3. Ронто Н. И. Об одном методе исследования краевых задач с параметрами / Н. И. Ронто, В. А. Ронто // Краевые задачи математической физики. – К. : Наук. думка, 1990. – С. 3–10.
4. Бойчук А. А. Конструктивне методы анализа краевых задач / А. А. Бойчук. – К. : Наук. думка, 1990. – 96 с.

The question of collocation-iterative method appliance concerning the boundary problem solution for the simple differential equations with parameters is substantiated. The methods algorithm is built, and sufficient conditions for convergence are found here.

Key words: *boundary problem, differential equations, integral equations, collocation-iterative method.*

Отримано: 10.03.2010

УДК 517.5

Н. М. Сорич, канд. фіз.-мат. наук,
В. А. Сорич, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

СУМІСНЕ НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ ФУНКЦІЙ ВИСОКОЇ ГЛАДКОСТІ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИМИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИМИ ПОЛІНОМАМИ В СЕРЕДНЬОМУ

Встановлено асимптотично точну оцінку похибки сумісного наближення класів функцій високої гладкості інтерполяційними тригонометричними поліномами в метриці простору L_1.

Ключові слова: $\bar{\psi}$ *-похідна, L та C-передування пар, інтерполяційний тригонометричний поліном.*

При розв'язанні задач, що виникають при моделюванні фізичних, механічних, економічних та соціальних процесів доводиться будувати чисельні методи відшукання наближених розв'язків деяких експериментальних задач. Якщо співвідношення між параметрами, що характеризують досліджуваний процес, можна подати у вигляді деякої лінійної комбінації ядер типу Пуассона, то результати цієї роботи можна використати при заміні цієї лінійної комбінації на інтерполяційний многочлен, при врахуванні похибки такої заміни, при відшуканні степеня многочлена, що характеризував би потрібну точність.

Нехай L_1 — простір сумовних 2π-періодичних функцій із нормою $\|\varphi\|_L = \|\varphi\|_1 = \int\limits_0^{2\pi} |\varphi(t)|\,dt$. Нехай $L_1^{\bar{\psi}}$ — клас сумовних 2π-періодичних $\bar{\psi}$-інтегровних в сенсі Степанця (див. [1, с. 1069–1113]) функцій, що допускають зображення у вигляді згорток

$$L_1^{\bar{\psi}} = \left\{ f(\bullet) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Psi(\bullet - t)\, g(t)\,dt,\ \|g\|_1 \le 1,\ g \perp C,\ a_0 \in R \right\}$$

з фіксованими ядрами $\Psi(t)$ вигляду

$$\Psi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\psi_1(k)\cos kt + \psi_2(k)\sin kt \right), \tag{1}$$

а підмножину неперервних функцій із класу $L_1^{\bar{\psi}}$ будемо позначати через $C_1^{\bar{\psi}}$, при цьому функцію $g(x)$ називають $\bar{\psi}$-похідною $f(x)$ $\left(f^{\bar{\psi}}(x) = g(x) \right)$.

Нехай, далі, $\bar{\psi} = \left(\psi_1(k);\psi_2(k)\right)$, $\bar{\varphi} = \left(\varphi_1(k);\varphi_2(k)\right)$ — пари довільних послідовностей дійсних чисел. Будемо казати, що пара $\bar{\psi}$ L-передує парі $\bar{\varphi}$, якщо $L^{\bar{\varphi}} \subseteq L^{\bar{\psi}}$ і писати $\bar{\psi} \overset{L}{\le} \bar{\varphi}$. В [2] показано, що при $\bar{\psi}(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)} \ne 0$ і $\varphi(k) = \sqrt{\varphi_1^2(k) + \varphi_2^2(k)} \ne 0, k \in N$, із L-передування $\left(\bar{\psi} \overset{L}{\le} \bar{\varphi} \right)$ випливає, що для довільної функції $f(x) \in L^{\bar{\varphi}}$ існує $f^{\bar{\psi}}(x)$, причому $f^{\bar{\psi}}(x) \in L^{\bar{\eta}}$, де пара $\bar{\eta} = \left(\eta_1(k);\eta_2(k)\right)$ задовольняє умовам

$$\begin{aligned} \eta_1(k) &= \frac{\varphi_1(k)\psi_1(k) + \varphi_2(k)\psi_2(k)}{\bar{\psi}^2(k)}, \\ \eta_2(k) &= \frac{\varphi_2(k)\psi_1(k) - \varphi_1(k)\psi_2(k)}{\bar{\psi}^2(k)}, \end{aligned} \tag{2}$$

крім того, $S\left[\left(f^{\bar{\psi}} \right)^{\bar{\eta}} \right] = S\left[f^{\bar{\varphi}} \right]$. Якщо ж тригонометричний ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\eta_1(k)\cos kt - \eta_2(k)\sin kt \right)$, де послідовності $\eta_1(k)$, $\eta_2(k)$ задовольняють попереднім рівностям, є рядом Фур'є деякої сумовної функції $\mathfrak{D}_\eta(t)$, то $\bar{\psi} \overset{L}{\le} \bar{\varphi}$.

Розглядаючи множини $C_1^{\bar{\psi}}$ та бажаючи досягти неперервності "молодших" похідних введемо поняття C-передування пар $\bar{\varphi}$ та $\bar{\psi}$

таким чином. Будемо писати $\bar{\psi} \overset{C}{\le} \bar{\varphi}$ (пара $\bar{\psi}$ C-передує парі $\bar{\varphi}$), якщо для функції $f(x) \in C^{\bar{\varphi}}$ існує неперервна $\bar{\psi}$ -похідна.

Розглянемо набір пар $\bar{\psi}_i = (\psi_{i,1}(k);\psi_{i,2}(k))$, які C-передують парі $\bar{\psi} = (\psi_1(k);\psi_2(k))$ $(i = \overline{1,m})$, причому для $f(x) \in C_1^{\bar{\psi}}$, де пари $\bar{\eta}_i = (\eta_{i,1}(k);\eta_{i,2}(k))$ підпорядковані умові (2),

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\bar{\eta}_i(k+1)}{\bar{\eta}_i(k)} = 0\,,\ \bar{\eta}_i(k) = \sqrt{\eta_{i,1}^2(k) + \eta_{i,2}^2(k)}\,. \tag{3}$$

Якщо $f(x)$ — довільна 2π-періодична неперервна функція, то через $\tilde{S}_n(f;x)$ позначимо тригонометричний поліном степеня n, що інтерполює $f(x)$ в точках $x_k^{(n)} = \dfrac{2k\pi}{2n+1}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

В даній роботі встановлюється поведінка при $n \to \infty$ величини

$$\tilde{\mathcal{E}}_{n,m}\left(C_1^{\bar{\psi}}\right)_1 = \sup_{f\in C_1^{\bar{\psi}}} \left\| \sum_{i=1}^{m} \psi_i(n+1)\left(f^{\bar{\psi}_i}(x) - \tilde{S}_n\left(f^{\bar{\psi}_i};x\right)\right)\right\|_1 , \tag{4}$$

яка характеризує сумісне наближення $\bar{\psi}_i$ -похідних високої гладкості (оскільки при виконанні умов (3) функції із класів $C_1^{\bar{\eta}_i}$ можна розглядати як звуження на дійсну вісь функцій, регулярних на всій комплексній площині) інтерполяційними многочленами в середньому.

Теорема. Якщо пари $\bar{\psi}_i$ C-передують парі $\bar{\psi}$ і пари $\bar{\eta}_i$ (див. (2)) задовольняють умові (3), то при $n \to \infty$ має місце асимптотична рівність

$$\tilde{\mathcal{E}}_{n,m}\left(C_1^{\bar{\psi}}\right)_1 = \frac{16 M_{n+1}}{\pi^2} + O(1)\bar{\psi}(n+1)\left(\frac{1}{n} + \varepsilon_n\right), \tag{5}$$

де $M_{n+1} = \sqrt{A_{n+1}^2 + B_{n+1}^2}$, $A_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} \bar{\psi}_i(n+1)\eta_{i,1}(n+1)$, $B_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} \bar{\psi}_i(n+1)\eta_{i,2}(n+1)$, $\varepsilon_n = \max_{1\le i\le m} \varepsilon_{n,i}$, $\varepsilon_{n,i} = \sup_{k\ge n} \alpha_{k,i}$, $\alpha_{k,i} = \dfrac{\bar{\eta}_i(k+1)}{\bar{\eta}_i(k)}$, $\bar{\varphi}(n) = \sqrt{\varphi_1^2(n) + \varphi_2^2(n)}$, $\bar{\eta}_i(n) = \sqrt{\eta_{i,1}^2(n) + \eta_{i,2}^2(n)}$, $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по n, ψ, ψ_i .

Доведення. Якщо функція $f(x) \in C_1^{\bar{\psi}}$, то її можна подати у вигляді

$$f(x)=S_n(f;x)+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\psi_1(k)\cos k(t-x)+\psi_2(k)\sin k(t-x)\right)\varphi(t)\,dt,$$

де $S_n(f;x)$ — частинна сума порядку *n* ряду Фур'є функції $f(x)$, а $\varphi(t)\in L_1$.

Нехай $\tilde{S}_n(f;x)$ — інтерполяційний тригонометричний многочлен, який співпадає із функцією $f(x)$ в точках $x_k^{(n)}=\dfrac{2k\pi}{2n+1}$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$, тоді $\tilde{S}_n(f;x)=\dfrac{a_0^{(n)}}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\left(a_k^{(n)}\cos kx+b_k^{(n)}\sin kx\right)$, де

$$a_k^{(n)}=\frac{2}{2n+1}\sum_{i=0}^{2n}f\left(x_i^{(n)}\right)\cos kx_i^{(n)},\quad b_k^{(n)}=\frac{2}{2n+1}\sum_{i=0}^{2n}f\left(x_i^{(n)}\right)\sin kx_i^{(n)}.$$

Як випливає із робіт [3, с.28; 4, с. 213], між коефіцієнтами Фур'є функції $f(x)$ a_k, b_k та інтерполяційного многочлена $\tilde{S}_n(f;x)$ існує зв'язок, що виражається рівностями

$$a_k^{(n)}=a_k+\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(a_{\mu(2n+1)+k}+a_{\mu(2n+1)-k}\right),\ k=\overline{0,n};$$

$$b_k^{(n)}=b_k+\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(b_{\mu(2n+1)+k}-b_{\mu(2n+1)-k}\right),\ k=\overline{1,n}.$$

Тому (див. [5]) можна показати, що

$$\begin{aligned}&f(x)-\tilde{S}_n(f;x)=\\&=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\psi_1(n+1)\cos(n+1)(t-x)+\psi_2(n+1)\sin(n+1)(t-x)\right)\varphi(t)\,dt-\\&-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\psi_1(n+1)\cos((n+1)t+nx)-\psi_2(n+1)\sin((n+1)t+nx)\right)\varphi(t)\,dt+\\&+\rho_{n+2}(f;x),\end{aligned}\tag{6}$$

де $\rho_{n+2}(f;x)=f(x)-S_{n+2}(f;x)$.

Після тотожних перетворень з (6) одержимо, що

$$\begin{aligned}&f(x)-\tilde{S}_n(f;x)=\frac{2}{\pi}\sin\frac{2n+1}{2}x\times\\&\times\int\limits_0^{2\pi}\left(\psi_1(n+1)\sin\left((n+1)t-\frac{x}{2}\right)+\psi_2(n+1)\cos\left((n+1)t-\frac{x}{2}\right)\right)\varphi(t)\,dt+\\&+\rho_{n+2}(f;x).\end{aligned}\tag{7}$$

Якщо функція $f(x)$ вибрана із класу $C_1^{\bar{\psi}}$, а пари $\bar{\psi}_i$ L-передують парі $\bar{\psi}$, то $f^{\bar{\psi}_i} \in C_1^{\bar{\eta}_i}$, де послідовності пари $\bar{\eta}_i$ задовольняють рівностям (2), тому згідно (7) матимемо

$$f^{\bar{\psi}_i}(x) - \tilde{S}_n\left(f^{\bar{\psi}_i};x\right) = \frac{2}{\pi}\sin\frac{2n+1}{2}x\int_0^{2\pi}\left(\eta_{i,1}(n+1)\sin\left((n+1)t-\frac{x}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+\eta_{i,2}(n+1)\cos\left((n+1)t-\frac{x}{2}\right)\right)\varphi(t)\,dt + \rho_{n+2}\left(f^{\bar{\psi}_i};x\right),$$

звідки

$$\sum_{i=1}^{m}\bar{\psi}_i(n+1)\left(f^{\bar{\psi}_i}(x) - \tilde{S}_n\left(f^{\bar{\psi}_i};x\right)\right) =$$
$$= \frac{2}{\pi}\sin\frac{2n+1}{2}x\int_0^{2\pi}\left[\sum_{i=1}^{m}\bar{\psi}_i(n+1)\eta_{i,1}(n+1)\sin\left((n+1)t-\frac{x}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+\sum_{i=1}^{m}\bar{\psi}_i(n+1)\eta_{i,2}(n+1)\cos\left((n+1)t-\frac{x}{2}\right)\right]\varphi(t)\,dt + \qquad (8)$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\bar{\psi}_i(n+1)\rho_{n+2}\left(f^{\bar{\psi}_i};x\right).$$

Нехай $A_{n+1} = \sum_{i=1}^{m}\bar{\psi}_i(n+1)\eta_{i,1}(n+1)$, $B_{n+1} = \sum_{i=1}^{m}\bar{\psi}_i(n+1)\eta_{i,2}(n+1)$, $\operatorname{tg}\theta_n = \frac{B_{n+1}}{A_{n+1}}$, тоді

$$\int_0^{2\pi}\left[\sum_{i=1}^{m}\bar{\psi}_i(n+1)\eta_{i,1}(n+1)\sin\left((n+1)t-\frac{x}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+\sum_{i=1}^{m}\bar{\psi}_i(n+1)\eta_{i,2}(n+1)\cos\left((n+1)t-\frac{x}{2}\right)\right]\varphi(t)\,dt =$$
$$= \int_0^{2\pi}\left[\sum_{i=1}^{m}A_{n+1}\sin\left((n+1)t-\frac{x}{2}\right)+\sum_{i=1}^{m}B_{n+1}\cos\left((n+1)t-\frac{x}{2}\right)\right]\varphi(t)\,dt = \qquad (9)$$
$$= M_{n+1}\int_0^{2\pi}\sin\left((n+1)t-\frac{x}{2}+\theta_n\right)\varphi(t)\,dt,$$

де $M_{n+1} = \sqrt{A_{n+1}^2 + B_{n+1}^2}$.

В силу властивості норми

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} \bar{\psi}_i (n+1) \rho_{n+2} \left(f^{\bar{\psi}_i}; x \right) \right\|_1 \le \sum_{i=1}^{m} \bar{\psi}_i (n+1) \left\| \rho_{n+2} \left(f^{\bar{\psi}_i}; x \right) \right\|_1 . \qquad (10)$$

Оскільки $f^{\bar{\psi}_i} \in C_1^{\bar{\eta}_i}$, то, очевидно, що

$$\left\| \rho_{n+2} \left(f^{\bar{\psi}_i}; x \right) \right\|_1 \le 4 \sum_{k=n+2}^{\infty} \bar{\eta}_i (k). \qquad (11)$$

Із (10)-(11) випливає

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} \bar{\psi}_i (n+1) \rho_{n+2} \left(f^{\bar{\psi}_i}; x \right) \right\|_1 \le 4 \sum_{i=1}^{m} \bar{\psi}_i (n+1) \sum_{k=n+2}^{\infty} \eta_i (k). \qquad (12)$$

За умовою (3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\bar{\eta}_i (n+1)}{\bar{\eta}_i (n)} = 0$, тому $\bar{\eta}_i (n+1) = \alpha_{n,i} \bar{\eta}_i (n)$, де $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_{n,i} = 0,\ i = \overline{1,m}$. Нехай $\varepsilon_{n,i} = \sup\limits_{k \ge n} \alpha_{k,i}$, тоді додатні послідовності $\varepsilon_{n,i}$ спадні до нуля і $\varepsilon_{n,i} \ge \alpha_{n,i},\ n \in N$, а також $\bar{\eta}_i (n+1) \le \varepsilon_{n,i} \bar{\eta}_i (n)$. Можна показати, що $\bar{\eta}_i (n+k) \le \varepsilon_{n,i}^k \bar{\eta}_i (n),\ n, k \in N$. Тоді

$$\sum_{k=n+2}^{\infty} \bar{\eta}_i (k) = \sum_{k=2}^{\infty} \bar{\eta}_i (n+k) \le \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon_{n,i}^{k-1} \bar{\eta}_i (n+1) = \frac{\bar{\eta}_i (n+1) \varepsilon_{n,i}}{1 - \varepsilon_{n,i}} \le \varepsilon_{n,i} \bar{\eta}_i (n+1).$$

Оскільки (див [2]) $\bar{\psi}_i (n+1) \bar{\eta}_i (n+1) = \bar{\psi} (n+1)$, то

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} \bar{\psi}_i (n+1) \sum_{k=n+2}^{\infty} \bar{\eta}_i (k) &\le \sum_{i=1}^{m} \bar{\psi}_i (n+1) \bar{\eta}_i (n+1) \varepsilon_{n,i} = \\ &= \bar{\psi} (n+1) \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_{n,i} = O(1) \bar{\psi} (n+1) \varepsilon_n, \end{aligned} \qquad (13)$$

де $\varepsilon_n = \max\limits_{1 \le i \le m} \varepsilon_{n,i}$.

Із співвідношень (8)-(13) випливає

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} \bar{\psi}_i (n+1) \left(f^{\bar{\psi}_i} (x) - \tilde{S}_n \left(f^{\bar{\psi}_i}; x \right) \right) &= M_{n+1} \frac{2}{\pi} \sin \frac{2n+1}{2} x \times \\ \times \int_0^{2\pi} \sin \left((n+1) t - \frac{x}{2} + \theta_n \right) \varphi (t)\, dt &+ O(1) \bar{\psi} (n+1) \varepsilon_n, \end{aligned} \qquad (14)$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по x, n, f.

Нехай $K_n = \sup\limits_{\substack{\|\varphi\|_1 \le 1 \\ \varphi \perp 1}} \left\| \dfrac{2}{\pi} \sin \dfrac{2n+1}{2} x \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin \left((n+1) t - \frac{x}{2} + \theta_n \right) \varphi (t)\, dt \right\|_1$.

Знайдемо далі асимптотичну точну оцінку величини K_n при $n \to \infty$. Для цього скористаємося роботою С. М. Нікольського ([6], §2).

Нехай L_∞ — простір 2π-періодичних вимірних і суттєво обмежених функцій $g(t)$: $\|g\|_\infty = \operatorname{esssup}_t |g(t)|$, тоді

$$K_n = \frac{2}{\pi} \sup_{\substack{\|\varphi\|_1 \le 1 \\ \varphi \perp 1}} \sup_{\|g\|_\infty \le 1} \int_0^{2\pi} g(x) \int_0^{2\pi} \sin \frac{2n+1}{2} x \sin\left((n+1)t - \frac{x}{2} + \theta_n \right) \times$$

$$\times \varphi(t)\, dtdx = \frac{2}{\pi} \sup_{\|g\|_\infty \le 1} \sup_{\substack{\|\varphi\|_1 \le 1 \\ \varphi \perp 1}} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \int_0^{2\pi} \sin \frac{2n+1}{2} x \times \tag{15}$$

$$\times \sin\left((n+1)t - \frac{x}{2} + \theta_n \right) g(x)\, dxdt .$$

Нам необхідне таке твердження ([3, с. 214]).

Лема. Нехай $f(x)$ — неперервна на $[a;b]$ функція, тоді

$$\sup_{\substack{\|\varphi\|_{[a;b]} \le 1 \\ \varphi \perp 1}} \int_a^b f(t)\varphi(t)\, dt = \frac{1}{2}\left\{ \max_t f(t) - \min_t f(t) \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \max_{t_1, t_2 \in [a;b]} \left\{ f(t_1) - f(t_2) \right\} .$$

Із наведеної леми, а також рівностей (15) випливає

$$K_n = \frac{2}{\pi} \sup_{\|g\|_\infty \le 1} \left\{ \frac{1}{2} \max_{t_1, t_2} \int_0^{2\pi} \sin \frac{2n+1}{2} x \left[\sin\left((n+1)t_1 - \frac{x}{2} + \theta_n \right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sin\left((n+1)t_2 - \frac{x}{2} + \theta_n \right) \right] g(t)\, dx \right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \max_{t_1, t_2} \int_0^{2\pi} \left| \sin \frac{2n+1}{2} x \left[\sin\left((n+1)t_1 - \frac{x}{2} + \theta_n \right) - \sin\left((n+1)t_2 - \frac{x}{2} + \theta_n \right) dx \right] \right| =$$

$$= \frac{2}{\pi} \max_{t_1, t_2} \int_0^{2\pi} \left| \sin \frac{2n+1}{2} x \cos\left((n+1)\frac{t_1 + t_2}{2} - \frac{x}{2} + \theta_n \right) \sin (n+1) \frac{t_1 - t_2}{2} \right| dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \max_{0 \le \beta \le \frac{2\pi}{2n+1}} \int_0^{2\pi} \left| \sin \frac{2n+1}{2} x \sin \frac{x - \beta}{2} \right| dx . \tag{16}$$

Оскільки для кожного $\beta \in \left[0;\dfrac{2\pi}{2n+1}\right]$

$$\left|\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\right|\left(\sin\frac{x}{2}-\left|\sin\frac{x-\theta}{2}\right|\right)dx\right| \le \frac{\pi}{2n+1}\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\right|dx =$$

$$=\frac{4\pi}{2n+1}=O(1)\frac{1}{n},$$

то $$\max_{0\le\beta\le\frac{2\pi}{2n+1}}\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\sin\frac{x-\theta}{2}\right|dx=\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\right|\sin\frac{x}{2}dx+\frac{O(1)}{n}. \quad (17)$$

Тоді з урахуванням (16) і (17) будемо мати

$$K_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\right|\sin\frac{x}{2}dx+\frac{O(1)}{n}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\int_{x_k^{(n)}}^{x_{k+1}^{(n)}}\left(\cos nx-\cos(n+1)x\right)dx+\frac{O(1)}{n}=$$

$$=\frac{1}{n\pi}\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\left(\sin\frac{(2k+2)n\pi}{2n+1}-\sin\frac{2kn\pi}{2n+1}\right)-$$

$$-\frac{1}{(n+1)\pi}\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\left(\sin\frac{(2k+2)(n+1)\pi}{2n+1}-\sin\frac{2k(n+1)\pi}{2n+1}\right)+\frac{O(1)}{n}=$$

$$=\frac{1}{n\pi}\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\left(\sin\left((k+1)\pi-\frac{(k+1)\pi}{2n+1}\right)-\sin\left(k\pi-\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)-$$

$$-\frac{1}{(n+1)\pi}\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\left(\sin\left((k+1)\pi+\frac{(k+1)\pi}{2n+1}\right)-\sin\left(k\pi+\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)+$$

$$+\frac{O(1)}{n}=\frac{2n+1}{\pi n(n+1)}\sum_{k=0}^{2n}\left(\sin\frac{(k+1)\pi}{2n+1}+\sin\frac{k\pi}{2n+1}\right)+\frac{O(1)}{n}. \quad (18)$$

Оскільки величина $\sigma_n=\sum_{k=0}^{2n}\dfrac{2\pi}{2n+1}\sin\dfrac{k\pi}{2n+1}$ є інтегральною сумою функції $\sin\dfrac{x}{2}$ для поділу $\tau=\left\{x_k^{(n)}\right\}_{k=0}^{2n+1}$ проміжку $[0;2\pi]$ і вибору точок $c_k=x_k^{(n)}$, а також $\left|\int_0^{2\pi}\sin\dfrac{x}{2}dx-\sigma_n\right|=|4-\sigma_n|=\dfrac{O(1)}{n}$, то на основі (18) можемо записати оцінку

$$K_n = \frac{16}{\pi^2} + \frac{O(1)}{n}. \tag{19}$$

Враховуючи (14) і (19), одержимо

$$\tilde{\mathcal{E}}_{n,m}\left(C_1^{\bar\psi}\right)_1 = K_n M_{n+1} + O(1)\bar\psi(n+1)\varepsilon_n = \frac{16}{\pi^2}M_{n+1} + \\ +O(1)\frac{M_{n+1}}{n} + O(1)\bar\psi(n+1)\varepsilon_n. \tag{20}$$

Для доведення теореми залишилось показати, що

$$M_{n+1} = O(1)\bar\psi(n+1). \tag{21}$$

Оскільки $\eta_{i,1}(n+1) \le \bar\eta_i(n+1) = \sqrt{\eta_{i,1}^2(n+1) + \eta_{i,2}^2(n+1)}$, то $\eta_{i,1}(n+1)\times \times\bar\psi_i(n+1) \le \bar\eta_i(n+1)\bar\psi_i(n+1) = \bar\psi(n+1)$, тому $0 \le A_{n+1} \le m\bar\psi(n+1)$.

Аналогічно і $0 \le B_{n+1} \le m\bar\psi(n+1)$, звідки випливає справедливість (21). А тепер, враховуючи (20) та (21), будемо мати, що при $n \to \infty$ справедлива асимптотична рівність

$$\tilde{\mathcal{E}}_{n,m}\left(C_1^{\bar\psi}\right)_1 = \frac{16M_{n+1}}{\pi^2} + O(1)\bar\psi(n+1)\left(\frac{1}{n} + \varepsilon_n\right).$$

Теорему доведено.

Зауваження 1. Якщо пари $\bar\psi_i = \left(\psi_{i,1}(n);\psi_{i,2}(n)\right)$ C-передують парі $\bar\psi = \left(\psi_1(n);\psi_2(n)\right)$, то для величини M_{n+1} справедлива при кожному $n \in N$ оцінка

$$0 \le M_{n+1} \le m\bar\psi(n+1). \tag{22}$$

Дійсно, при $\forall n \in N$

$$M_{n+1}^2 = \left(\sum_{i=1}^m \bar\psi_i(n+1)\eta_{i,1}(n+1)\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^m \bar\psi_i(n+1)\eta_{i,2}(n+1)\right)^2 =$$

$$= \sum_{1\le i,j\le m} \bar\psi_i^2(n+1)\bar\psi_j^2(n+1)\Big(\eta_{i,1}(n+1)\eta_{j,1}(n+1) + \eta_{i,2}(n+1)\eta_{j,2}(n+1)\Big).$$

Із очевидної нерівності $ab + cd \le \sqrt{a^2 + c^2}\cdot\sqrt{b^2 + d^2}$ випливає, що

$$\eta_{i,1}(n+1)\eta_{j,1}(n+1) + \eta_{i,2}(n+1)\eta_{j,2}(n+1) \le$$

$$\le \sqrt{\eta_{i,1}^2(n+1) + \eta_{i,2}^2(n+1)}\cdot\sqrt{\eta_{j,1}^2(n+1) + \eta_{j,2}^2(n+1)} = \bar\eta_i(n+1)\bar\eta_j(n+1),$$

тому $M_{n+1}^2 \le \sum\limits_{1\le i,j\le m} \bar\psi_i(n+1)\bar\psi_j(n+1)\bar\eta_i(n+1)\bar\eta_j(n+1)$.

Оскільки $\bar\psi_i(n+1)\bar\eta_i(n+1) = \bar\psi(n+1)$, $i = \overline{1,m}$, то

$$M_{n+1}^2 \le \sum_{1\le i,j\le m} \overline{\psi}^2\left(n+1\right) = m^2\overline{\psi}^2\left(n+1\right),$$

звідки й випливає справедливість (22).

Тобто з (22) випливає наступна асимптотична оцінка при $n\to\infty$

$$\tilde{\mathcal{E}}_{n,m}\left(C_1^{\overline{\psi}}\right)_1 \le \frac{16m}{\pi^2}\psi\left(n+1\right) + O(1)\psi\left(n+1\right)\left(\frac{1}{n}+\varepsilon_n\right), \qquad (23)$$

яку можна отримати ще і як наслідок результату роботи [5] та оцінки

$$\tilde{\mathcal{E}}_{n,m}\left(C_1^{\overline{\psi}}\right)_1 \le \sum_{i=1}^{m}\overline{\psi}_i\left(n+1\right)\sup_{f\in C_1^{\overline{\psi}}}\left\| f^{\overline{\psi}_i}\left(x\right) - \tilde{S}_n\left(f^{\overline{\psi}_i};x\right)\right\|_1 .$$

Зауваження 2. Існують випадки, коли нерівність в (23) є строгою.

Нехай $m=2$, $\overline{\psi}=\left(e^{-\alpha n^r};0\right)$, $\overline{\psi}_1=\left(e^{-\beta n^r};0\right)$, $\overline{\psi}_2=\left(0;e^{-\gamma n^r}\right)$, де $\alpha>\beta>0$, $\alpha>\gamma>0$, $r>1$. Тоді пари $\overline{\psi}_1$ та $\overline{\psi}_2$ C-передують парі $\overline{\psi}$ і $\overline{\eta}_1=\left(e^{-(\alpha-\beta)n^r};0\right)$, $\overline{\eta}_2=\left(0;-e^{-(\alpha-\gamma)n^r}\right)$, звідки

$$A_{n+1} = \sum_{i=1}^{2}\psi_i\left(n+1\right)\eta_{i,1}\left(n+1\right) = e^{-\alpha(n+1)^r},$$

$$B_{n+1} = \sum_{i=1}^{2}\psi_i\left(n+1\right)\eta_{i,2}\left(n+1\right) = -e^{-\alpha(n+1)^r}.$$

Крім того, пари $\overline{\eta}_1$ та $\overline{\eta}_2$ задовольняють рівність (3), тому виконуються всі умови теореми. Маємо

$$M_{n+1}^2 = \sqrt{e^{-2\alpha(n+1)^r}+e^{-2\alpha(n+1)^r}} = \sqrt{2}e^{-\alpha(n+1)^r} < 2e^{-\alpha(n+1)^r},$$

звідки випливає справедливість зауваження 2.

Зауваження 3. Для випадку $m=1$, тобто наближення функції із класів високої гладкості, асимптотично точні оцінки наближень інтерполяційними многочленами $\tilde{S}_n\left(f;x\right)$ в метриці L отримано в [5].

Список використаних джерел:

1. Степанец А. И. Скорость сходимости рядов Фурье на классах $\overline{\psi}$-интегралов / А. И. Степанец // Укр. мат. журн. — 1997. — 49, №8. — С. 1069–1113.
2. Сорич В. А. Умови L-передування $\overline{\psi}$-похідних / В. А. Сорич, Н. М. Сорич, А. В. Сорич // Наукові праці Кам’янець-Подільського державного університету : зб. за підсумками звітної наукової конференції викладачів і аспірантів, присвяченої 85-й річниці Української національно-демократичної революції, 15-16 квітня 2002 року. В 2-х томах. — Кам’янець-По-

дільський : Кам'янець-Подільський державний університет, 2002. — Т. 2. — С. 6–9.
3. Зигмунд А. Тригонометрические ряды : в 2-х т. / А. Зигмунд. — М. : Мир, 1965. — Т. 2. — 537 с.
4. Никольский С. М. Оценки остатка суммы Фейера для периодических функций, имеющих ограниченную производную / С. М. Никольский // Докл. АН СССР. — 1941. — 31, №3. — С. 210–214.
5. Сердюк А. С. Наближення періодичних функцій високої гладкості інтерполяційними тригонометричними поліномами в метриці L_1 / А. С. Сердюк // Укр. мат. журн. — 2000. — 52, №7. — С. 994–998.
6. Никольский С. М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем / С. М. Никольский // Изв. АН СССР. Математика. — 1946. — 10, №3. — С. 207–256.

The asymptotically precise estimation of the joint approximation error of classes of functions with high smoothness by interpolation trigonometric polynomials in the δ-metric has been established.

Key words: $\bar{\psi}$ *-derivative, L and C precedence of pairs, the interpolation trigonometric polynomial.*

Отримано: 13.02.2010

УДК 517.929

І. М. Черевко, д-р фіз.-мат. наук,
О. В. Матвій, канд. фіз.-мат. наук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

МОДЕЛЮВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

Досліджена крайова задача із запізненням. Встановлено умови розв'язності крайової задачі із запізненням і досліджено її апроксимацію за допомогою систем звичайних диференціальних рівнянь.

Ключові слова: *диференціально-різницеві рівняння, запізнення, крайова задача із запізненням, апроксимація.*

Вступ. У роботі досліджуються алгоритми наближеного розв'язання крайових задач для диференціальних рівнянь другого порядку із запізненням. Такі задачі виникають при дослідженні варіаційних задач, у теорії пружності, в задачах оптимального керування та ін.

Розв'язання крайових задач із запізненням аналітично можливе тільки в найпростіших випадках, тому побудова та обґрунтування наближених методів їх розв'язання є важливою задачею. Зведення лінійної крайової задачі із запізненням до інтегрального рівняння і застосу-