УДК 517.91:532.2

М. П. Ленюк, д-р фіз.-мат. наук

Національний технічний університет „ХПІ”, м. Харків

ГІБРИДНЕ ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ ЕЙЛЕРА-БЕССЕЛЯ-ФУР'Є НА ПОЛЯРНІЙ ОСІ $r \geq R_0 > 0$

Методом дельта-подібної послідовності (ядро Діріхле) запроваджено інтегральне перетворення, породжене на полярній осі $r \geq R_0 > 0$ з двома точками спряження гібридним диференціальним оператором Ейлера-Бесселя-Фур'є.

Ключові слова: *гібридний диференціальний оператор, гібридне інтегральне перетворення, дельта-подібна послідовність, фундаментальна система розв'язків, спектральна вектор-функція, інтегральне зображення, основна тотожність.*

Вступ. Вивчення фізико-технічних характеристик композитних матеріалів, які знаходяться в різних умовах експлуатації, математично приводить до задачі інтегрування сепаратної системи диференціальних рівнянь другого порядку на кусково-однорідному інтервалі. Одним із ефективних методів побудови інтегрального зображення розв'язку таких задач є метод гібридних інтегральних перетворень, започаткованих в роботі Я. С. Уфлянда [1]. Основні положення теорії гібридних інтегральних перетворень закладено в роботі [2]. Ця стаття присвячена запровадженню одного з типів гібридних інтегральних перетворень (ГІП).

Основна частина. Запровадимо методом дельта-подібної послідовності інтегральне перетворення, породжене на множині $I_2^+ = \{r : r \in (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, \infty);\ R_0 > 0\}$ гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$\mathcal{M}_{\nu,(\alpha)} = \theta(r-R_0)\theta(R_1-r)a_1^2 B_{\alpha_1}^* + \\ +\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)a_2^2 B_{\nu,\alpha_2} + \theta(r-R_2)a_3^2 \frac{d^2}{dr^2}, \qquad (1)$$

де $\theta(x)$ — одинична функція Гевісайда [3], $(\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2)$.

У рівності (1) $\alpha_j > 0$, $B_{\alpha_1}^*$ — диференціальний оператор Ейлера [4], а B_{ν,α_2} — диференціальний оператор Бесселя [5]:

$$B_{\alpha_1}^* = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha_1 + 1) r \frac{d}{dr} + \alpha_1^2, \ B_{\nu,\alpha_2} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2\alpha_2 + 1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{\nu^2 - \alpha_2^2}{r^2},$$

$$2\alpha_j + 1 > 0, \ \nu \geq \alpha_2 .$$

Означення. *Областю визначення ГДО $\mathcal{M}_{\nu,(\alpha)}$ назвемо множину G вектор-функцій $g(r)=\{g_1(r);\, g_2(r);\, g_3(r)\}$ з такими властивостями:*

1) вектор-функція $f(r)=\left\{B^*_{\alpha_1}[g_1(r)];\, B_{\nu,\alpha_2}[g_2(r)];\, g_3''(r)\right\}$ неперервна на множині I_2^+;

2) функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$\left.\left(\alpha_{11}^0\frac{d}{dr}+\beta_{11}^0\right)g_1(r)\right|_{r=R_0}=0,\ \lim_{r\to\infty}[r^{\gamma}g_3(r)]=0; \tag{2}$$

3) функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження

$$\left.\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^k\right)g_k(r)-\left(\alpha_{j2}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^k\right)g_{k+1}(r)\right]\right|_{r=R_k}=0,\ j,k=1,2\,. \tag{3}$$

Вважаємо виконаними умови на коефіцієнти: $\alpha_{11}^0\le 0$, $\beta_{11}^0\ge 0$, $\left|\alpha_{11}^0\right|+\beta_{11}^0\ne 0$, $\alpha_{jm}^k\ge 0$, $\beta_{jm}^k\ge 0$, $c_{jk}=\alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k-\alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k$, $c_{1k}\cdot c_{2k}>0$.

Для елементів $u(r)\in G$ та $v(r)\in G$ випливає із умов спряження (3) базова тотожність:

$$\left.\left(u_j(r)\frac{dv_j}{dr}-v_j(r)\frac{du_j}{dr}\right)\right|_{r=R_j}=\frac{c_{2j}}{c_{1j}}\left.\left(u_{j+1}(r)\frac{dv_{j+1}}{dr}-v_{j+1}(r)\frac{du_{j+1}}{dr}\right)\right|_{r=R_j},\ j=1,2. \tag{4}$$

Визначимо вагову функцію $\sigma(r)=\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}\theta(r-R_0)\theta(R_1-r)+$ $+\sigma_2 r^{2\alpha_2-1}\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)+\sigma_3\theta(r-R_2)$, де $\sigma_1=\dfrac{c_{11}c_{12}}{c_{21}c_{22}}\dfrac{R_1^{2(\alpha_2-\alpha_1)}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\dfrac{1}{a_2^2}$, $\sigma_2=\dfrac{c_{12}}{c_{22}}\dfrac{a_2^{-2}}{R_2^{2\alpha_2+1}}$, $\sigma_3=\dfrac{1}{a_3^2}$, та скалярний добуток

$$(u(r),v(r))=\int_{R_0}^{\infty}u(r)v(r)\sigma(r)dr\equiv\int_{R_0}^{R_1}u_1(r)v_1(r)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr+$$

$$+\int_{R_1}^{R_2}u_2(r)v_2(r)\sigma_2 r^{2\alpha_2+1}dr+\int_{R_2}^{\infty}u_3(r)v_3(r)\sigma_3 dr\,. \tag{5}$$

На підставі крайових умов (2) та базової тотожності (4) встановлюємо рівність

$$\left(\mathcal{M}_{\nu,(\alpha)}\left[u\right], v\right) = \left(u, \mathcal{M}_{\nu,(\alpha)}\left[v\right]\right). \tag{6}$$

Рівність (6) показує, що ГДО $\mathcal{M}_{\nu,(\alpha)}$ самоспряжений. Отже, його спектр дійсний [6]. Оскільки ГДО $\mathcal{M}_{\nu,(\alpha)}$ має одну особливу точку, то його спектр неперервний [2]. Можна вважати, що спектральний параметр $\beta \in (0,\infty)$. Йому відповідає дійсна спектральна вектор-функція

$$V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta) = \theta(r-R_0)\theta(R_1-r) + V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta) + \theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\times$$
$$\times V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)\theta(r-R_2)V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta). \tag{7}$$

При цьому функції $V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)$ повинні бути розв'язком відповідно диференціальних рівнянь

$$\left(B^*_{\alpha_1} + b_1^2\right)V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta) = 0,\ r\in(R_0,R_1),$$
$$\left(B_{\nu,\alpha_2} + b_2^2\right)V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta) = 0,\ r\in(R_1,R_2), \tag{8}$$
$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + b_3^2\right)V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta) = 0,\ r\in(R_2,\infty)$$

з крайовими умовами (2) та умовами спряження (3), $b_j \equiv b_j(\beta) = \left(\beta^2 + k_j^2\right)^{1/2}$, $k_j^2 \ge 0$, $j=\overline{1,3}$.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $\left(B^*_{\alpha_1} + b_1^2\right)v = 0$ утворюють функції $v_1 = r^{-\alpha_1}\cos(b_1 \ln r)$ та $v_2 = r^{-\alpha_1}\sin(b_1 \ln r)$ [4]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя $\left(B_{\nu,\alpha_2} + b_2^2\right)v = 0$ утворюють функції $v_1 = J_{\nu,\alpha_2}(b_2 r)$ та $v_2 = N_{\nu,\alpha_2}(b_2 r)$ [5]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $\left(\frac{d^2}{dr^2} + b_3^2\right)v = 0$ утворюють функції $v_1 = \cos b_3 r$ та $v_2 = \cos b_3 r$ [4].

Якщо покласти

$$V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta) = A_1 r^{-\alpha_1}\cos(b_1 \ln r) + B_1 r^{-\alpha_1}\sin(b_1 \ln r),$$
$$V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta) = A_2 J_{\nu,\alpha_2}(b_2 r) + B_2 N_{\nu,\alpha_2}(b_2 r), \tag{9}$$
$$V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta) = A_3 \cos b_3 r + B_3 \sin b_3 r$$

то крайова умова в точці $r=R_0$ та умови спряження (3) для визначення величин A_j, B_j дають алгебраїчну систему з п'яти рівнянь:

$$Y^{01}_{\alpha_1;11}(b_1,R_0)A_1+Y^{02}_{\alpha_1;11}(b_1,R_0)B_1=0\,,$$
$$Y^{11}_{\alpha_1;j1}(b_1,R_1)A_1+Y^{12}_{\alpha_1;j1}(b_1,R_1)B_1-u^{11}_{\nu,\alpha_2;j2}(b_2R_1)A_2-u^{12}_{\nu,\alpha_2;j2}(b_2R_1)B_2=0\,,$$
$$u^{21}_{\nu,\alpha_2;j1}(b_2R_2)A_2+u^{22}_{\nu,\alpha_2;j1}(b_2R_2)-v^{21}_{j2}(b_3R_2)A_3-v^{22}_{j2}(b_3R_2)B_3=0\,,j=1,2. \qquad (10)$$

У системі (10) беруть участь функції:

$$Y^{m1}_{\alpha_1;jk}(b_s,R_m)=[(\beta^m_{jk}-\alpha_1R_m^{-1}\alpha^m_{jk})\cos(b_s\ln R_m)-$$
$$-b_sR_m^{-1}\alpha^m_{jk}\sin(b_s\ln R_m)]R_m^{-\alpha_1}\,,$$
$$Y^{m2}_{\alpha_1;jk}(b_s,R_m)=[(\beta^m_{jk}-\alpha_1R_m^{-1}\alpha^m_{jk})\sin(b_s\ln R_m)+$$
$$+b_sR_m^{-1}\alpha^m_{jk}\cos(b_s\ln R_m)]R_m^{-\alpha_1}\,,$$
$$u^{m1}_{\nu,\alpha_2;jk}(b_sR_m)=$$
$$=\left(\alpha^m_{jk}\frac{\nu-\alpha_2}{R_m}+\beta^m_{jk}\right)J_{\nu,\alpha_2}(b_sR_m)-\alpha^m_{jk}b_s^2R_mJ_{\nu+1,\alpha_2+1}(b_sR_m),$$
$$u^{m2}_{\nu,\alpha_2;jk}(b_sR_m)=$$
$$=\left(\alpha^m_{jk}\frac{\nu-\alpha_2}{R_m}+\beta^m_{jk}\right)N_{\nu,\alpha_2}(b_sR_m)-\alpha^m_{jk}b_s^2R_mN_{\nu+1,\alpha_2+1}(b_sR_m),$$
$$v^{m1}_{jk}(b_sR_m)=-\alpha^m_{jk}b_s\sin b_sR_m+\beta^m_{jk}\cos b_sR_m\,,$$
$$v^{m2}_{jk}(b_sR_m)=\alpha^m_{jk}b_s\cos b_sR_m+\beta^m_{jk}\sin b_sR_m\,.$$

Візьмемо $A_1=A_0Y^{02}_{\alpha_1;11}(b_1,R_0)$, $B_1=-A_0Y^{01}_{\alpha_1;11}(b_1,R_0)$, де A_0 підлягає визначенню. Перше рівняння системи (10) стає тотожністю, а інші утворюють дві алгебраїчні системи по два рівняння в кожній.

У результаті послідовного розв'язання утворених систем й підстановки одержаних A_j, B_j у рівності (9) маємо функції

$$V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)=\frac{2}{\pi}\frac{c_{21}c_{22}b_3}{b_2^{2\alpha_2}R_1^{2\alpha_2+1}}\Big[Y^{02}_{\alpha_1;11}(b_1,R_0)r^{-\alpha_1}\cos(b_1\ln r)-$$
$$Y^{01}_{\alpha_1;11}(b_1,R_0)r^{-\alpha_1}\sin(b_1\ln r)\Big],$$
$$V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)=c_{22}b_3\Big[\delta_{\alpha_1;11}(\beta)\Psi^1_{\nu,\alpha_2;22}(b_2R_1,b_2r)- \qquad (11)$$
$$\delta_{\alpha_1;21}(\beta)\Psi^1_{\nu,\alpha_2;12}(b_2R_1,b_2r)\Big],$$
$$V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)=\omega_{\nu,(\alpha);2}(\beta)\cos b_3r-\omega_{\nu,(\alpha);1}(\beta)\sin b_3r$$

У рівностях (11) прийняті позначення:

$$\delta_{\alpha_1;j}(\beta)=Y^{01}_{\alpha_1;11}(b_1,R_0)Y^{12}_{\alpha_1;j1}(b_1,R_1)-Y^{02}_{\alpha_1;11}(b_1,R_0)Y^{11}_{\alpha_1;j1}(b_1,R_1),$$

$$\delta_{\nu,\alpha_2;jk}(\beta)=u^{11}_{\nu,\alpha_2;j2}(b_2R_1)u^{22}_{\nu,\alpha_2;k1}(b_2R_2)-u^{12}_{\nu,\alpha_2;j2}(b_2R_1)u^{21}_{\nu,\alpha_2;k1}(b_2R_2),$$

$$j,k=1,2,$$

$$a_{\nu,(\alpha);j}(\beta)=\delta_{\alpha_1;1}(\beta)\delta_{\nu,\alpha_2;2j}(\beta)-\delta_{\alpha_1;2}(\beta)\delta_{\nu,\alpha_2;1j}(\beta),$$

$$\omega_{\nu,(\alpha);j}(\beta)=a_{\nu,(\alpha);1}(\beta)v^{2j}_{22}(b_3R_2)-a_{\nu,(\alpha);2}(\beta)v^{2j}_{12}(b_3R_2),\ (\alpha)=(\alpha_1,\ \alpha_2).$$

Наявність спектральної функції $V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)$, вагової функції $\sigma(r)$ та спектральної густини

$$\Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta)=\beta[b_3(\beta)]^{-1}([\omega_{\nu,(\alpha);1}(\beta)]^2+[\omega_{\nu,(\alpha);2}(\beta)]^2)^{-1}$$

дозволяє визначити пряме $H_{\nu,(\alpha)}$ та обернене $H^{-1}_{\nu,(\alpha)}$ гібридне інтегральне перетворення (ГІП), породжене на множині I_2^+ ГДО $\mathcal{M}_{\nu,(\alpha)}$:

$$H_{\nu,(\alpha)}[g(r)]=\int_{R_0}^{\infty}g(r)V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr\equiv\tilde{g}(\beta), \tag{12}$$

$$H^{-1}_{\nu,(\alpha)}[\tilde{g}(\beta)]=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\tilde{g}(\beta)V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta\equiv g(r). \tag{13}$$

Математичним обгрунтуванням формул (12), (13) є твердження.

Теорема 1 (про інтегральне зображення). *Якщо функція* $f(r)=[\theta(r-R_0)\theta(R_1-r)\,r^{\alpha_1-1/2}+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\,r^{\alpha_1+1/2}+\theta(r-R_2)\cdot 1]g(r)$ *неперервна, абсолютно сумовна й має обмежену варіацію на множині* (R_0,∞), *то для будь-якого* $r\in I_2^+$ *справджується інтегральне зображення*

$$g(r)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta)\int_{R_0}^{\infty}g(\rho)V_{\nu,(\alpha)}(\rho,\beta)\sigma(\rho)d\rho d\beta. \tag{14}$$

Доведення. В основі доведення знаходиться подвійний невласний інтеграл [7]

$$I=\frac{2}{\pi}\int_{R_0}^{\infty}\int_0^{\infty}\Psi(\lambda)V_{\nu,(\alpha)}(r,\lambda)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\lambda)d\lambda V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr=\Psi(\beta), \tag{15}$$

якщо $\beta=\lambda\in(0,\infty)$. Якщо $\beta=\bar{\lambda}\in(0,\infty)$, то $I=0$. Функція $\Psi(\lambda)$ забезпечує абсолютну й рівномірну збіжність інтегралу по λ.

Припустимо, що вектор-функцію $g(r)$ можна зобразити в такому вигляді

$$g(r)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\Psi(\beta)V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta. \tag{16}$$

Помножимо рівність (16) на вираз $V_{\nu,(\alpha)}(r,\lambda)\sigma(r)dr$ й проінтегруємо по r від $r=R_0$ до $r=\infty$. В силу (15) одержимо, що

$$\int_{R_0}^{\infty} g(r)V_{\nu,(\alpha)}(r,\lambda)\sigma(r)dr = \Psi(\lambda)\,,\ \lambda=\beta\in(0,\infty).$$

Якщо тепер функцію

$$\Psi(\beta)=\int_{R_0}^{\infty} g(\rho)V_{\nu,(\alpha)}(\rho,\beta)\sigma(\rho)d\rho$$

підставити в рівність (16), то приходимо до інтегрального зображення (14). Теорему доведено.

В основі застосування запровадженого формулами (12), (13) ГІП типу Ейлера-Бесселя-Фур'є до розв'язання відповідних сингулярних задач математичної фізики лежить основна тотожність інтегрального перетворення ГДО $\mathcal{M}_{\nu,(\alpha)}$, визначеного рівністю (1).

Теорема 2 (про основну тотожність). *Якщо вектор-функція* $f(r)=\{\,B^{*}_{\alpha_1}[g_1(r)]\,;B_{\nu,\alpha_2}[g_2(r)];g_3''(r)\,\}$ *неперервна на множині* I_2^{+}, *а функції* $g_j(r)$ *задовольняють крайові умови*

$$\left.\left(\alpha_{11}^{0}\frac{d}{dr}+\beta_{11}^{0}\right)g_1(r)\right|_{r=R_0}=g_0\,,\ \lim_{r\to\infty}\left(V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)\frac{dg_3}{dr}-g_3(r)\frac{dV_{\nu,(\alpha);3}}{dr}\right)=0 \tag{17}$$

та умови спряження

$$\left.\left[\left(\alpha_{j1}^{k}\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^{k}\right)g_k(r)-\left(\alpha_{j2}^{k}\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^{k}\right)g_{k+1}(r)\right]\right|_{r=R_k}=\omega_{jk}\ ,\ j,\ k=1,\ 2, \tag{18}$$

то має місце основна тотожність ГІП ГДО $\mathcal{M}_{\nu,(\alpha)}$:

$$\begin{aligned}H_{\nu,(\alpha)}[\mathcal{M}_{\nu,(\alpha)}[g(r)]] &= -\beta^2\tilde{g}(\beta)-\sum_{j=1}^{3}k_j^2\tilde{g}_j(\beta)\ +\\ &+\sigma_1 a_1^2 R_0^{2\alpha_1+1}(-\alpha_{11}^{0})^{-1}V_{\nu,(\alpha);1}(R_0,\beta)g_0\ +\\ &+\sum_{j=1}^{2}h_k[Z^{k}_{\nu,(\alpha);12}(\beta)\omega_{2k}-Z^{k}_{\nu,(\alpha);22}(\beta)\omega_{1k}],\end{aligned} \tag{19}$$

де

$$\tilde{g}_1(\beta)=\int_{R_0}^{R_1} g_1(r)V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr\,,$$

$$\tilde{g}_2(\beta) = \int_{R_1}^{R_2} g_2(r) V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)\sigma_2 r^{2\alpha_2+1} dr \,,$$

$$\tilde{g}_3(\beta) = \int_{R_2}^{\infty} g_3(r) V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)\sigma_3 dr \,, h_1 = a_1^2 \sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1} c_{11}^{-1} \,, h_2 = a_2^2 \sigma_2 \mathrm{R}_2^{2\alpha_2+1} c_{12}^{-1} \,,$$

$$Z^k_{\nu,(\alpha);i2}(\beta) = \left(\alpha^k_{i2} \frac{d}{dr} + \beta^k_{i2} \right) V_{\nu,(\alpha);k+1}(r,\beta) \Big|_{r=R_k} \,, k=1, 2.$$

Доведення основної тотожності (19) проводиться безпосередньо методом інтегрування частинами під знаком інтегралів двічі з наступним використанням властивостей функцій $V_{\nu,(\alpha);j}(r, \beta)$, структури σ_1, σ_2, σ_3 та базової тотожності

$$\left(V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta) \frac{dg_j}{dr} - g_j(r) \frac{dV_{\nu,(\alpha);j}}{dr} \right) \Big|_{r=R_j} =$$

$$= \frac{c_{2j}}{c_{1j}} \left(V_{\nu,(\alpha);j+1}(r,\beta) \frac{dg_{j+1}}{dr} - g_{j+1}(r) \frac{dV_{\nu,(\alpha);j+1}}{dr} \right) \Big|_{r=R_j} +$$

$$+ \frac{1}{c_{1j}} [Z^j_{\nu,(\alpha);12}(\beta)\omega_{2j} - Z^j_{\nu,(\alpha);22}(\beta)\omega_{1j}] \,. \qquad (20)$$

Це є узагальнення базової тотожності (4) на випадок, коли умови спряження неоднорідні.

Логічну схему застосування запровадженого формулами (12), (13) ГІП покажемо на типових задачах математичної фізики неоднорідних середовищ.

Задача статики. Побудувати обмежений на множині $D=\{(r, z)$: $r\in I_2^+$, $z\in(-\infty, \infty)\}$ розв'язок системи рівнянь еліптичного типу [8]

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + a_1^2 B^*_{\alpha_1}[u_1] - \chi_1^2 u_1 = -f_1(r,z) \,, \quad r \in (R_0, R_1),$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + a_2^2 B_{\nu,\alpha_2}[u_2] - \chi_2^2 u_2 = -f_2(r,z) \,, \; r \in (R_1, R_2), \qquad (21)$$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} + a_3^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2} - \chi_3^2 u_3 = -f_3(r,z) \,, \quad r \in (R_2, \infty)$$

з крайовими умовами

$$\left(\alpha^0_{11} \frac{\partial}{\partial r} + \beta^0_{11} \right) u_1(r) \Big|_{r=R_0} = g_0(z) \,, \; \frac{\partial u_3}{\partial r} \Big|_{r=\infty} = 0 \qquad (22)$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^{k}\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j1}^{k}\right)u_{k}(r,z)-\left(\alpha_{j2}^{k}\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j2}^{k}\right)u_{k+1}(r)\right]\Bigg|_{r=R_k}=\omega_{jk}\,,\, j,k=1,2. \quad (23)$$

Розв'язання. Запишемо систему (21) в матричній формі

$$\begin{bmatrix} (\frac{\partial^2}{\partial z^2}+a_1^2 B^*_{\alpha_1}-\chi_1^2)u_1(r,z) \\ (\frac{\partial^2}{\partial z^2}+a_2^2 B_{\alpha_2}-\chi_2^2)u_2(r,z) \\ (\frac{\partial^2}{\partial z^2}+a_3^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\chi_3^2)u_3(r,z) \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} f_1(r,z) \\ f_2(r,z) \\ f_3(r,z)\end{bmatrix}. \quad (24)$$

Інтегральний оператор $H_{\nu,(\alpha)}$ згідно правила (12) зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка:

$$H_{\nu,(\alpha)}[\ldots]=\left[\int_{R_0}^{R_1}\ldots V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr\right.$$

$$\left.\int_{R_1}^{R_2}\ldots V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)\sigma_2 r^{2\alpha_2+1}dr \qquad \int_{R_2}^{\infty}\ldots V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)\sigma_3 dr\right]. \quad (25)$$

Застосуємо операторну матрицю-рядок (25) за правилом множення матриць до системи (24). Внаслідок основної тотожності (19) маємо звичайне диференціальне рівняння

$$\sum_{j=1}^{3}\left[\frac{d^2}{dz^2}-(\beta^2+k_j^2+\chi_j^2)\right]\tilde{u}_j(\beta,z)=$$

$$=\tilde{f}(\beta,z)+a_1^2\sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1}(-\alpha_{11}^0)^{-1}V_{\nu,(\alpha);1}(R_0,\beta)g_0(z)+$$

$$+\sum_{k=1}^{2}h_k[Z_{\nu,(\alpha);12}^k(\beta)\omega_{2k}(z)-Z_{\nu,(\alpha);22}^k(\beta)\omega_{1k}(z)]\equiv-\tilde{F}(\beta,z). \quad (26)$$

Припустимо, не зменшуючи загальності, що $\max\{\chi_1^2;\chi_2^2;\chi_3^2\}= =\chi_1^2$. Покладемо всюди $k_1^2=0,\;\; k_2^2=\chi_1^2-\chi_2^2\ge 0,\;\; k_3^2=\chi_1^2-\chi_3^2\ge 0.$

Якщо покласти $\sum_{j=1}^{3}\tilde{u}_j(\beta,z)=\tilde{u}(\beta,z),\quad \beta^2+\chi_1^2=q^2(\beta),\quad \tilde{f}(\beta,z)= =\sum_{j=1}^{3}\tilde{f}_j(\beta,z),$ то рівняння (26) набуває вигляду

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}-q^2\right)\tilde{u}(\beta,z)=-\tilde{F}(\beta,z). \quad (27)$$

Безпосередньо перевіряється, що обмеженим на (–∞,+∞) розв'язком диференціального рівняння (27) є функція

$$\tilde{u}(\beta,z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-q|z-\zeta|}}{2q}\tilde{F}(\beta,\zeta)d\zeta\ ,\ q=\left(\beta^2+\chi_1^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (28)$$

при умові, що функція $\tilde{F}(\beta,z)$ при $|z|\to\infty$ має скінченне граничне значення.

Інтегральний оператор $H_{\nu,(\alpha)}^{-1}$ згідно правила (13) як обернений до (25) зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця:

$$H_{\nu,(\alpha)}^{-1}[\ldots]=\begin{bmatrix}\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\ldots V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta\\ \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\ldots V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta\\ \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\ldots V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta\end{bmatrix}. \qquad (29)$$

Застосуємо операторну матрицю-стовпець (29) до матриці-елемента $[\tilde{u}(\beta,z)]$, де функція $\tilde{u}(\beta,z)$ визначена формулою (28), за правилом множення матриць. Після низки елементарних перетворень одержуємо інтегральне зображення єдиного аналітичного розв'язку еліптичної крайової задачі (21)—(23):

$$u_j(r,z)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\tilde{u}(\beta,z)V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta=$$

$$=\int_{R_0}^{R_1}\int_{-\infty}^{\infty}V_{\nu,(\alpha);j1}(r,\rho,z,\zeta)f_1(\rho,\zeta)\sigma_1\rho^{2\alpha_1-1}d\zeta d\rho+$$

$$+\int_{R_1}^{R_2}\int_{-\infty}^{\infty}V_{\nu,(\alpha);j2}(r,\rho,z,\zeta)f_2(\rho,\zeta)\sigma_2\rho^{2\alpha_2+1}d\zeta d\rho+$$

$$+\int_{R_2}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}V_{\nu,(\alpha);j3}(r,\rho,z,\zeta)f_3(\rho,\zeta)\sigma_3 d\zeta d\rho+$$

$$+\sum_{k=1}^{2}h_k\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{R}_{\nu,(\alpha);12}^{j,k}(r,z,\zeta)\omega_{2k}(\zeta)d\zeta-\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{R}_{\nu,(\alpha);22}^{j,k}(r,z,\zeta)\omega_{1k}(\zeta)d\zeta\right]+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty} W_{\nu,(\alpha);j}(r,z,\zeta)g_0(\zeta)d\zeta \;, j=\overline{1,3}\,. \qquad (30)$$

У рівності (30) беруть участь головні розв'язки задачі (21)—(23):
1) породжені неоднорідністю системи (21) функції впливу

$$\mathcal{H}_{\nu,(\alpha);jk}(r,\rho,z,\zeta)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{-q|z-\zeta|}}{2q}V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)V_{\nu,(\alpha);k}(\rho,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta,$$

$$j,k=\overline{1,3}; \qquad (31)$$

2) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$\mathcal{R}^{j,k}_{\nu,(\alpha);i2}(r,z,\zeta)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{-q|z-\zeta|}}{2q}Z^{k}_{\nu,(\alpha);i2}(\beta)V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta,$$

$$i,k=1,2,\; j=\overline{1,3}; \qquad (32)$$

3) породжені крайовою умовою в точці r=R_0 функції Гріна

$$W_{\nu,(\alpha);j}(r,z,\zeta)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{-q|z-\zeta|}}{2q}V_{\nu,(\alpha);1}(R_0,\beta)V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta\times$$

$$\times\sigma_1 a_1^2(-\alpha_{11}^0)^{-1}R_0^{2\alpha_1+1}. \qquad (33)$$

Зауваження 1. Якщо $\max\{\chi_1^2;\chi_2^2;\chi_3^2\}=\chi_2^2$, то $k_1^2=\chi_2^2-\chi_1^2\ge 0$, $k_2^2=0$, $k_3^2=\chi_2^2-\chi_3^2\ge 0$. У цьому випадку q=$(\beta^2+\chi_2^2)^{1/2}$, b_1= $(\beta^2+\chi_2^2-\chi_1^2)^{1/2}a_1^{-1}$, b_2=$a_2^{-1}\beta$, b_3=$a_3^{-1}(\beta^2+\chi_2^2-\chi_3^2)^{1/2}$.

Зауваження 2. Якщо $\max\{\chi_1^2;\chi_2^2;\chi_3^2\}=\chi_3^2$, то $k_1^2=\chi_3^2-\chi_1^2$, $k_2^2=\chi_3^2-\chi_2^2$, $k_3^2=0$. У цьому випадку b_1=$a_1^{-1}(\beta^2+\chi_3^2-\chi_1^2)^{1/2}$, b_2= $a_2^{-1}(\beta^2+\chi_3^2-\chi_2^2)^{1/2}$, b_3=$a_3^{-1}\beta$ і q=$(\beta^2+\chi_3^2)^{1/2}$.

Задача квазістатики. Побудувати обмежений на множині D=$\{(t, r)$: $t\in(0,\infty)$, $r\in I_2^+\}$ розв'язок системи рівнянь параболічного типу

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}+\chi_1^2u_1-a_1^2B^*_{\alpha_1}[u_1]=f_1(t,r),\; r\in(R_0,R_1),$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}+\chi_2^2u_2-a_2^2B_{\nu,\alpha_2}[u_2]=f_2(t,r),\; r\in(R_1,R_2), \qquad (34)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t}+\chi_3^2u_3-a_3^2\frac{\partial^2u_3}{\partial r^2}=f_3(t,r),\; r\in(R_2,\infty)$$

з початковими умовами

$$u_j(t,r)|_{t=0}=g_j(r),\; r\in(R_{j-1},R_j),\; j=\overline{1,3}\,,\; R_3=\infty, \qquad (35)$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0\right) u_1(r)\Big|_{r=R_0} = g_0(t)\,, \ \frac{\partial u_3}{\partial r}\Big|_{r=\infty} = 0 \qquad (36)$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k\right) u_k(t,r) - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k\right) u_{k+1}(t,r)\right]\Big|_{r=R_k} = \omega_{jk}(t)\,,\ j,k=1,2. \ (37)$$

Розв’язання. Запишемо систему (34) і початкові умови (35) в матричній формі

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \chi_1^2 - a_1^2 B_{\alpha_1}^*\right) u_1(t,r) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \chi_2^2 - a_2^2 B_{\alpha_2}\right) u_2(t,r) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \chi_3^2 - a_3^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right) u_3(t,r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t,r) \\ f_2(t,r) \\ f_3(t,r) \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} u_1(t,r) \\ u_2(t,r) \\ u_3(t,r) \end{bmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{bmatrix} g_1(r) \\ g_2(r) \\ g_3(r) \end{bmatrix}. \ (38)$$

У припущенні, що $\max\{\chi_1^2; \chi_2^2; \chi_3^2\} = \chi_1^2$, застосуємо до задачі (38) за правилом множення матриць операторну матрицю-рядок (25). Внаслідок основної тотожності (19) одержуємо задачу Коші

$$\left(\frac{d}{dt} + q^2\right) \tilde{u}(t,\beta) = \tilde{F}(t,\beta)\,, \ \tilde{u}(t,\beta)\big|_{t=0} = \tilde{g}(\beta), \qquad (39)$$

де

$$q^2 = \beta^2 + \chi_1^2\,,\ \tilde{u} = \sum_{j=1}^{3} \tilde{u}_j\,,\ \tilde{g} = \sum_{j=1}^{3} \tilde{g}_j\,,\ \tilde{F}(t,\beta) = \sum_{j=1}^{3} \tilde{f}_j(t,\beta) + \sigma_1 a_1^2 R_0^{2\alpha_1+1} \times$$
$$\times (-\alpha_{11}^0)^{-1} V_{\nu,(\alpha);1}(R_0,\beta) g_0(t) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{2} h_k [Z_{\nu,(\alpha);12}^k(\beta)\omega_{2k}(t) - Z_{\nu,(\alpha);22}^k(\beta)\omega_{1k}(t)]\,.$$

Безпосередньо перевіряється, що розв’язком задачі Коші (39) є функція

$$\tilde{u}(t,\beta) = \int_0^t e^{-q^2(t-\tau)} (\tilde{F}(\tau,\beta) + \delta_+(\tau)\tilde{g}(\beta)) d\tau\,, \qquad (40)$$

де $\delta_+(\tau)$ — дельта-функція Дірака, зосереджена в точці $\tau = 0+$ [3].

Введемо до розгляду головні розв’язки параболічної крайової задачі (34)—(37):

1) породжені неоднорідністю системи (34) функції впливу

$$\mathcal{H}_{\nu,(\alpha);jk}(t,r,\rho)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-q^2t}V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)V_{\nu,(\alpha);k}(\rho,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta,$$

$$j,k=1,2,3; \tag{41}$$

2) породжені температурним режимом на межі $r=R_0$ функції Гріна

$$W_{\nu,(\alpha);j}(t,r,\rho)=(\alpha_{11}^0)^{-1}\sigma_1 a_1^2 R_0^{2\alpha_2+1}\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-q^2t}V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)\times$$

$$\times V_{\nu,(\alpha);1}(R_0,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta,\ j=\overline{1,3}; \tag{42}$$

3) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$\mathcal{R}_{\nu,(\alpha);i2}^{j,k}(t,r,\rho)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-q^2t}Z_{\nu,(\alpha);i2}^k(\beta)V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta,\ i,k=1,2, j=\overline{1,3}. \tag{43}$$

У результаті застосування до матриці-елемента $[\tilde{u}(t,\beta)]$, де функція $\tilde{u}(t,\beta)$ визначена формулою (40), за правилом множення матриць операторної матриці-стовпця (29), отримуємо інтегральне зображення єдиного аналітичного розв'язку задачі (34)—(37):

$$u_j(t,r)=\int_0^t\int_{R_0}^{R_1}\mathcal{H}_{\nu,(\alpha);j1}(t-\tau,r,\rho)[f_1(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)g_1(\rho)]\sigma_1\rho^{2\alpha_1-1}d\rho d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_{R_1}^{R_2}\mathcal{H}_{\nu,(\alpha);j2}(t-\tau,r,\rho)[f_2(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)g_2(\rho)]\sigma_2\rho^{2\alpha_2+1}d\rho d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_{R_2}^{\infty}\mathcal{H}_{\nu,(\alpha);j3}(t-\tau,r,\rho)[f_3(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)g_3(\rho)]\sigma_3 d\rho d\tau+$$

$$+\int_0^t W_{\nu,(\alpha);j}(t-\tau,r)g_0(\tau)d\tau++\sum_{k=1}^2 h_k\left[\int_0^t\mathcal{R}_{\nu,(\alpha);12}^{j,k}(t-\tau,r)\omega_{2k}(\tau)d\tau-\right.$$

$$\left.-\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{R}_{\nu,(\alpha);22}^{j,k}(t-\tau,r)\omega_{1k}(\tau)d\tau\right],\ j=\overline{1,3}. \tag{44}$$

За такою ж логічною схемою будується інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку задачі динаміки [2].

Список використаних джерел:

1. Уфлянд Я. С. О некоторых новых интегральных преобразованиях и их приложениях к задачам математической физики / Я. С. Уфлянд // Вопросы математической физики. — Л., 1976. — С. 93—106.

2. Ленюк М. П. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1. / М. П. Ленюк, М. І. Шинкарик. — Тернопіль : Економ. думка, 2004. — 368 с.
3. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.
4. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. — М. : Физматгиз, 1959. — 468 с.
5. Ленюк М. П. Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя / М. П. Ленюк. — К. 1983. — 62 с. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.3).
6. Березанський Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю. М. Березанский. — К. : Наук. думка, 1965. — 798 с.
7. Ленюк М. Запровадження гібридного інтегрального перетворення типу Бесселя-Ейлера-Лежандра на полярній вісі / М. Ленюк, О. Ленюк // Математичний вісник НТШ. Том 5. — Чернівці : Рута, 2008. — С. 102—116.
8. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Наука, 1972. — 735 с.

By the method of delta-shaped sequence (Dirichlet kernel) it is introduced the integral transform, generated on the polar axis with two contact points by hybrid differential Eiler-Bessel- Fourier operator.

Keywords: *hybrid differential operator, hybrid integral transform, delta-shaped sequence, fundamental system of solutions, spectral vector-function, integral image, basic identity.*

Отримано: 10.08.2009