УДК 517.91:532.26

О. М. Нікітіна

Харківський національний технічний університет “ХПІ”

ГІБРИДНЕ ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ ЕЙЛЕРА-ФУР’Є НА ПОЛЯРНІЙ ОСІ

Методом дельта-подібної послідовності (ядро Коші) запроваджено гібридне інтегральне перетворення типу Ейлера-Фур’є на полярній осі з однієї точкою спряження.

Ключові слова: *гібридний диференціальний оператор, гібридне інтегральне перетворення, ядро Коші, функції впливу, спектральна функція, інтегральне зображення, основна тотожність.*

Аналіз та ціль статті. Вивчення фізико-технічних характеристик композитних матеріалів, які знаходяться в різних умовах експлуатації, математично приводить до задачі інтегрування сепаратної системи диференціальних рівнянь другого порядку на кусково-одно рідно му інтервалі. Одним із ефективних методів побудови аналітичних розв’язків таких задач є метод гібридних інтегральних перетворень, започаткованих в роботі Я. С. Уфлянда [7]. Основні положення теорії гібридних інтегральних перетворень (ГІП) закладено в роботі [3]. Дана стаття присвячена запровадженню одного з типів ГІП.

Основна частина. Запровадимо методом дельта-подібної послідовності інтегральне перетворення, породжене на множині $I_1^+ = \left[r : r \in (0, R) \cup (R, \infty)\right]$ гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$\mathcal{M}_\alpha = \theta(R-r)\theta(r)a_1^2 B_\alpha + \theta(r-R)a_2^2 d^2 / dr^2 , \qquad (1)$$

де $a_j > 0$, B_α – диференціальний оператор Ейлера [1],

$$B_\alpha = r^2 d^2 / dr^2 + (2\alpha+1) r d / dr + \alpha^2 , \; 2\alpha + 1 > 0 .$$

Означення. Областю визначення ГДО $\mathcal{M}_\alpha$ назвемо множину G вектор-функцій $g(r) = \{g_1(r); g_2(r)\}$ з такими властивостями:

1) вектор-функція $f(r) = \{B_\alpha[g_1(r)]; g_2''(r)\}$ неперервна на множині I_1^+;

2) функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження

$$\left.\left[\left(\alpha_{j1}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^1\right) g_1(r) - \left(\alpha_{j2}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^1\right) g_2(r)\right]\right|_{r=R} = 0 , \; j = 1, 2, \qquad (2)$$

3) мають місце умови обмеження

$$\lim_{r \to 0}\left[r^\gamma g_1(r)\right] = 0, \quad \lim_{r\to\infty} \frac{d^k g_2(r)}{dr^k} = 0 , \; k = 0, 1. \qquad (3)$$

Ми вважаємо, що

$$\alpha_{jk}^{1} \geq 0,\ \beta_{jk}^{1} \geq 0,\ c_{21} \cdot c_{11} > 0,\ c_{j1} = \alpha_{2j}^{1}\beta_{1j}^{1} - \alpha_{1j}^{1}\beta_{2j}^{1}.$$

Із умов спряження випливає базова тотожність: для $u(r) \in G$ та $v(r) \in G$ справджується рівність

$$\left. \left(u_1(r)\frac{dv_1}{dr} - v_1(r)\frac{du_1}{dr} \right) \right|_{r=R} = \frac{c_{21}}{c_{11}} \left. \left(u_2(r)\frac{dv_2}{dr} - v_2(r)\frac{du_2}{dr} \right) \right|_{r=R}. \quad (4)$$

Визначимо вагову функцію

$$\sigma(r) = \theta(r)\theta(R-r)\sigma_1 r^{2\alpha-1} + \theta(r-R_1)\sigma_2,$$

де $\sigma_1 = c_{11}\left(c_{21}a_1^2 R^{2\alpha+1}\right)^{-1}$, $\sigma_2 = a_2^{-2}$, та скалярний добуток

$$(u(r), v(r)) = \int_0^\infty u(r)v(r)\sigma(r)dr = \int_0^R u_1(r)v_1(r)\sigma_1 r^{2\alpha-1}dr + \int_R^\infty u_2(r)v_2(r)\sigma_2 dr. \quad (5)$$

Використовуючи умови обмеження (3) та базову тотожність (4), встановлюємо рівність

$$(\mathcal{M}_\alpha[u], v) = (u, \mathcal{M}_\alpha[v]). \quad (6)$$

Звідси випливає, що ГДО $\mathcal{M}_\alpha$ самоспряжений. Отже, його спектр дійсний [2]. Оскільки оператор $\mathcal{M}_\alpha$ має дві особливі точки ($r = 0$ та $r = \infty$), то його спектр неперервний [3]. Можна вважати, що спектральний параметр $\beta \in (0, \infty)$. Спектральна функція, що відповідає спектральному параметру β, в цьому випадку комплекснозначна [3]. Якщо вважати, що спектральна функція

$$V_\alpha(r,\beta) = \theta(r)\theta(R-r)V_{\alpha,1}(r,\beta) + \theta(r-R)V_{\alpha,2}(r,\beta),$$

то функції $V_{\alpha,j}(r,\beta)$ – комплекснозначні:

$$V_{\alpha,j}(r,\beta) = V_{\alpha,j1}(r,\beta) + iV_{\alpha,j2}(r,\beta),\ j = 1, 2,\ i^2 = -1.$$

Фундаментальну систему розв'язків для рівняння Ейлера $\left(B_\alpha + b_1^2\right)v = 0$ утворюють функції $v_1 = r^{-\alpha}\cos(b_1 \ln r)$ та $v_2 = r^{-\alpha}\sin(b_1 \ln r)$ [1]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $\left(d^2/dr^2 + b_2^2\right)v = 0$ утворюють функції $\cos b_2(r-R)$ та $\sin b_2(r-R)$ [1]; $b_j = \left(\beta^2 + k_j^2\right)^{1/2}$, $k_j^2 \geq 0$, $j = 1, 2$.

Якщо покласти

$$\begin{gathered} V_{\alpha,1}(r,\beta) = A_1 r^{-\alpha}\cos(b_1 \ln r) + B_1 r^{-\alpha}\sin(b_1 \ln r) + \\ + i\left[C_1 r^{-\alpha}\cos(b_1 \ln r) + D_1 r^{-\alpha}\sin(b_1 \ln r)\right], \\ V_{\alpha,2}(r,\beta) = A_2\cos b_2(r-R) + B_2\sin b_2(r-R) + \\ + i\left[C_2\cos b_2(r-R) + D_2\sin b_2(r-R)\right], \end{gathered} \quad (7)$$

то для визначення восьми невідомих A_j, B_j, C_j, D_j ($j = 1, 2$) умови спряження (2) дають алгебраїчну систему з чотирьох рівнянь, що явно недостатньо. Отже, в якості дельта-подібної послідовності брати ядро Діріхле не можна. Спробуємо за дельта-подібну послідовність взяти ядро Коші – фундаментальну матрицю розв’язків задачі Коші для параболічної системи рівнянь дифузії першого порядку, породженої ГДО $\mathcal{M}_\alpha$.

Розглянемо задачу про конструкцію обмеженого в області $D_1^+ = \{(t,r): t \in (0,\infty); r \in I_1^+\}$ розв’язку сепаратної системи параболічного типу [4]

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \gamma_1^2 u_1 - a_1^2 B_\alpha[u_1(t,r)] = 0\,,\ r \in (0,R),$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \gamma_2^2 u_2 - a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} = 0\,,\ r \in (R,\infty) \tag{8}$$

за початковими умовами

$$u_1(t,r)\big|_{t=0} = g_1(r)\,,\ r \in (0,R),\ u_2(t,r)\big|_{t=0} = g_2(r),\ r \in (R,\infty) \tag{9}$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^1\right) u_1(t,r) - \left(\alpha_{j2}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^1\right) u_2(t,r)\right]\Bigg|_{r=R} = 0\,,\ j = 1, 2. \tag{10}$$

Припустимо, що вектор-функція $u(t,r) = \{u_1(t,r); u_2(t,r)\}$ є оригіналом за Лапласом стосовно t [5]. У зображенні за Лапласом параболічній задачі (8)-(10) відповідає крайова задача: побудувати обмежений на множині I_1^+ розв’язок сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь Ейлера та Фур’є для модифікованих функцій

$$\left(B_\alpha - q_1^2\right) u_1^*(p,r) = -\overline{g}_1(r),\ r \in (0,R),$$

$$\left(d^2/dr^2 - q_2^2\right) u_2^*(p,r) = -\overline{g}_2(r),\ r \in (R,\infty) \tag{11}$$

за умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^1\right) u_1^*(p,r) - \left(\alpha_{j2}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^1\right) u_2^*(p,r)\right]\Bigg|_{r=R} = 0\,,\ j = 1, 2. \tag{12}$$

Тут $q_j = a_j^{-1}\left(p + \gamma_j^2\right)^{1/2}$, $\overline{g}_j(r) = a_j^{-2} g_j(r), j = 1, 2;\ \mathrm{Re}\, q_j > 0$.

Фундаментальну систему розв’язків для рівняння Ейлера $\left(B_\alpha - q_1^2\right)v = 0$ утворюють функції $v_1 = r^{-\alpha - q_1}$ та $v_2 = r^{-\alpha + q_1}$ [1]; фундаментальну систему розв’язків для диференціального рівняння Фур’є $\left(d^2/dr^2 - q_2^2\right)v = 0$ утворюють функції $v_1 = \exp[q_2(r - R)]$ та

$v_2 = \exp[-q_2(r-R)]$ або їх лінійні комбінації $v_1 = \mathrm{ch} q_2(r-R)$ та $v_2 = \mathrm{sh} q_2(r-R)$ [1].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дає можливість будувати загальний розв'язок крайової задачі (11), (12) методом функцій Коші [1, 6]:

$$u_1^*(p,r) = A_1 r^{-\alpha+q_1} + \int_0^R E_1^*(p,r,\rho)\overline{g}_1(\rho)\rho^{2\alpha-1}d\rho\,,$$

$$u_2^*(p,r) = A_2 e^{-q_2(r-R)} + \int_R^\infty E_2^*(p,r,\rho)\overline{g}_2(\rho)d\rho\,. \tag{13}$$

У рівностях (13) беруть участь функції Коші $E_j^*(p,r,\rho)$ [1, 6]:

$$E_j^*(p,r,\rho)\Big|_{r=\rho+0} - E_j^*(p,r,\rho)\Big|_{r=\rho-0} = 0,\ j = 1, 2,$$

$$\left.\frac{dE_j^*(p,r,\rho)}{dr}\right|_{r=\rho+0} - \left.\frac{dE_j^*(p,r,\rho)}{dr}\right|_{r=\rho-0} = -\varphi_j(\rho), \tag{14}$$

де $\varphi_1(\rho) = \rho^{-(2\alpha+1)}$, $\varphi_2(\rho) = 1$.

Нехай функція Коші

$$E_1^*(p,r,\rho) = \begin{cases} \overline{E}_1^* \equiv C_1 r^{-\alpha+q_1}, & 0 < r < \rho < R, \\ \overset{+}{E}{}_2^* \equiv C_2 r^{-\alpha+q_1} + D_2 r^{-\alpha-q_1}, & 0 < \rho < r < R. \end{cases}$$

Властивості (14) функції Коші для визначення величин C_1, C_2 та D_2 дають алгебраїчну систему з двох рівнянь:

$$(C_2 - C_1)\rho^{-\alpha+q_1} + D_2\rho^{-\alpha-q_1} = 0\,,$$

$$(-\alpha+q_1)(C_2 - C_1)\rho^{-\alpha+q_1} - (\alpha+q_1)D_2\rho^{-\alpha-q_1} = -\rho^{-2\alpha}\,.$$

Звідси отримуємо співвідношення:

$$C_2 - C_1 = -\frac{1}{2q_1}\rho^{-\alpha-q_1}\,,\ D_2 = \frac{1}{2q_1}\rho^{-\alpha+q_1}\,. \tag{15}$$

Доповнимо систему (15) рівнянням:

$$\left.\left(\alpha_{11}^1\frac{d}{dr} + \beta_{11}^1\right)\overset{+}{E}_1\right|_{r=R} = 0:\ Z_{\alpha,11}^{12}(q_1,R_1)C_2 + Z_{\alpha,11}^{11}(q_1,R_1)D_2 = 0\,. \tag{16}$$

Із системи (15), (16) знаходимо, що

$$C_1 = \left(Z_{\alpha,11}^{12}\right)^{-1}\Psi_{\alpha,11}^{1*}(q_2,\rho).$$

Цим функція Коші $E_1^*(p,r,\rho)$ визначена й внаслідок симетрії відносно діагоналі $r=\rho$ має структуру:

$$E_1^*(p,r,\rho)=\frac{1}{2q_1 Z_{\alpha,11}^{12}}\begin{cases} r^{-\alpha+q_1}\Psi_{\alpha;11}^{1*}(q_1,\rho), & 0<r<\rho<R_1, \\ \rho^{-\alpha+q_1}\Psi_{\alpha;11}^{1*}(q_1,r), & 0<\rho<r<R_1. \end{cases} \tag{17}$$

У рівностях (16), (17) беруть участь функції:

$$Z_{\alpha,j1}^{11}(q_1,R)=\left[\left(\beta_{j1}^1-\alpha R^{-1}\alpha_{j1}^1\right)-\alpha R^{-1}q_1\right]R^{-\alpha-q_1},$$

$$Z_{\alpha,j1}^{12}(q_1,R)=\left[\left(\beta_{j1}^1-\alpha R^{-1}\alpha_{j1}^1\right)+\alpha R^{-1}q_1\right]R^{-\alpha+q_1},$$

$$\Psi_{\alpha,j1}^{1*}(q_1,r)=Z_{\alpha,j1}^{12}r^{-q_1-\alpha}-Z_{\alpha,j1}^{11}r^{q_1-\alpha}.$$

Нехай функція Коші

$$E_2^*=\begin{cases} \overset{-}{E}{}_2^*\equiv C_1\mathrm{ch}q_2(r-R)+D_1\mathrm{sh}q_2(r-R), & R<r<\rho<\infty, \\ \overset{+}{E}{}_2^*\equiv D_2 e^{-q_2(r-R)}, & R<\rho<r<\infty. \end{cases}$$

Властивості (14) функції Коші для визначення величин C_1, D_1 та D_2 дають алгебраїчну систему з двох рівнянь:

$$-C_1\,\mathrm{ch}\,q_2(\rho-R)+D_2 e^{-q_2(\rho-R)}-D_1\,\mathrm{ch}\,q_2(\rho-R)=0,$$

$$C_1\,\mathrm{sh}\,q_2(\rho-R)+D_2 e^{-q_2(\rho-R)}+D_1\,\mathrm{ch}\,q_2(\rho-R)=q_2^{-1}.$$

Звідси отримуємо співвідношення:

$$C_1=-q_2^{-1}\,\mathrm{sh}\,q_2(\rho-R)+D_2,\quad D_1=q_2^{-1}\,\mathrm{ch}\,q_2(\rho-R)-D_2. \tag{18}$$

Доповнимо систему (18) рівнянням:

$$\left.\left(\alpha_{12}^1\frac{d}{dr}+\beta_{12}^1\right)\overset{-}{E}{}_2^*\right|_{r=R}=0:\ \beta_{12}^1 C_1+\alpha_{12}^1 q_2 D_1=0. \tag{19}$$

Із системи (18), (19) знаходимо D_2. З цим функція Коші

$$E_2^*=\frac{1}{q_2\left(\alpha_{12}^1 q_2-\beta_{12}^1\right)}\begin{cases} e^{-q_2(\rho-R)}\left[\alpha_{12}^1 q_2\,\mathrm{ch}\,q_2(r-R)-\beta_{12}^1\,\mathrm{sh}\,q_2(r-R)\right], \\ \qquad R<r<\rho<\infty, \\ e^{-q_2(r-R)}\left[\alpha_{12}^1 q_2\,\mathrm{ch}\,q_2(\rho-R)-\beta_{12}^1\,\mathrm{sh}\,q_2(\rho-R)\right], \\ \qquad R<\rho<r<\infty. \end{cases} \tag{20}$$

Повернемось до формул (13). Умови спряження (12) для визначення величин A_1, A_2 дають алгебраїчну систему з двох рівнянь:

$$Z_{\alpha;11}^{12}(q_1,R_1)A_1+\left(\alpha_{12}^1 q_2-\beta_{12}^1\right)A_2=0,$$

$$Z_{\alpha;21}^{12}(q_1,R_1)A_1+\left(\alpha_{22}^1 q_2-\beta_{22}^1\right)A_2=G_{12}^*. \tag{21}$$

У системі (21) бере участь функція

$$G_{12}^{*}=\frac{c_{11}}{R^{2\alpha+1}}\int_{0}^{R}\frac{\rho^{-\alpha+q_1}}{Z_{\alpha,11}^{12}}\bar{g}_1(\rho)\rho^{2\alpha-1}d\rho-c_{21}\int_{R}^{\infty}\frac{e^{q_2(\rho-R)}}{\alpha_{12}^{1}q_2-\beta_{12}^{1}}\bar{g}_2(\rho)d\rho .$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності даної крайової задачі: для $p=\sigma+is$ з $\operatorname{Re}p=\sigma>\sigma_0$, де σ_0 – абсциса збіжності інтегралу Лапласа, та $\operatorname{Im}p=s\in(-\infty,\infty)$ визначник алгебраїчної системи (21)

$$\Delta_\alpha(p)\equiv\left(\alpha_{22}^{1}q_2-\beta_{22}^{1}\right)Z_{\alpha,11}^{12}-\left(\alpha_{12}^{1}q_2-\beta_{12}^{1}\right)Z_{\alpha,21}^{12}\neq 0 . \qquad (22)$$

Визначимо породжені неоднорідністю системи (11) функції впливу

$$\mathcal{H}_{\alpha;11}^{*}(p,r,\rho)=\frac{1}{2q_1\Delta_\alpha(p)}\begin{cases} r^{-\alpha+q_1}\left[\left(\alpha_{22}^{1}q_2-\beta_{22}^{1}\right)\Psi_{\alpha;11}^{1*}(q_1,\rho)-\right.\\ \rho^{-\alpha+q_1}\left[\left(\alpha_{22}^{1}q_2-\beta_{22}^{1}\right)\Psi_{\alpha;11}^{1*}(q_1,r)-\right.\end{cases}$$

$$\begin{aligned}&\left.-\left(\alpha_{12}^{1}q_2-\beta_{12}^{1}\right)\Psi_{\alpha;21}^{1*}(q_1,\rho)\right], \quad 0<r<\rho<R\\ &\left.-\left(\alpha_{12}^{1}q_2-\beta_{12}^{1}\right)\Psi_{\alpha;21}^{1*}(q_1,r)\right], \quad 0<\rho<r<R,\end{aligned}$$

$$\mathcal{H}_{\alpha;12}^{*}(p,r,\rho)=\frac{c_{21}}{\Delta_\alpha(p)}r^{-\alpha+q_1}e^{-q_2(\rho-R)},$$

$$\mathcal{H}_{\alpha;21}^{*}(p,r,\rho)=\frac{c_{11}}{R^{2\alpha+1}}\frac{1}{\Delta_\alpha(p)}\rho^{-\alpha+q_1}e^{-q_2(r-R)}, \qquad (23)$$

$$\mathcal{H}_{(\alpha);22}^{*}(p,r,\rho)=\frac{1}{q_2\Delta_\alpha(p)}\begin{cases} e^{-q_2(\rho-R)}\left[Z_{\alpha;11}^{12}\left(\alpha_{22}^{1}q_2\operatorname{ch}q_2(r-R)-\right.\right.\\ e^{-q_2(r-R)}\left[Z_{\alpha;11}^{12}\left(\alpha_{22}^{1}q_2\operatorname{ch}q_2(\rho-R)-\right.\right.\end{cases}$$

$$\begin{aligned}&\left.-\beta_{22}^{1}\operatorname{sh}q_2(r-R)\right)-Z_{\alpha;21}^{12}\left(\alpha_{12}^{1}q_2\operatorname{ch}q_2(r-R)-\right.\\ &\left.-\beta_{22}^{1}\operatorname{sh}q_2(\rho-R)\right)-Z_{\alpha;21}^{12}\left(\alpha_{12}^{1}q_2\operatorname{ch}q_2(\rho-R)-\right.\\ &\left.\left.-\beta_{12}^{1}\operatorname{sh}q_2(r-R)\right)\right], \quad R<r<\rho<\infty\\ &\left.\left.-\beta_{12}^{1}\operatorname{sh}q_2(\rho-R)\right)\right], \quad R<\rho<r<\infty.\end{aligned}$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (21) й підстановки одержаних значень A_1 та A_2 у формули (13) маємо єдиний розв'язок крайової задачі (11), (12):

$$u_j^{*}(p,r)=\int_{0}^{R}\mathcal{H}_{\alpha;j1}^{*}(p,r,\rho)\bar{g}_1(\rho)\rho^{2\alpha-1}d\rho+$$

$$+\int_{R}^{\infty}\mathcal{H}_{\alpha;j2}^{*}(p,r,\rho)\bar{g}_2(\rho)d\rho , \; j=1,\,2. \qquad (24)$$

Повертаючись до оригіналу, отримуємо єдиний розв'язок параболічної задачі (8)-(10):

$$u_j(t,r)=\int_0^R \mathcal{H}_{\alpha;j1}(t,r,\rho)\overline{g}_1(\rho)\rho^{2\alpha-1}d\rho+\int_R^\infty \mathcal{H}_{\alpha;j2}(t,r,\rho)\overline{g}_2(\rho)d\rho\,. \quad (25)$$

У рівностях (25) за означенням [5]

$$\mathcal{H}_{\alpha;jk}(t,r,\rho)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}\overset{*}{\mathcal{H}}_{\alpha;jk}(p,r,\rho)e^{pt}dp\;;j,k=1,2 \qquad (26)$$

Особливими точками функцій впливу $\overset{*}{\mathcal{H}}_{\alpha;jk}(p,r,\rho)$ є точки розгалуження $p=-\gamma_1^2$, $p=-\gamma_2^2$ та $p=\infty$. Для цього випадку метод контурного інтегралу з використанням леми Жордана та теореми Коші приводить формулу (26) до "робочої формули" [3, 5]:

$$\mathcal{H}_{\alpha;jk}(t,r,\rho)=-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Im}\left\{\mathcal{H}_{\alpha;jk}\left(e^{\pi i}\left(\beta^2+\gamma^2\right),r,\rho\right)e^{-\left(\beta^2+\gamma^2\right)t}\right\}\beta d\beta\,,$$

$$j,k=1,2, \qquad (27)$$

де $\gamma^2=\max\left\{\gamma_1^2;\gamma_2^2\right\}$.

При виведенні формули (27) ми поклали $q_j=ib_j\equiv ia_j^{-1}\left(\beta^2+k_j^2\right)$, $k_j^2=\gamma^2-\gamma_j^2\ge 0$, $j=1,2$. Звідси одержуємо, що $p=-\left(\beta^2+\gamma^2\right)\equiv$ $\equiv\left(\beta^2+\gamma^2\right)\exp(\pi i)$, $dp=-2\beta d\beta$.

Безпосередніми підрахунками отримуємо:

$$\alpha_{j2}^1 ib_2-\beta_{j2}^1=ib_2\alpha_{j2}^1-\beta_{j2}^1\,;j=1,2;$$

$$Z_{\alpha;j1}^{12}(ib_1,R)=\left[\left(\beta_{j1}^1-\alpha R^{-1}\alpha_{j1}^1\right)\cos(b_1\ln R)-\alpha_{j1}^1R^{-1}b_1\sin(b_1\ln R)\right]R^{-\alpha}+$$
$$+i\left[\left(\beta_{j1}^1-\alpha R^{-1}\alpha_{j1}^1\right)\sin(b_1\ln R)+\alpha_{j1}^1R^{-1}b_1\cos(b_1\ln R)\right]\equiv$$
$$\equiv Y_{\alpha;j1}^{11}(b_1,\ln R)+iY_{\alpha;j1}^{12}(b_1,\ln R)\,,$$

$$\Psi_{\alpha;j1}^{1*}(ib_1,r)=2i\left[Y_{\alpha;j1}^{12}\cos(b_1\ln r)-Y_{\alpha;j1}^{11}\cos(b_1\ln r)\right]r^{-\alpha}\equiv 2i\Psi_{\alpha;j1}^1(b_1,r)\,,$$

$$\Delta_\alpha\left(e^{\pi i}\left(\beta^2+\gamma^2\right)\right)=\left(i\alpha_{22}^1b_2-\beta_{22}^1\right)\left(Y_{\alpha;11}^{11}+iY_{\alpha;11}^{12}\right)-$$
$$-\left(i\alpha_{12}^1b_2-\beta_{12}^1\right)\left(Y_{\alpha;21}^{11}+iY_{\alpha;21}^{12}\right)=$$
$$=\left[b_2e_{\alpha,12}(\beta)+e_{\alpha,21}(\beta)\right]-i\left[b_2e_{\alpha,11}(\beta)-e_{\alpha,22}(\beta)\right]\equiv\omega_{\alpha,1}(\beta)-i\omega_{\alpha,2}(\beta);$$

$$e_{\alpha,1j}=\alpha_{12}^1Y_{\alpha;21}^{1j}-\alpha_{22}^1Y_{\alpha;11}^{1j}\,,\; e_{\alpha,2j}=\beta_{12}^1Y_{\alpha;21}^{1j}-\beta_{22}^1Y_{\alpha;11}^{1j}\,,j=1,2.$$

Визначимо потрібні в подальшому функції та величини:

$$f_{\alpha,11}(\beta)=b_2e_{\alpha,12}\omega_{\alpha,1}-e_{\alpha,22}\omega_{\alpha,2}=$$
$$=b_2^2e_{\alpha,12}^2+e_{\alpha,22}^2+b_2(e_{\alpha,12}e_{\alpha,21}-e_{\alpha,11}e_{\alpha,22}),$$
$$f_{\alpha,12}(\beta)=e_{\alpha,21}\omega_{\alpha,1}+b_2e_{\alpha,11}\omega_{\alpha,2}=$$
$$=b_2^2e_{\alpha,11}^2+e_{\alpha,21}^2+b_2(e_{\alpha,12}e_{\alpha,21}-e_{\alpha,11}e_{\alpha,22}),$$
$$f_{\alpha,13}(\beta)=e_{\alpha,21}e_{\alpha,22}+b_2^2e_{\alpha,11}e_{\alpha,12}\equiv e_{\alpha,22}\omega_{\alpha,1}+b_2e_{\alpha,12}\omega_{\alpha,2}=$$
$$=b_2e_{\alpha,11}\omega_{\alpha,1}-e_{\alpha,21}\omega_{\alpha,2},$$
$$f_{\alpha,21}(\beta)=b_2(e_{\alpha,11}\omega_{\alpha,2}+e_{\alpha,12}\omega_{\alpha,1})=$$
$$=b_2\left[b_2\left(e_{\alpha,11}^2+e_{\alpha,12}^2\right)+e_{\alpha,12}e_{\alpha,21}-e_{\alpha,11}e_{\alpha,22}\right],$$
$$f_{\alpha,22}(\beta)=e_{\alpha,21}\omega_{\alpha,1}-e_{\alpha,22}\omega_{\alpha,2}=e_{\alpha,21}^2+e_{\alpha,22}^2+$$
$$+b_2(e_{\alpha,12}e_{\alpha,21}-e_{\alpha,11}e_{\alpha,22}),$$
$$f_{\alpha,23}(\beta)=e_{\alpha,11}\omega_{\alpha,1}-e_{\alpha,12}\omega_{\alpha,2}=e_{\alpha,12}e_{\alpha,22}+e_{\alpha,11}e_{\alpha,21}\equiv$$
$$\equiv b_2^{-1}(e_{\alpha,22}\omega_{\alpha,1}+e_{\alpha,21}\omega_{\alpha,2});$$
$$e_{\alpha,12}e_{\alpha,21}-e_{\alpha,11}e_{\alpha,22}=c_{21}c_{11}b_1(\beta)R^{-(2\alpha+1)},\ \Omega_\alpha(\beta)=\beta b_2^{-1}\left(\omega_{\alpha,1}^2+\omega_{\alpha,2}^2\right)^{-1}.$$

Виконавши зазначені в формулі (27) операції, маємо:

$$\mathcal{H}_{\alpha,11}(t,r,\rho)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[f_{\alpha,11}(\beta)v_{\alpha,1}(r)v_{\alpha,1}(\rho)+f_{\alpha,12}(\beta)v_{\alpha,2}(r)v_{\alpha,2}(\rho)-\right.$$
$$\left.-f_{\alpha,13}(\beta)(v_{\alpha,1}(r)v_{\alpha,2}(\rho)+v_{\alpha,1}(\rho)v_{\alpha,2}(r))\right]e^{-(\beta+\gamma^2)t}d_\alpha(\beta)\Omega_\alpha(\beta)d\beta\sigma_1a_1^2,$$
$$v_{\alpha,1}(r)=r^{-\alpha}\cos(b_1\ln r),\ v_{\alpha,2}(r)=r^{-\alpha}\sin(b_1\ln r),\ d_\alpha=\frac{b_2(\beta)c_{21}}{b_1(\beta)c_{11}}R^{2\alpha+1};$$

$$\mathcal{H}_{\alpha;12}(t,r,\rho)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\{[\omega_{\alpha,1}v_{\alpha,1}(r)-\omega_{\alpha,2}v_{\alpha,2}(r)]\sin b_2(\rho-R)-$$
$$-[\omega_{\alpha,1}v_{\alpha,2}(r)+\omega_{\alpha,2}v_{\alpha,1}(r)]\cos b_2(\rho-R)\}c_{21}b_2(\beta)e^{-(\beta+\gamma^2)t}\Omega_\alpha(\beta)d\beta\ a_2^2\sigma_2;$$
$$\mathcal{H}_{\alpha;22}(t,r,\rho)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[f_{\alpha,21}(\beta)\cos b_2(r-R)\cos b_2(\rho-R)+\right.$$
$$\left.+f_{\alpha,22}(\beta)\sin b_2(r-R)\sin b_2(\rho-R)-b_2f_{\alpha,23}(\beta)\sin b_2(r+\rho-2R)\right]\times \tag{28}$$
$$\times e^{-(\beta+\gamma^2)t}\Omega_\alpha(\beta)d\beta\ a_2^2\sigma_2.$$

Будемо вимагати виконання рівностей:

$$\mathcal{H}_{\alpha;jk}(t,r,\rho)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-(\beta+\gamma^2)t}\,\mathrm{Re}\Big[V_{\alpha;j}(r,\beta)\overline{V_{\alpha;k}(\rho,\beta)}\Big]\Omega_\alpha(\beta)d\beta\, a_k^2\sigma_k\,, \quad (29)$$

де $V_{\alpha;jk}(r,\beta)$, $j,k=1,2$, визначені формулами (7), а риска зверху означає комплексне спряження.

Для визначення величин A_j, B_j, C_j та D_j ($j=1,2$) одержуємо алгебраїчну систему рівнянь:

$$A_1^2+C_1^2=d_\alpha f_{\alpha,11}(\beta), \quad (30_1)$$

$$B_1^2+D_1^2=d_\alpha f_{\alpha,12}(\beta), \quad (30_2)$$

$$A_1B_1+C_1D_1=-d_\alpha f_{\alpha,13}(\beta), \quad (30_3)$$

$$A_1A_2+C_1C_2=-c_{21}b_2(\beta)\omega_{\alpha,2}(\beta), \quad (30_4)$$

$$B_1A_2+C_1D_2=-c_{21}b_2\omega_{\alpha,1}(\beta), \quad (30_5)$$

$$A_1B_2+C_1D_2=c_{21}b_2\omega_{\alpha,1}(\beta), \quad (30_6)$$

$$B_1B_2+D_1D_2=-c_{21}b_2\omega_{\alpha,2}(\beta), \quad (30_7)$$

$$A_2^2+C_2^2=f_{\alpha,21}(\beta), \quad (30_8)$$

$$B_2^2+D_2^2=f_{\alpha,22}(\beta), \quad (30_9)$$

$$A_2B_2+C_2D_2=-b_2f_{\alpha,23}(\beta). \quad (30_{10})$$

Розглянемо алгебраїчну систему із семи рівнянь (30_4)-(30_{10}). Покладемо $C_2=0$. Одержуємо:

$$A_2=\sqrt{f_{\alpha,21}(\beta)}\,,\ B_2=-b_2f_{\alpha,23}\big(f_{\alpha,21}(\beta)\big)^{-1},\ C_2=0,$$

$$D_2=\Big[f_{\alpha,22}-b_2^2f_{\alpha,23}^2\big(f_{\alpha,21}(\beta)\big)^{-1}\Big]^{1/2}=\left(\frac{f_{\alpha,22}f_{\alpha,21}-b_2^2f_{\alpha,23}^2}{f_{\alpha,21}}\right)^{1/2}=$$

$$=\left[\frac{c_{21}b_2c_{11}b_1}{R^{2\alpha+1}f_{\alpha,21}}\left(\omega_{\alpha,1}^2+\omega_{\alpha,2}^2\right)\right]^{1/2},$$

$$A_1=-c_{21}b_2\omega_{\alpha,2}(\beta)\big(f_{\alpha,21}(\beta)\big)^{-1/2},\ B_1=-c_{21}b_2\omega_{\alpha,1}(\beta)\big(f_{\alpha,21}(\beta)\big)^{-1/2},$$

$$C_1=\frac{c_{21}b_2\left(f_{\alpha,21}\omega_{\alpha,1}-b_2f_{\alpha,23}\omega_{\alpha,2}\right)}{\sqrt{f_{\alpha,21}\left(f_{\alpha,21}f_{\alpha,22}-b_2^2f_{\alpha,23}^2\right)}}=\sqrt{\frac{c_{21}b_2R^{2\alpha+1}\left(\omega_{\alpha,1}^2+\omega_{\alpha,2}^2\right)}{c_{11}b_1f_{\alpha,21}(\beta)}}\,b_2e_{\alpha,12}(\beta),$$

$$D_1=-\frac{c_{21}b_2\left(f_{\alpha,21}\omega_{\alpha,2}+b_2f_{\alpha,23}\omega_{\alpha,1}\right)}{\sqrt{f_{\alpha,21}\left(f_{\alpha,21}f_{\alpha,22}-b_2^2f_{\alpha,23}^2\right)}}=-\sqrt{\frac{c_{21}b_2R^{2\alpha+1}\left(\omega_{\alpha,1}^2+\omega_{\alpha,2}^2\right)}{c_{11}b_1f_{\alpha,21}(\beta)}}\,b_2e_{\alpha,11}(\beta).$$

Покажемо тепер, що при такому визначенні величин A_j, B_j, C_j та D_j ($j=1,2$) рівняння (30_1)-(30_2) перетворюються в тотожну рівність.

Безпосередніми підрахунками маємо:

1) $$A_1^2+C_1^2=\frac{c_{21}^2b_2^2\omega_{\alpha,2}^2}{f_{\alpha,21}(\beta)}+\frac{c_{21}^2b_2^2\left(f_{\alpha,21}\omega_{\alpha,1}-b_2f_{\alpha,23}\omega_{\alpha,2}\right)^2}{f_{\alpha,21}(\beta)\left(f_{\alpha,22}f_{\alpha,21}-b_2^2f_{\alpha,23}^2\right)}=\frac{c_{21}^2b_2^2}{f_{\alpha,21}(\beta)}\times$$

$$\frac{f_{\alpha,21}f_{\alpha,22}\omega_{\alpha,2}^2-b_2^2f_{\alpha,23}^2\omega_{\alpha,2}^2+f_{\alpha,21}^2\omega_{\alpha,1}^2-2b_2f_{\alpha,21}f_{\alpha,23}\omega_{\alpha,1}\omega_{\alpha,2}+b_2^2f_{\alpha,23}^2\omega_{\alpha,2}^2}{f_{\alpha,22}f_{\alpha,21}-b_2^2f_{\alpha,23}^2}$$

$$=\frac{c_{21}^2b_2^2R^{2\alpha+1}}{c_{11}c_{21}b_1b_2\left(\omega_{\alpha,1}^2+\omega_{\alpha,2}^2\right)}\left[f_{\alpha,22}\omega_{\alpha,2}^2-b_2f_{\alpha,23}\omega_{\alpha,1}\omega_{\alpha,2}+\right.$$

$$\left.+f_{\alpha,21}\omega_{\alpha,1}^2-b_2f_{\alpha,23}\omega_{\alpha,1}\omega_{\alpha,2}\right]=\frac{c_{21}b_2^2R^{2\alpha+1}}{\left(\omega_{\alpha,1}^2+\omega_{\alpha,2}^2\right)c_{11}b_1b_2}\left[b_2e_{\alpha,12}\omega_{\alpha,1}-\right.$$

$$\left.-e_{\alpha,22}\omega_{\alpha,2}\right]\left(\omega_{\alpha,1}^2+\omega_{\alpha,2}^2\right)=\frac{c_{21}b_2}{c_{11}b_1}R^{2\alpha+1}f_{\alpha,11}(\beta)\equiv d_\alpha(\beta)f_{\alpha,11}(\beta);$$

2) $$B_1^2+D_1^2=\frac{c_{21}^2b_2^2\omega_{\alpha,1}^2}{f_{\alpha,21}(\beta)}+\frac{c_{21}^2b_2^2\left(f_{\alpha,21}\omega_{\alpha,2}+b_2f_{\alpha,23}\omega_{\alpha,1}\right)^2}{f_{\alpha,21}(\beta)\left(f_{\alpha,22}f_{\alpha,21}-b_2^2f_{\alpha,23}^2\right)}=$$

$$=\frac{c_{21}^2b_2^2R^{2\alpha+1}}{f_{\alpha,21}(\beta)c_{11}c_{21}b_1b_2\left(\omega_{\alpha,1}^2+\omega_{\alpha,2}^2\right)}\left[f_{\alpha,21}f_{\alpha,22}\omega_{\alpha,1}^2-b_2^2f_{\alpha,23}^2\omega_{\alpha,1}^2\right.$$

$$\left.+f_{\alpha,21}^2\omega_{\alpha,2}^2+2b_2f_{\alpha,21}f_{\alpha,23}\omega_{\alpha,1}\omega_{\alpha,2}+b_2^2f_{\alpha,23}^2\omega_{\alpha,1}^2\right]=$$

$$=\frac{c_{21}b_2}{c_{11}b_1}R^{2\alpha+1}\frac{1}{\omega_{\alpha,1}^2+\omega_{\alpha,2}^2}\left[\omega_{\alpha,1}\left(f_{\alpha,22}\omega_{\alpha,1}+b_2f_{\alpha,23}\omega_{\alpha,2}\right)+\right.$$

$$\left.+\omega_{\alpha,2}\left(f_{\alpha,21}\omega_{\alpha,2}+b_2f_{\alpha,23}\omega_{\alpha,1}\right)\right]=d_\alpha(\beta)\frac{1}{\omega_{\alpha,1}^2+\omega_{\alpha,2}^2}\left(\omega_{\alpha,1}^2+\omega_{\alpha,2}^2\right)\times$$

$$\times\left(e_{\alpha,21}\omega_{\alpha,1}+b_2e_{\alpha,11}\omega_{\alpha,2}\right)\equiv d_\alpha(\beta)f_{\alpha,12}(\beta);$$

3) $$A_1B_1+C_1D_1=\frac{c_{21}^2b_2^2\omega_{\alpha,1}\omega_{\alpha,2}}{f_{\alpha,21}(\beta)}+\frac{c_{21}^2b_2^2\left(-f_{\alpha,21}\omega_{\alpha,1}+b_2f_{\alpha,23}\omega_{\alpha,2}\right)}{f_{\alpha,21}\left(f_{\alpha,22}f_{\alpha,21}-b_2^2f_{\alpha,23}^2\right)}\times$$

$$\times\left[f_{\alpha,21}\omega_{\alpha,2}+b_2f_{\alpha,23}\omega_{\alpha,1}\right]=\frac{c_{21}b_2R^{\alpha+1}}{f_{\alpha,21}(\beta)c_{11}b_1}\frac{1}{\omega_{\alpha,1}^2+\omega_{\alpha,2}^2}\times$$

$$\times\left[\omega_{\alpha,1}\omega_{\alpha,2}\left(f_{\alpha,22}f_{\alpha,21}-b_2^2f_{\alpha,23}^2\right)-f_{\alpha,21}^2\omega_{\alpha,1}\omega_{\alpha,2}-b_2f_{\alpha,21}f_{\alpha,23}\omega_{\alpha,1}^2+\right.$$

$$\left.+b_2f_{\alpha,21}f_{\alpha,23}\omega_{\alpha,2}^2+b_2^2f_{\alpha,23}^2\omega_{\alpha,1}\omega_{\alpha,2}\right]=\frac{d_\alpha(\beta)}{\omega_{\alpha,1}^2+\omega_{\alpha,2}^2}\left[\omega_{\alpha,1}\omega_{\alpha,2}f_{\alpha,22}-\right.$$

$$\left.-f_{\alpha,21}\omega_{\alpha,1}\omega_{\alpha,2}-b_2f_{\alpha,23}\omega_{\alpha,1}^2+b_2f_{\alpha,23}\omega_{\alpha,2}^2\right]=$$

$$= \frac{d_\alpha(\beta)}{\omega_{\alpha,1}^2 + \omega_{\alpha,2}^2}\left[\omega_{\alpha,1}\left(\omega_{\alpha,2} f_{\alpha,22} - b_2 f_{\alpha,23}\omega_{\alpha,1}\right) + \omega_{\alpha,2}\left(b_2 f_{\alpha,23}\omega_{\alpha,2} -\right.\right.$$

$$\left.\left.- f_{\alpha,21}\omega_{\alpha,1}\right)\right] = -d_\alpha(\beta)\left(\omega_{\alpha,1} e_{\alpha,22} + b_2 e_{\alpha,12}\omega_{\alpha,2}\right) \equiv -d_\alpha(\beta) f_{\alpha,11}(\beta).$$

Підставимо обчислені значення A_j, B_j, C_j та D_j (j = 1, 2) у формули (7). Одержимо:

$$V_{\alpha;1}(r,\beta) = -c_{21} b_2 \left[f_{\alpha,21}(\beta)\right]^{-1/2}\left[\omega_{\alpha,2}(\beta) r^{-\alpha}\cos(b_1 \ln r) + \right.$$

$$\left. + \omega_{\alpha,1}(\beta) r^{-\alpha}\sin(b_1\ln r)\right] + i\sqrt{\frac{c_{21} b_2 R^{2\alpha+1}\left(\omega_{\alpha,1}^2 + \omega_{\alpha,2}^2\right)}{c_{11} b_1 f_{\alpha,21}(\beta)}}\, b_2 \times \qquad (31)$$

$$\times\left[e_{\alpha,12} r^{-\alpha}\cos(b_1\ln r) - e_{\alpha,11} r^{-\alpha}\sin(b_1 \ln r)\right] \equiv V_{\alpha;11}(r,\beta) + iV_{\alpha;12}(r,\beta),$$

$$V_{\alpha;2}(r,\beta) = \left[f_{\alpha,21}(\beta)\right]^{-1/2}\left[f_{\alpha,21}(\beta)\cos b_2(r-R) - b_2 f_{\alpha,23}(\beta)\sin b_2(r-R)\right] +$$

$$+ i\left[\frac{c_{11}c_{21}b_1 b_2}{R^{2\alpha+1} f_{\alpha,21}(\beta)}\left(\omega_{\alpha,1}^2 + \omega_{\alpha,2}^2\right)\right]^{1/2}\sin b_2(r-R) \equiv V_{\alpha;21}(r,\beta) + iV_{\alpha;22}(r,\beta).$$

Перевіримо виконання умов спряження.

Безпосередніми підрахунками встановлюємо:

$$\left(\alpha_{11}^1\frac{d}{dr} + \beta_{11}^1\right)V_{\alpha;11}(r,\beta)\Big|_{r=R} = -c_{21}b_2\left(f_{\alpha,21}\right)^{-1/2}\left[\omega_{\alpha,2}Y_{\alpha,11}^{11} + \omega_{\alpha,1}Y_{\alpha,11}^{12}\right],$$

$$\left(\alpha_{12}^1\frac{d}{dr} + \beta_{12}^1\right)V_{\alpha;21}(r,\beta)\Big|_{r=R} = \left(f_{\alpha,21}\right)^{-1/2}\left[\beta_{12}^1 f_{\alpha,21} - \alpha_{12}^1 b_2^2 f_{\alpha,23}\right] =$$

$$= \left(f_{\alpha,21}\right)^{-1/2}\left[\beta_{12}^1 b_2\left(e_{\alpha,11}\omega_{\alpha,2} + e_{\alpha,12}\omega_{\alpha,1}\right) - \alpha_{12}^1 b_2\left(e_{\alpha,22}\omega_{\alpha,1} + e_{\alpha,21}\omega_{\alpha,2}\right)\right] =$$

$$= \left(f_{\alpha,21}\right)^{-1/2} b_2\left[\left(\beta_{12}^1 e_{\alpha,11} - \alpha_{12}^1 e_{\alpha,21}\right)\omega_{\alpha,2} + \left(\beta_{21}^1 e_{\alpha,12} - \alpha_{12}^1 e_{\alpha,22}\right)\omega_{\alpha,1}\right] =$$

$$= -c_{21}b_2\left(f_{\alpha,21}\right)^{-1/2}\left[\omega_{\alpha,2}Y_{\alpha,11}^{11} + \omega_{\alpha,1}Y_{\alpha,11}^{12}\right] = \left(\alpha_{11}^1\frac{d}{dr} + \beta_{11}^1\right)V_{\alpha;11}(r,\beta)\Big|_{r=R};$$

$$\left(\alpha_{11}^1\frac{d}{dr} + \beta_{11}^1\right)V_{\alpha;12}\Big|_{r=R} = \sqrt{\frac{c_{11}b_1c_{21}b_2(\omega_{\alpha,1}^2 + \omega_{\alpha,2}^2)}{f_{\alpha,21}(\beta)R^{2\alpha+1}}}\, b_2\alpha_{12},$$

$$\left(\alpha_{12}^1\frac{d}{dr} + \beta_{12}^1\right)V_{\alpha;22}\Big|_{r=R} = \sqrt{\frac{c_{11}c_{21}b_1b_2\left(\omega_{\alpha,1}^2 + \omega_{\alpha,2}^2\right)}{f_{\alpha,21}(\beta)R^{2\alpha+1}}}\,\alpha_{12}b_2 \equiv$$

$$\equiv \left(\alpha_{11}^1\frac{d}{dr} + \beta_{11}^1\right)V_{\alpha;12}\Big|_{r=R}.$$

Аналогічно перевіряється рівність

$$\left.\left(\alpha_{21}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{21}^1\right) V_{\alpha;1}(r,\beta)\right|_{r=R} = \left.\left(\alpha_{22}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{22}^1\right) V_{\alpha;2}(r,\beta)\right|_{r=R} .$$

Розв'язок (25) параболічної задачі має інтегральне зображення:

$$u_j(t,r) = \int_0^R \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t} \operatorname{Re}\left[V_{\alpha;j}(r,\beta)\overline{V_{\alpha;1}(\rho,\beta)}\right]\Omega_\alpha(\beta)d\beta\right) g_1(\rho)\sigma_1\rho^{2\alpha-1}d\rho +$$

$$+\int_R^\infty \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t} \operatorname{Re}\left[V_{\alpha;j}(r,\beta)\overline{V_{\alpha;2}(\rho,\beta)}\right]\Omega_\alpha(\beta)d\beta\right) g_2(\rho)\sigma_2 d\rho .$$

В силу початкових умов (9) маємо інтегральні зображення:

$$g_1(r) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \operatorname{Re}\left[V_{\alpha;1}(r,\beta)\int_0^R g_1(\rho)\overline{V_{\alpha;1}(\rho,\beta)}\sigma_1\rho^{2\alpha-1}d\rho \right]\Omega_\alpha(\beta)d\beta ,$$

$$g_2(r) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \operatorname{Re}\left[V_{\alpha;2}(r,\beta)\int_R^\infty g_2(\rho)\overline{V_{\alpha;2}(\rho,\beta)}\sigma_2 d\rho \right]\Omega_\alpha(\beta)d\beta .$$

Звідси одержуємо інтегральне зображення вектор-функції $g(r) = \theta(r)\theta(R-r)g_1(r) + \theta(r-R_1)g_2(r)$:

$$g(r) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \operatorname{Re}\left[V_\alpha(r,\beta)\int_0^\infty g(\rho)\overline{V_\alpha(\rho,\beta)}\sigma(\rho)d\rho \right]\Omega_\alpha(\beta)d\beta . \qquad (32)$$

Теорема 1 (про інтегральне зображення). Якщо вектор-функція $f(r) = \left[\theta(r)\theta(R-r)r^{\alpha-1/2} + \theta(r-R_1)\cdot 1\right] g(r)$ неперервна, абсолютно сумовна й має обмежену варіацію на множині (0, ∞), то для будь-якого $r \in I_1^+$ справджується інтегральне зображення (32).

Інтегральне зображення (32) визначає пряме $H_{\alpha,1}$ та обернене $H_{\alpha,1}^{-1}$ гібридне інтегральне перетворення, породжене на множині I_1^+ ГДО $\mathcal{M}_\alpha$:

$$H_{\alpha,1}[g(r)] = \int_0^\infty g(\rho)\overline{V_\alpha(\rho,\beta)}\sigma(r)dr \equiv \tilde{g}(\beta). \qquad (33)$$

$$H_{\alpha,1}^{-1}[\tilde{g}(\beta)] = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \operatorname{Re}\left[V_\alpha(r,\beta)\tilde{g}(\beta)\right]\Omega_\alpha(\beta)d\beta \equiv g(r). \qquad (34)$$

Застосування запровадженого гібридного інтегрального перетворення до розв'язання відповідних задач математичної фізики базується на основній тотожності інтегрального перетворення ГДО $\mathcal{M}_\alpha$.

Теорема 2 (про основну тотожність). Якщо вектор-функція

$$f(r)=\theta(r)\theta(R-r)g_1(r)+\theta(r-R_1)g_2(r)$$

неперервна на множині I_1^+, а функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження (2) та умови обмеження (3), то справджується основна тотожність інтегрального перетворення ГДО $\mathcal{M}_\alpha$:

$$H_{\alpha,1}[\mathcal{M}_\alpha[g(r)]]=-\beta^2\tilde{g}(\beta)-k_1^2\int_0^R g_1(r)\overline{V_{\alpha;1}(r,\beta)}\sigma_1 r^{2\alpha-1}dr-$$

$$-k_2^2\int_R^\infty g_2(r)\overline{V_{\alpha;2}(r,\beta)}\sigma_2 dr+\frac{1}{c_{21}}\left[\overline{Z_{\alpha;12}^1(\beta)}\omega_{21}-\overline{Z_{\alpha;22}^1(\beta)}(\beta)\omega_{11}\right], \quad (35)$$

$$\overline{Z_{\alpha;i2}^1(\beta)}=\left(\alpha_{i2}^1\frac{d}{dr}+\beta_{i2}^1\right)\overline{V_{\alpha;2}(r,\beta)}\Big|_{r=R}, \; i=1,2.$$

Доведення. Тотожність (35) одержуємо, якщо проінтегрувати під знаком інтегралів

$$\int_0^R a_1^2 B_\alpha[g_1(r)]\overline{V_{\alpha;1}(r,\beta)}\sigma_1 r^{2\alpha-1}dr+\int_R^\infty a_2^2\frac{d^2g_2}{dr}\overline{V_{\alpha;2}(r,\beta)}\sigma_2 dr$$

два рази частинами й скористатися властивостями функцій $g_j(r)$, $\overline{V_{\alpha;j}(r,\beta)}$ ($j=1, 2$) та структурою σ_1, σ_2.

Застосування запровадженого формулами (33), (34) гібридного інтегрального перетворення до розв’язання відповідних задач математичної фізики подамо в іншій роботі.

Список використаних джерел:

1. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.
2. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – К.: Наук. думка, 1965. – 798 с.
3. Ленюк М. П., Шинкарик М. І. Гібридні інтегральні перетворення (Фур’є, Бесселя, Лежандра). Частина 1. – Тернопіль: Економічна думка, 2004. – 368 с.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
5. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
6. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 328 с.
7. Уфлянд Я. С. О некоторых новых интегральных преобразованиях и их приложениях к задачам математической физики // Вопросы математической физики. – Л., 1976. – С.93-106.

The hybrid integrated Euler-Fourier type transformation on a polar axis with one junction point is realized by means of the delta-like sequence method (Cauchy kernel).

Key words: *the hybrid differential operator, hybrid integrated transformation, Cauchy kernel, influence functions, spectral function, the integrated image, the basic identity.*

Отримано: 03.06.2008

УДК 519.217

К. К. Омарова

Институт кибернетики Национальной академии наук Азербайджана, г. Баку

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА ЭРГОДИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТУПЕНЧАТОГО ПРОЦЕССА ПОЛУМАРКОВСКОГО БЛУЖДАНИЯ С ЗАДЕРЖИВАЮЩИМ ЭКРАНОМ В НУЛЕ

По заданной последовательности независимых одинаково распределенных пар случайных величин строится ступенчатый процесс полумарковского блуждания с задерживающим экраном в нуле.

Ключевые слова: *случайная величина, ступенчатый процесс, блуждание, задерживающий экран, распределение.*

Введение. Нахождению эргодического распределения ступенчатых процессов полумарковского блуждания с экраном или с экранами посвящены немало работ. Основную эргодическую теорему для полумарковских процессов доказал В. А. Смит. Общая эргодическая теорема доказана И. И. Гихманом и А. В. Скороходом [2, с.427-429]. В работе И. И. Ежова и В. М. Шуренкова [3, с.640-642] дано упрощенное доказательство этой теоремы. В работах А. А. Боровкова [1, с.652-653; 4, с.141-147] и других авторов изучены эргодические теоремы для процессов полумарковских блужданий с задерживающими экранами. В работе А. В. Скорохода и Т. И. Насировой [5, с.134-136] доказаны эргодические теоремы для сложного процесса полумарковского блуждания с задерживающим экраном в нуле. Некоторые дальнейшие развитие указанной работы опубликовано в [6].

В данной работе находятся явные виды преобразований Лапласа по времени, преобразований Лапласа-Стилтьеса по фазе условного распределения, безусловного распределения и явный вид преобразования Лапласа эргодического распределения ступенчатого процесса