежності від аналітичного виразу функцій $f_j(t,x,y,z)$, $g_j(x,y,z)$, $g_j^1(t,y,z)$, $g_j^2(t,x,z)$ $\left(j = \overline{1,n+1}\right)$ та $g_0(t,x,y)$ проводиться безпосередньо.

2. Математичне моделювання процесу теплопровідності в кусково-однорідному середовищі $(0;+\infty)\times(0;b)\times\left\{z \in I_n^+\right\}$.

Розглянемо область $\Omega_2 = (0; +\infty) \times (0; b)$. У цьому випадку на межі області Ω_2 виконуються крайові умови (5) щодо змінної x та крайові умови

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y} + h_1\right)T_j\Bigg|_{y=0} = g_{1j}(t,x,z);\ \left(\frac{\partial}{\partial y} + h_2\right)T_j\Bigg|_{y=b} = g_{2j}(t,x,z), \quad (40)$$

щодо змінної y, де $h_1 \geq 0$ – коефіцієнт теплообміну через поверхню $y = 0$; $g_{1j}(t,x,z) = h_1 T_j^{c1}(t,x,z)$, $T_j^{c1}(t,x,z)$ – температура середовища на поверхні $y = 0$; $h_2 \geq 0$ – коефіцієнт теплообміну через поверхню $y = 0$; $g_{2j}(t,x,z) = h_2 T_j^{c2}(t,x,z)$, $T_j^{c2}(t,x,z)$ – температура середовища на поверхні $y = 0$.

Вважаємо, що для задачі (1)-(5), (40) виконуються умови узгодженості:

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0\right)g_1\Bigg|_{z=l_0} = g_0(0,x,y);\ \frac{\partial^p g_{n+1}}{\partial z^p}\Bigg|_{z=+\infty} = 0,\, p = 0,1;$$

$$\begin{cases} \left[\left(R_k \dfrac{\partial}{\partial z} + 1\right)g_k - g_{k+1}\right]\Bigg|_{z=l_k} = 0, \\ \left(\nu_k \dfrac{\partial g_k}{\partial z} - \nu_{k+1}\dfrac{\partial g_{k+1}}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=l_k} = 0;\, k = \overline{1,n}; \end{cases}$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial x} + p\right)g_j\Bigg|_{x=0} = g_j^1(0,y,z);\ \frac{\partial^k g_j}{\partial x^k}\Bigg|_{x=+\infty} = 0;\ k = 0,1;$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y} + h_1\right)g_j\Bigg|_{y=0} = g_{1j}(0,x,z);\ \left(\frac{\partial}{\partial y} + h_2\right)g_j\Bigg|_{y=b} = g_{2j}(0,x,z);\, j = \overline{1,n+1}.$$

Припустимо, що розв'язок задачі (1)-(5), (40) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [17, 5].

До задачі (1)-(5), (40) застосуємо інтегральне перетворення Фур’є на декартовій півосі щодо змінної x. Інтегральний оператор F_{+x} за правилом (7) внаслідок тотожності (9) початково-крайовій задачі (1)-(5), (40) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D_3' = \{(t, y, z) | t > 0; y \in (0; b); z \in I_n^+\}$ розв’язку сепаратної системи диференціальних рівнянь (10) з початковими умовами (11), крайовими умовами (12), крайовими умовами

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y} + h_1 \right) \widetilde{T}_j \Big|_{y=0} = \widetilde{g}_{1j}(t, \sigma, z); \; \left(\frac{\partial}{\partial y} + h_2 \right) \widetilde{T}_j \Big|_{y=b} = \widetilde{g}_{2j}(t, \sigma, z) \quad (41)$$

та умовами спряження (14).

До задачі (10)-(12), (41), (14) застосуємо інтегральне перетворення Фур’є на декартовому сегменті [0, b] щодо змінної y [17]:

$$\Lambda_{yk}[g(y)] = \int_0^b g(y)\, v_k(y)\, dy \equiv g_k \; , \quad (42)$$

$$\Lambda_{yk}^{-1}[g_k] = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \frac{v_k(y)}{\|v_k\|^2} \equiv g(y), \quad (43)$$

$$\Lambda_{yk}\left[\frac{d^2 g}{dy^2} \right] = -\gamma_k^2 g_k + v_k(0) \left(-\frac{dg}{dy} + h_1 g \right) \Big|_{y=0} + v_k(b) \left(\frac{dg}{dy} + h_2 g \right) \Big|_{y=b} , \quad (44)$$

де ядро перетворення

$$v_k(y) = \frac{\gamma_k \cos(\gamma_k y) + h_1 \sin(\gamma_k y)}{\sqrt{\gamma_k^{\,2} + h_1^2}} ,$$

$\|v_k\|^2 \equiv \int_0^b v_k^2(y)\, dy = \dfrac{b}{2} + \dfrac{(h_1 + h_2)(\gamma_k^2 + h_1 h_2)}{2(\gamma_k^2 + h_1^2)(\gamma_k^2 + h_2^2)}$ – квадрат норми спектральної функції, $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ – монотонно зростаюча послідовність дійсних різних додатних коренів трансцендентного рівняння

$$ctg(\gamma b) = \frac{\gamma^2 - h_1 h_2}{\gamma (h_1 + h_2)} ,$$

які утворюють дискретний спектр.

Інтегральний оператор Λ_{yk} за правилом (42) внаслідок тотожності (44) початково-крайовій задачі (10)-(12), (41), (14) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D_3'' = \{(t,z)|t>0; z\in I_n^+\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial \widetilde{T}_{jk}}{\partial t} - a_{zj}^2 \frac{\partial^2 \widetilde{T}_{jk}}{\partial z^2} + \left(a_{xj}^2\sigma^2 + a_{yj}^2\gamma_k^2 + \chi_j^2\right)\widetilde{T}_{jk} = \widetilde{F}_{jk}(t,\sigma,z); z\in I_j \quad (45)$$

з початковими умовами

$$\widetilde{T}_{jk}(t,\sigma,z)\Big|_{t=0} = \widetilde{g}_{jk}(\sigma,z); z\in I_j; j=\overline{1,n+1}, \quad (46)$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0\right)\widetilde{T}_{1k}\Bigg|_{z=l_0} = g_{0k}(t,\sigma); \ \frac{\partial^p \widetilde{T}_{n+1,k}}{\partial z^p}\Bigg|_{z=+\infty} = 0, p=0,1 \quad (47)$$

та умовами спряження

$$\begin{cases} \left[\left(R_p\frac{\partial}{\partial z}+1\right)\widetilde{T}_{pk} - \widetilde{T}_{p+1,k}\right]\Bigg|_{z=l_p} = 0, \\ \left(\nu_p\frac{\partial \widetilde{T}_{pk}}{\partial z} - \nu_{p+1}\frac{\partial \widetilde{T}_{p+1,k}}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=l_p} = 0; \ p=\overline{1,n}, \end{cases} \quad (48)$$

де

$$\widetilde{F}_{jk}(t,\sigma,z) = \widetilde{f}_{jk}(t,\sigma,z) + a_{xj}^2 K_x(0,\sigma) g_{jk}^1(t,z) +$$
$$+ a_{yj}^2\nu_k(0)\widetilde{g}_{1j}(t,\sigma,z) + a_{yj}^2\nu_k(b)\widetilde{g}_{2j}(t,\sigma,z); j=\overline{1,n+1}.$$

З точністю до позначень початково-крайова задача на спряження (45)-(48) співпадає із задачею (18)-(21). Побудований методом інтегрального перетворення Фур'є на декартовій півосі $z \ge l_0 \ge 0$ з n точками спряження єдиний обмежений розв'язок задачі (45)-(48) відповідно до формул (34) визначають функції

$$\widetilde{T}_{jk}(t,\sigma,z) = \int_0^t \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \exp\left[-\left(\beta^2 + a_{x1}^2\sigma^2 + a_{y1}^2\gamma_k^2 + \chi_1^2\right)(t-\tau)\right]\times$$
$$\times\left[\widetilde{\widetilde{F}}_k(t,\sigma,\beta) - \sigma_1 a_1^2(\alpha_{11}^0)^{-1}V_1(l_0,\beta)\widetilde{g}_{0k}(\tau,\sigma) + \delta_+(\tau)\widetilde{\widetilde{g}}_k(\sigma,\beta)\right]\times \quad (49)$$
$$\times V_j(z,\beta)\Omega_n(\beta)d\beta d\tau.$$

Застосувавши послідовно до функцій $\widetilde{T}_{jk}(t,\sigma,z)$, визначених формулами (49), обернені оператори Λ_{yk}^{-1} та F_{+x}^{-1}, одержуємо функції

$$T_j(t,x,y,z) = \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^t \int_0^{+\infty} \int_0^b \int_{l_{k-1}}^{l_k} E_{jk}(t-\tau, x, \xi, y, \eta, z, \zeta) \times$$
$$\times \left[f_k(\tau, \xi, \eta, \zeta) + \delta_+(\tau) g_k(\xi, \eta, \zeta) \right] \sigma_k d\xi d\eta d\zeta d\tau +$$
$$+ \int_0^t \int_0^{+\infty} \int_0^b W_j(t-\tau, x, \xi, y, \eta, z) g_0(\tau, \xi, \eta) d\xi d\eta d\tau +$$
$$+ a_{xj}^2 \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^t \int_0^b \int_{l_{k-1}}^{l_k} W_{xjk}(t-\tau, x, y, \eta, z, \zeta) g_k^1(\tau, \xi, \zeta) \sigma_k d\eta d\zeta d\tau + \qquad (50)$$
$$+ a_{yj}^2 \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^t \int_0^{+\infty} \int_{l_{k-1}}^{l_k} \Big[W_{yjk}^1(t-\tau, x, \xi, y, z, \zeta) g_{1k}(\tau, \xi, \zeta) +$$
$$+ W_{yjk}^2(t-\tau, x, \xi, y, z, \zeta) g_{2k}(\tau, \xi, \zeta) \Big] \sigma_k d\xi d\zeta d\tau; \; j = \overline{1, n+1},$$

які описують структуру нестаціонарного температурного поля в розглянутому середовищі.

У формулах (50) застосовано компоненти:
фундаментальної матриці розв'язків

$$E_{jk}(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta) = \frac{2}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \exp\left[-\left(\beta + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 \gamma_r^2 + \chi_1^2 \right) t \right] \times \qquad (51)$$
$$\times V_j(z,\beta) V_k(\zeta,\beta) \Omega_n(\beta) K_x(x,\sigma) K_x(\xi,\sigma) \frac{\nu_r(y) \nu_r(\eta)}{\| \nu_r \|^2} d\sigma d\beta,$$

аплікатної матриці Гріна

$$W_j(t,x,\xi,y,\eta,z) = -\sigma_1 a_1^2 (\alpha_{11}^0)^{-1} E_{j1}(t,x,\xi,y,\eta,z,l_0), \qquad (52)$$

абсцисної матриці Гріна

$$W_{xjk}(t,x,y,\eta,z,\zeta) = E_{jk}(t,x,0,y,\eta,z,\zeta) \qquad (53)$$

лівої ординатної матриці Гріна

$$W_{yjk}^1(t,x,\xi,y,z,\zeta) = E_{jk}(t,x,\xi,y,0,z,\zeta), \qquad (54)$$

правої ординатної матриці Гріна

$$W_{yjk}^2(t,x,\xi,y,z,\zeta) = E_{jk}(t,x,\xi,y,b,z,\zeta) \qquad (55)$$

параболічної початково-крайової задачі (1)-(5), (40).

З використанням властивостей фундаментальних функцій $E_{jk}(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta)$ і функцій Гріна $W_j(t,x,\xi,y,\eta,z)$, $W_{xjk}(t,x,y,\eta,z,\zeta)$, $W_{yjk}^1(t,x,\xi,y,z,\zeta)$, $W_{yjk}^2(t,x,\xi,y,z,\zeta)$ безпосередньо перевіряється, що функції $T_j(t,x,y,z)$, визначені формулами (50), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умові (3), (5), (40) та умови спряження (4) в сенсі теорії узагальнених функцій [18].

Зазначимо, що: 1) зауваження 1-4 поширюються на випадок розглянутої температурної задачі; 2) параметри p, h_j дають можливість виділяти із формул (50) розв'язки початково-крайових задач у випадках задання на поверхнях $x = 0$; $y = 0$, $y = b$ крайових умов 1-го й 2-го роду та їх можливих комбінацій; 3) аналіз розв'язку (50) в залежності від аналітичного вигляду функцій $f_j(t,x,y,z)$, $g_j(x,y,z)$, $g_j^1(t,y,z)$, $g_{1j}(t,x,z)$, $g_{2j}(t,x,z)$ $\left(j=\overline{1,n+1}\right)$ та $g_0(t,x,y)$ проводиться безпосередньо.

Висновки. При найбільш загальних припущеннях в межах феноменологічної теорії теплопровідності побудовано інтегральні зображення точних аналітичних розв'язків математичних моделей (початково-крайових задач) процесів теплопровідності в напівобмежених багатошарових просторових середовищах. Одержані розв'язки носять алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів та даних задачі й можуть бути використані як в теоретичних дослідженнях, так і в інженерних розрахунках.

Список використаних джерел:

1. Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М. Термоупругость тел неоднородной структуры. – М.: Наука, 1984. – 368 с.
2. Сергиенко И. В., Скопецкий В. В., Дейнека В. С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – К.: Наук. думка, 1991. – 432 с.
3. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К.: Наук. думка, 1992. – 280 с.
4. Дейнека В. С., Сергиенко И. В., Скопецкий В. В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. – К.: Наук. думка, 1998. – 614 с.
5. Ленюк М. П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях. – К.: Ін-т математики НАН України, 1997. – 188 с.
6. Конет І. М. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в ортотропних сферичних областях. – К.: Ін-т математики НАН України, 1998. – 209 с.
7. Конет І. М., Ленюк М. П. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в циліндрично-кругових областях. – Чернівці: Прут, 2001. – 312 с.
8. Конет І. М., Ленюк М. П. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях. – Чернівці: Прут, 2004. – 276 с.
9. Громик А. П., Конет І. М. Нестаціонарні задачі теплопровідності в необмежених двоскладових просторових областях // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. праць. – Чернівці: Прут, 2007. – Вип.15. – С.67-82.

10. Громик А. П., Конет І. М. Початково-крайові задачі теплопровідності в необмежених двоскладових просторових областях // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. праць. – Чернівці: Прут, 2008. – Вип. 16. – С.100-118.
11. Конет І. М., Ленюк М. П. Нестаціонарні задачі теплопровідності в необмежених тришарових просторових областях // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. праць. – Чернівці: Прут, 2008. – Вип.16. – С. 118-134.
12. Громик А. П., Конет І. М. Початково-крайові задачі теплопровідності в необмежених тришарових просторових областях // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. праць. – Чернівці: Прут, 2008. – Вип.17. – С.118-134.
13. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 735 с.
14. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 487 с.
15. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. – М.: Мир, 1964. – 5І7 с.
16. Конет І. М. Інтегральні зображення розв'язків нестаціонарних задач теплопровідності в напівобмежених кусково-однорідних просторових середовищах // Вісник Кам'янець-Подільського національного університету. Фізико-математичні науки. – Випуск 1. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет, 2008. – С. 48-56.
17. Ленюк М. П. Интегральные преобразования с разделенными переменными (Фурье, Ханкеля). – К., 1983. – 60 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.4).
18. Шварц Л. Математические методы для физических наук. – М.: Мир, 1965. – 408 с.

The method of fundamental functions and functions of Grin (main decisions) is build the integral images of exact analytical decisions of algorithmic character of variables tasks of theory of heat conductivity in spatial environments. For the construction of main decisions the proper integral transformations of Fourier are attracted for homogeneous environments and transformation of Fourier on Cartesian half of wasp with the *n* points of interface.

Key words: *equalization of heat conductivity, initial and regional conditions, terms of interface, integral transformations, main upshots.*

Отримано: 06.06.2008