УДК 517.443

М. П. Ленюк[1], М. І. Шинкарик[2]

[1]*Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича*
[2]*Тернопільський національний економічний університет*

ПІДСУМОВУВАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РЯДІВ ЗА ВЛАСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ ГІБРИДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА БЕССЕЛЯ-ЕЙЛЕРА НА СЕГМЕНТІ ПОЛЯРНОЇ ОСІ

Методом порівняння розв'язку крайової задачі для системи диференціальних рівнянь Бесселя та Ейлера на сегменті $[0, R_2]$ полярної осі з однією точкою спряження $r = R_1 < R_2$, побудованого, з одного боку, методом функцій Коші, а, з другого боку, методом відповідного скінченного гібридного інтегрального перетворення (СГІП) підсумовано поліпараметричну сім'ю функціональних рядів за власними елементами відповідного гібридного диференціального оператора.

Ключові слова: *функціональні ряди, функції Коші, головні розв'язки крайової задачі, умова однозначної розв'язності, власні елементи гібридного диференціального оператора, основна тотожність, логічна схема.*

Постановка проблеми та її аналіз. Тонкостінні елементи конструкцій композитного типу, як правило, знаходяться в короткочасовому стаціонарному режимі, на який вони виходять після стрибкоподібного температурного або силового навантаження. Вивчення їх фізико-технічних характеристик приводить до задач термомеханіки (механіки) кусково-однорідних середовищ. Практика показує, що навіть у найпростіших випадках величини, які характеризують стаціонарний режим елемента, зображаються поліпараметричним функціональним рядом, який може бути умовно збіжним навіть тоді, коли зображає аналітичну функцію. Звідси природне бажання замінити функціональний ряд його результатом збіжності (функцією), що особливо важливо для інженерних розрахунків. Підсумовуванню однієї сім'ї функціональних рядів присвячена дана стаття.

Основна частина. Розглянемо задачу про побудову обмеженого на множині $I_1 = \{r : r \in (0, R_1) \cup (R_1, R_2); R_2 < \infty\}$ розв'язку сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь Бесселя та Ейлера для модифікованих функцій

$$\left(B_{\nu,\alpha_1} - q_1^2\right)u_1(r) = -g_1(r), \; r \in (0, R_1),$$
$$\left(B_{\alpha_2}^* - q_2^2\right)u_2(r) = -g_2(r), \; r \in (R_1, R_2) \qquad (1)$$

за крайовими умовами

$$\lim_{r\to 0}\left[r^{\gamma}u_1(r)\right]=0\,,\ \left(\alpha_{22}^2\frac{d}{dr}+\beta_{22}^2\right)u_2(r)\Big|_{r=R_2}=g_R \qquad (2)$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^1\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^1\right)u_1(r)-\left(\alpha_{j2}^1\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^1\right)u_2(r)\right]\Big|_{r=R_1}=\omega_{j1}\,,\ j=1,2. \qquad (3)$$

У рівностях (1)-(3) $q_m > 0$, $c_{11}c_{21} > 0$, $c_{j1} = \alpha_{2j}^1\beta_{1j}^1-\alpha_{1j}^1\beta_{2j}^1$;

$$B_{\nu,\alpha_1}=\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2\alpha_1+1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{\nu^2-\alpha_1^2}{r^2}\,,\ B_{\alpha_2}^*=r^2\frac{d^2}{dr^2}+(2\alpha_2+1)r\frac{d}{dr}+\alpha_2^2\,,$$

B_{ν,α_1} – диференціальний оператор Бесселя, $B_{\alpha_2}^*$ – диференціальний оператор Ейлера [2], $2\alpha_j + 1 > 0$, $\nu \geq \alpha_1 > -1/2$, $(\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2)$.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя $\left(B_{\nu,\alpha_1}-q_1^2\right)v=0$ утворюють модифіковані функції Бесселя 1-го роду $I_{\nu,\alpha_1}(q_1 r)$ та 2-го роду $K_{\nu,\alpha_1}(q_1 r)$ [1]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $\left(B_{\alpha_2}^*-q_2^2\right)v=0$ утворюють функції $v_1=r^{-\alpha_2-q_2}$ та $v_2=r^{-\alpha_2+q_2}$ [2].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дозволяє будувати розв'язок крайової задачі (1)-(3) методом функцій Коші [2, 3]:

$$u_1(r)=A_1 I_{\nu,\alpha_1}(q_1 r)+\int_0^{R_1}E_1(r,\rho)g_1(\rho)\rho^{2\alpha_1+1}d\rho\,,$$

$$u_2(r)=A_2 r^{-q_2-\alpha_2}+B_2 r^{q_2-\alpha_2}+\int_{R_1}^{R_2}E_2(r,\rho,q_2)g_2(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho\,. \qquad (4)$$

Тут $E_j(r, \rho)$ – функції Коші [2, 3]:

$$E_j(r,\rho)\big|_{r=\rho+0}-E_j(r,\rho)\big|_{r=\rho-0}=0\,,$$

$$\frac{dE_j(r,\rho)}{dr}\Big|_{r=\rho+0}-\frac{dE_j(r,\rho)}{dr}\Big|_{r=\rho-0}=-\rho^{-(2\alpha_j+1)}\,. \qquad (5)$$

Припустимо, що функція Коші

$$E_1(r,\rho)=\begin{cases}\overset{-}{E}_1\equiv C_1 I_{\nu,\alpha_1}(q_1 r)+D_1 K_{\nu,\alpha_1}(q_1 r), & 0<r<\rho<R_1,\\ \overset{+}{E}_1\equiv C_2 I_{\nu,\alpha_1}(q_1 r)+D_2 K_{\nu,\alpha_1}(q_1 r), & 0<\rho<r<R_1.\end{cases}$$

Величина $D_1 = 0$ в силу умови обмеження в точці $r = 0$. Для знаходження величин C_1, C_2 та D_2 властивості (5) дають алгебраїчну систему рівнянь:

$$(C_2 - C_1)I_{\nu,\alpha_1}(q_1\rho) + (D_2 - D_1)K_{\nu,\alpha_1}(q_1\rho) = 0,$$

$$(C_2 - C_1)I'_{\nu,\alpha_1}(q_1\rho) + (D_2 - D_1)K'_{\nu,\alpha_1}(q_1\rho) = -\frac{1}{q_1\rho^{2\alpha_1+1}}.$$

Звідси одержуємо співвідношення:

$$C_2 - C_1 = -q_1^{2\alpha_1}K_{\nu,\alpha_1}(q_1\rho),\ D_2 - D_1 = q_1^{2\alpha_1}I_{\nu,\alpha_1}(q_1\rho). \tag{6}$$

Доповнимо систему (6) алгебраїчним рівнянням:

$$\left(\alpha_{11}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^1\right)\overset{+}{E}_1(r,\rho)\Big|_{r=R_1} = 0 : U_{\nu,\alpha_1;11}^{11}(q_1R_1)C_2 + U_{\nu,\alpha_1;11}^{12}(q_1R_1)D_2 = 0. \tag{7}$$

Із алгебраїчної системи (6), (7) знаходимо, що:

$$C_1 = \left[U_{\nu,\alpha_1;11}^{11}(q_1R_1)\right]^{-1} q_1^{2\alpha_1}\Psi_{\nu,\alpha_1;11}^{1*}(q_1R_1, q_1\rho).$$

Цим функція Коші $E_1(r, \rho)$ визначена й внаслідок симетрії відносно діагоналі $r = \rho$ має структуру:

$$E_1(r,\rho) = \frac{q_1^{2\alpha_1}}{U_{\nu,\alpha_1;11}^{11}(q_1R_1)}\begin{cases} I_{\nu,\alpha_1}(q_1r)\Psi_{\nu,\alpha_1;11}^{1*}(q_1R_1, q_1\rho), & 0 < r < \rho < R_1, \\ I_{\nu,\alpha_1}(q_1\rho)\Psi_{\nu,\alpha_1;11}^{1*}(q_1R_1, q_1r), & 0 < \rho < r < R_1. \end{cases} \tag{8}$$

У рівностях (7), (8) беруть участь функції Коші [2, 3]:

$$U_{\nu,\alpha_1;jk}^{m1}(q_1R_m) = \left(\alpha_{jk}^m \frac{\nu - \alpha_1}{R_m} + \beta_{jk}^m\right)I_{\nu,\alpha_1}(q_1R_m) + \alpha_{jk}^m R_m q_1^2 I_{\nu+1,\alpha_1+1}(q_1R_m),$$

$$U_{\nu,\alpha_1;jk}^{m2}(q_1R_m) = \left(\alpha_{jk}^m \frac{\nu - \alpha_1}{R_m} + \beta_{jk}^m\right)K_{\nu,\alpha_1}(q_1R_m) - \alpha_{jk}^m R_m q_1^2 K_{\nu+1,\alpha_1+1}(q_1R_m),$$

$$\Psi_{\nu,\alpha_1;jk}^{m*}(q_1R_m, q_1r) = U_{\nu,\alpha_1;jk}^{m1}(q_1R_m)K_{\nu,\alpha_1}(q_1r) - U_{\nu,\alpha_1;jk}^{m2}(q_1R_m)I_{\nu,\alpha_1}(q_1r).$$

Нехай функція Коші

$$E_2(r,\rho) = \begin{cases} \overset{-}{E}_2 \equiv C_1 r^{-\alpha_2 - q_2} + D_1 r^{-\alpha_2 + q_2}, & R_1 < r < \rho < R_2, \\ \overset{+}{E}_2 \equiv C_2 r^{-\alpha_2 - q_2} + D_2 r^{-\alpha_2 + q_2}, & R_1 < \rho < r < R_2. \end{cases}$$

Властивості (5) функції Коші для визначення величин C_j, D_j ($j = 1, 2$) дають алгебраїчну систему з двох рівнянь:

$$(C_2 - C_1)\rho^{-\alpha_2 - q_2} + (D_2 - D_1)\rho^{-\alpha_2 + q_2} = 0,$$

$$(\alpha_2 + q_2)(C_2 - C_1)\rho^{-\alpha_2 - q_2} + (D_2 - D_1)(\alpha_2 - q_2)\rho^{-\alpha_2 + q_2} = \rho^{-2\alpha_2}.$$

Звідси отримуємо співвідношення:

$$C_2 - C_1 = (2q_2)^{-1}\rho^{-\alpha_2 + q_2},\ D_2 - D_1 = -(2q_2)^{-1}\rho^{-\alpha_2 - q_2}. \tag{9}$$

Доповнимо систему (9) алгебраїчними рівняннями:

$$\begin{aligned}&\left(\alpha_{12}^1\frac{d}{dr}+\beta_{12}^1\right)\overset{-}{E}_2(r,\rho)\Big|_{r=R_1}=0: \\ &\left(\alpha_{12}^1\frac{d}{dr}+\beta_{12}^1\right)\overset{+}{E}_2(r,\rho)\Big|_{r=R_2}=0:\end{aligned}\begin{cases}Z_{\alpha_2;12}^{11}(q_2,R_1)C_1+Z_{\alpha_2;12}^{12}(q_2,R_1)D_1=0,\\ Z_{\alpha_2;22}^{21}(q_2,R_2)C_2+Z_{\alpha_2;22}^{22}(q_2,R_2)D_2=0.\end{cases}\qquad(10)$$

Алгебраїчна система (10) в силу рівностей (9) набуває структури:

$$Z_{\alpha_2;12}^{11}(q_2,R_1)C_1+Z_{\alpha_2;12}^{12}(q_2,R_1)D_1=0\ ,$$

$$Z_{\alpha_2;22}^{21}(q_2,R_2)C_2+Z_{\alpha_2;22}^{22}(q_2,R_2)D_2=\frac{1}{2q_2}\Psi_{\alpha_2;22}^{2*}(q_2,r).$$

Згідно правил Крамера маємо:

$$C_1=-\frac{Z_{\alpha_2;12}^{12}(q_2,R_1)}{2q_2\Delta_{\alpha_2;12}(q_2,R_1,R_2)}\Psi_{\alpha_2;22}^{2*}(q_2,r),$$

$$D_1=\frac{Z_{\alpha_2;12}^{11}(q_2,R_1)}{2q_2\Delta_{\alpha_2;12}(q_2,R_1,R_2)}\Psi_{\alpha_2;22}^{2*}(q_2,r).$$

Цим функція Коші $E_2(r,\rho)$ визначена й внаслідок симетрії відносно діагоналі $r=\rho$ має структуру:

$$E_2(r,\rho)=-\frac{1}{2q_2\Delta_{\alpha_2,12}(q_2,R_1,R_2)}\times$$

$$\times\begin{cases}\Psi_{\alpha_2;12}^{1*}(q_2,r)\Psi_{\alpha_2;22}^{2*}(q_2,\rho), & R_1<r<\rho<R_2,\\ \Psi_{\alpha_2;12}^{1*}(q_2,\rho)\Psi_{\alpha_2;22}^{2*}(q_2,r), & R_1<\rho<r<R_2.\end{cases}\qquad(11)$$

У рівностях (10), (11) беруть участь функції:

$$Z_{\alpha_2,j2}^{m1}(q_2,R_m)=\left(-\alpha_{j2}^m\frac{\alpha_2+q_2}{R_m}+\beta_{j2}^m\right)R_m^{-\alpha_2-q_2}\equiv$$

$$\equiv\left(\alpha_{j2}^1\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^1\right)r^{-\alpha_2-q_2}\Big|_{r=R_m},$$

$$Z_{\alpha_2,j2}^{m2}(q_2,R_m)=\left(-\alpha_{j2}^m\frac{\alpha_2-q_2}{R_m}+\beta_{j2}^m\right)R_m^{-\alpha_2+q_2}\equiv$$

$$\equiv\left(\alpha_{j2}^m\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^m\right)r^{-\alpha_2+q_2}\Big|_{r=R_m},$$

$$\Psi_{\alpha_2,j2}^{m*}(q_2,r)=Z_{\alpha_2,j2}^{m2}(q_2,R_m)r^{-\alpha_2-q_2}-Z_{\alpha_2,j2}^{m2}(q_2,R_m)r^{-\alpha_2+q_2}\ ,j=1,\,2.$$

$$\Delta_{\alpha_2,j2}(q_2,R_1,R_2)=Z^{11}_{\alpha_2,j2}(q_2,R_1)Z^{22}_{\alpha_2,22}(q_2,R_2)-$$
$$-Z^{12}_{\alpha_2,j2}(q_2,R_1)Z^{21}_{\alpha_2,22}(q_2,R_2).$$

Повернемось до формул (4). Умови спряження (3) та крайова умова в точці $r = R_2$ дають для визначення трьох величин A_1, A_2 та B_2 алгебраїчну систему з трьох рівнянь:

$$U^{11}_{\nu,\alpha_1;11}(q_1R_1)A_1-Z^{11}_{\alpha_2;12}(q_2,R_1)A_2-Z^{12}_{\alpha_2;12}(q_2,R_1)B_2=\omega_{11},$$
$$U^{11}_{\nu,\alpha_1;21}(q_1R_1)A_1-Z^{11}_{\alpha_2;22}(q_2,R_1)A_2-Z^{12}_{\alpha_2;22}(q_2,R_1)B_2=\omega_{21}+G_{12}, \quad (12)$$
$$Z^{21}_{\alpha_2;22}(q_2,R_1)A_2+Z^{22}_{\alpha_2;22}(q_2,R_1)B_2=g_R.$$

У системі (12) бере участь функція

$$G_{12}=\frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\int_0^{R_1}\frac{I_{\nu,\alpha_1}(q_1\rho)}{U^{11}_{\nu,\alpha_1;11}(q_1R_1)}g_1(\rho)\rho^{2\alpha_1+1}d\rho+$$
$$+\frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha_2+1}}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Psi^{2*}_{\alpha_2;22}(q_2,\rho)}{\Delta\alpha_2;12(q_2,R_1,R_2)}g_2(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho.$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв’язності крайової задачі (1)-(3): визначник алгебраїчної системи (12)

$$\Delta_{\nu,(\alpha)}(q_1,q_2)\equiv U^{11}_{\nu,\alpha_1;21}(q_1R_1)\Delta_{\alpha_2;12}(q_2,R_1,R_2)-$$
$$-U^{11}_{\nu,\alpha_1;11}(q_1R_1)\Delta_{\alpha_2;22}(q_2,R_1,R_2)\neq 0 \quad (13)$$

для будь-якого ненульового вектора $\vec{q}=\{q_1;q_2\}$ [4].

Визначимо головні розв’язки крайової задачі (1)-(3):

1) породжені крайовою умовою в точці $r = R_2$ функції Гріна

$$W_{\nu,(\alpha);21}(r,q_1,q_2)=\frac{2q_2c_{21}}{R_1^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q_1,q_2)}I_{\nu,\alpha_1}(q_1r),$$
$$W_{\nu,(\alpha);22}(r,q_1,q_2)=\frac{1}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q_1,q_2)}\Big[U^{11}_{\nu,\alpha_1,11}(q_1R_1)\Psi^{1*}_{\alpha_2;22}(q_2,r)-$$
$$-U^{11}_{\nu,\alpha_1,21}(q_1R_1)\Psi^{1*}_{\alpha_2;12}(q_2,r)\Big], \quad (14)$$

2) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$\mathcal{R}^{1}_{\nu,(\alpha);11}(r,q_1,q_2)=-\frac{\Delta_{\alpha_2;22}}{\Delta_{\nu,(\alpha)}}I_{\nu,\alpha_1}(q_1r),$$
$$\mathcal{R}^{1}_{\nu,(\alpha);21}(r,q_1,q_2)=\frac{\Delta_{\alpha_2;12}}{\Delta_{\nu,(\alpha)}}I_{\nu,\alpha_1}(q_1r),$$

$$\mathcal{R}^{2}_{\nu,(\alpha);11}(r,q_1,q_2)=-\frac{U^{11}_{\nu,\alpha_1,21}(q_1R_1)}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q_1,q_2)}\Psi^{2*}_{\alpha_2;22}(q_2,r),$$

$$\mathcal{R}^{2}_{\nu,(\alpha);21}(r,q_1,q_2)=\frac{1}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q_1,q_2)}U^{11}_{\nu,\alpha_1,11}(q_1R_1)\Psi^{2*}_{\alpha_2;22}(q_2,r); \quad (15)$$

3) породжені неоднорідністю системи функції впливу

$$\mathcal{H}_{\nu,(\alpha);11}(r,\rho;q_1,q_2)=\frac{q_1^{2\alpha_1}}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q_1,q_2)}\begin{cases}I_{\nu,\alpha_1}(q_1r)\big[\Delta_{\alpha_2;12}\Psi^{1*}_{\nu,\alpha_1;21}(q_2R_1,q_1\rho)-\\ -\Delta_{\alpha_2;22}\Psi^{1*}_{\nu,\alpha_1;11}(q_1R_1,q_1\rho)\big], \quad 0<r<\rho<R_1,\\ I_{\nu,\alpha_1}(q_1\rho)\big[\Delta_{\alpha_2;12}\Psi^{1*}_{\nu,\alpha_1;21}(q_2R_1,q_1r)-\\ -\Delta_{\alpha_2;22}\Psi^{1*}_{\nu,\alpha_1;11}(q_1R_1,q_1r)\big], \quad 0<\rho<r<R_1,\end{cases}$$

$$\mathcal{H}_{\nu,(\alpha);12}(r,\rho;q_1,q_2)=\frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q_1,q_2)}I_{\nu,\alpha_1}(q_1r)\Psi^{2*}_{\alpha_2;22}(q_2,\rho),$$

$$\mathcal{H}_{\nu,(\alpha);21}(r,\rho;q_1,q_2)=\frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q_1,q_2)}I_{\nu,\alpha_1}(q_1\rho)\Psi^{2*}_{\alpha_2;22}(q_2,r), \quad (16)$$

$$\mathcal{H}_{(\alpha);22}(r,\rho;q_1,q_2)=$$

$$=\frac{1}{2q_2}\begin{cases}W_{\nu,(\alpha);22}(r,q_1,q_2)\Psi^{2*}_{\alpha_2;22}(q_2,\rho), & R_1<r<\rho<R_2,\\ W_{\nu,(\alpha);22}(\rho,q_1,q_2)\Psi^{2*}_{\alpha_2;22}(q_2,r), & R_1<\rho<r<R_2.\end{cases}$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (12), підстановки отриманих значень A_1, A_2 та B_2 у формули (4) маємо єдиний розв'язок крайової задачі (1)-(3) :

$$u_j(r)=W_{\nu,(\alpha);2j}(r,q_1,q_2)g_R+\mathcal{R}^{j}_{\nu,(\alpha);11}(r,q_1,q_2)\omega_{11}+$$

$$+\mathcal{R}^{j}_{\nu,(\alpha);21}(r,q_1,q_2)\omega_{21}+\int_0^{R_1}\mathcal{H}_{\nu,(\alpha);j1}(r,\rho;q_1,q_2)g_1(\rho)r^{2\alpha_1+1}d\rho+$$

$$+\int_{R_1}^{R_2}\mathcal{H}_{\nu,(\alpha);j2}(r,\rho;q_1,q_2)g_2(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho,\ j=1,2. \quad (17)$$

Побудуємо розв'язок крайової задачі (1)-(3) методом інтегрального перетворення, породженого на множині I_1 гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$\mathcal{M}_{\nu,(\alpha)}=\theta(r)\theta(R_1-r)B_{\nu,\alpha_1}+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)B^{*}_{\alpha_2}, \quad (18)$$

де $\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда [3].

Оператор $\mathcal{M}_{\nu,(\alpha)}$ як сполучення самоспряжених диференціальних операторів є самоспряженим і не має на множині I_1 особливих точок. Тому його спектр дискретний. Для знаходження власних чисел та власних функцій ГДО $\mathcal{M}_{\nu,(\alpha)}$ розглянемо спектральну задачу Штурма-Ліувалля: побудувати обмежений на множині I_1 розв'язок системи диференціальних рівнянь Бесселя та Ейлера для звичайних функцій:

$$\left[B_{\nu,\alpha_1}+b_1^2(\beta)\right]V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)=0\,,\ r\in(0,R_1),$$
$$\left[B_{\alpha_2}^*+b_2^2(\beta)\right]V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)=0\,,\ r\in(R_1,R_2) \qquad (19)$$

за крайовими умовами

$$\lim_{r\to 0}\left[r^{\gamma}V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)\right]=0\,,\left(\alpha_{22}^2\frac{d}{dr}+\beta_{22}^2\right)V_{\nu(\alpha);2}(r,\beta)\Big|_{r=R_2}=0 \qquad (20)$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^1\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^1\right)V_{\nu(\alpha);1}(r,\beta)-\left(\alpha_{j2}^1\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^1\right)V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)\right]\Big|_{r=R_1}=0\,, \qquad (21)$$

$$b_j^2=\beta^2+k_j^2\,,\ k_j^2\ge 0\,,\ j=1,\,2.$$

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння $\left(B_{\nu,\alpha_1}+b_1^2\right)v=0$ утворюють функції Бесселя 1-го роду $J_{\nu,\alpha_1}(b_1r)$ та 2-го роду $N_{\nu,\alpha_1}(b_1r)$ [1]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння $\left(B_{\alpha_2}^*+b_2^2\right)v=0$ утворюють функції $v_1=r^{-\alpha_2}\cos(b_2\ln r)$ та $v_2=r^{-\alpha_2}\sin(b_2\ln r)$ [2].

Визначимо функції:

$$u_{\nu,\alpha_1;j1}^{11}(b_1R_1)=\left(\alpha_{j1}^1\frac{\nu-\alpha_1}{R_1}+\beta_{j1}^1\right)J_{\nu,\alpha_1}(b_1R_1)-\alpha_{j1}^1b_1^2R_1J_{\nu+1,\alpha_1+1}(b_1R_1),$$

$$Y_{\alpha_2;j2}^{m1}(b_2,R_m)=\left[\left(\beta_{j2}^m-\alpha_{j2}^mR_m^{-1}\alpha_2\right)\cos(b_2\ln R_m)-\right.$$
$$\left.-b_2R_m^{-1}\alpha_{j2}^m\sin(b_2\ln R_m)\right]R_m^{-\alpha_2},$$

$$Y_{\alpha_2;j2}^{m2}(b_2,R_m)=\left[\left(\beta_{j2}^m-\alpha_{j2}^mR_m^{-1}\alpha_2\right)\sin(b_2\ln R_m)+\right.$$
$$\left.+b_2R_m^{-1}\alpha_{j2}^m\cos(b_2\ln R_m)\right]R_m^{-\alpha_2},$$

$$\delta_{\alpha_2;j2}(\beta)=Y_{\alpha_2;j2}^{11}(b_2,R_1)Y_{\alpha_2;22}^{22}(b_2,R_2)-$$
$$-Y_{\alpha_2;j2}^{12}(b_2,R_1)Y_{\alpha_2;22}^{21}(b_2,R_2),\ mj=1,2.$$

Якщо покласти

$$V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)=A_1J_{\nu,\alpha_1}(b_1,r),$$

$$V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)=A_2r^{-\alpha_2}\cos(b_2\ln r)+B_2r^{-\alpha_2}\sin(b_2\ln r), \qquad (22)$$

то крайова умова в точці $r=R_2$ та умови спряження (21) для визначення величин A_1, A_2, B_2 дають однорідну алгебраїчну систему з трьох рівнянь:

$$u^{11}_{\nu,\alpha_1;j1}(b_1R_1)A_1-Y^{11}_{\alpha_2;j2}(b_2,R_1)A_2-Y^{12}_{\alpha_2;j2}(b_2,R_1)B_2=0\,,\ j=1,\,2,$$

$$Y^{22}_{\alpha_2;22}(b_2,R_2)A_2+Y^{21}_{\alpha_2;22}(b_2,R_2)B_2=0. \qquad (23)$$

Алгебраїчна система (23) має ненульові розв'язки тоді й тільки тоді, коли її визначник дорівнює нулю:

$$\Delta_{\nu,(\alpha)}(\beta)\equiv u^{11}_{\nu,\alpha_1;21}(b_1R_1)\delta_{\alpha_2;12}(\beta)-u^{11}_{\nu,\alpha_1;11}(b_1R_1)\delta_{\alpha_2;22}(\beta)=0\,. \quad (24)$$

Корені β_n трансцендентного рівняння (24) складають дискретний спектр [5]: дійсні, різні, симетричні відносно точки $\beta=0$, утворюють на півосі $\beta>0$ монотонно зростаючу числову послідовність з єдиною граничною точкою $\beta=\infty$.

Підставимо в систему (23) $\beta=\beta_n$ ($b_j(\beta_n)\equiv b_{jn}$) й відкинемо останнє рівняння в силу лінійної залежності. Для A_2, B_2 отримаємо алгебраїчну систему

$$Y^{11}_{\alpha_2;j2}(b_{2n},R_1)A_2+Y^{12}_{\alpha_2;j2}(b_{2n},R_1)B_2=u^{11}_{\nu,\alpha_1;j1}(b_{1n}R_1)A_1$$

Звідси при $A_1=c_{21}b_{2n}R_1^{-(2\alpha_2+1)}$ маємо:

$$A_2=\left[u^{11}_{\nu,\alpha_1;11}(b_{1n}R_1)Y^{12}_{\alpha_2;22}(b_{2n},R_1)-u^{11}_{\nu,\alpha_1;21}(b_{1n}R_1)Y^{12}_{\alpha_2;12}(b_{2n},R_1)\right],$$

$$B_2=-\left[u^{11}_{\nu,\alpha_1;11}(b_{1n}R_1)Y^{11}_{\alpha_2;22}(b_{2n},R_1)-u^{11}_{\nu,\alpha_1;21}(b_{1n}R_1)Y^{11}_{\alpha_2;12}(b_{2n},R_1)\right].$$

Якщо ввести до розгляду функції

$$\omega_{\nu,(\alpha);j}(\beta_n)=u^{11}_{\nu,\alpha_1;11}(b_{1n}R_1)Y^{1j}_{\alpha_2;22}(b_{2n},R_1)-\ u^{11}_{\nu,\alpha_1;21}(b_{1n}R_1)Y^{1j}_{\alpha_2;12}(b_{2n},R_1),$$

то $A_2=\omega_{\nu,(\alpha);2}(\beta_n)$, $B_2=\omega_{\nu,(\alpha);1}(\beta_n)$, а рівності (22) набувають вигляду:

$$V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta_n)=c_{21}b_{2n}R_1^{-(2\alpha_2+1)}J_{\nu,\alpha_1}(b_{1n}r), \qquad (25)$$

$$V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta_n)=\omega_{\nu,(\alpha);2}(\beta_n)r^{-\alpha_2}\cos(b_{2n}\ln r)-\omega_{\nu,(\alpha);1}r^{-\alpha_2}\sin(b_{2n}\ln r)\,.$$

Отже, власному числу β_n ГДО $\mathcal{M}_{\nu,(\alpha)}$ відповідає власна векторфункція

$$V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_m)=\theta(r)\theta(R_1-r)V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta_n)+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta_n)$$

з квадратом норми

$$\left\|V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2=\int_0^{R_1}\left[V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta_n)\right]^2\sigma_1r^{2\alpha_1+1}dr+$$

$$+\int_{R_1}^{R_2}\left[V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta_n)\right]^2\sigma_2 r^{2\alpha_2-1}dr \equiv \int_0^{R_2}\left[V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right]^2\sigma(r)dr\,. \qquad (26)$$

Тут $\sigma_1 = c_{11}R_1^{2\alpha_2+1} : c_{21}R_1^{2\alpha_1+1}$, $\sigma_2 = 1$,

$$\sigma(r) = \theta(r)\theta(R_1 - r)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)\sigma_2 r^{2\alpha_1-1}.$$

Згідно з роботою [5] маємо твердження.

Теорема 1 (про власну функцію). Система $\left\{V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\}_{n=1}^{\infty}$ власних функцій ГДО $\mathcal{M}_{\nu,(\alpha)}$ ортогональна з ваговою функцією σ(r), повна й замкнена.

Теорема 2 (про зображення рядом Фур'є). Будь-яка вектор-функція $g(r) = \{g_1(r); g_2(r)\}$ із області визначення ГДО $\mathcal{M}_{\nu,(\alpha)}$ зображається абсолютно й рівномірно збіжним рядом Фур'є за системою $\left\{V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\}_{n=1}^{\infty}$:

$$g(r) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{R_2} g(\rho)V_{\nu,(\alpha)}(\rho,\beta_n)\sigma(\rho)d\rho\,\frac{V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)}{\left\|V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2}\,. \qquad (27)$$

Ряд Фур'є (27) визначає пряме $H_{\nu,(\alpha)}$ та обернене $H_{\nu,(\alpha)}^{-1}$ скінчення гібридне інтегральне перетворення, породжене на множині I_1 ГДО $\mathcal{M}_{\nu,(\alpha)}$:

$$H_{\nu,(\alpha)}[g(r)] = \int_0^{R_2} g(r)V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\sigma(r)dr \equiv \tilde{g}_n\,, \qquad (28)$$

$$H_{\nu,(\alpha)}^{-1}[\tilde{g}_n] = \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{g}_n\,\frac{V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)}{\left\|V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2} \equiv g(r), \qquad (29)$$

$$H_{\nu,(\alpha)}\left[\mathcal{M}_{\nu,(\alpha)}[g(r)]\right] = -\beta_n^2\tilde{g}_n - k_1^2\int_0^{R_1} g_1(r)V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta_n)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}dr -$$

$$-k_2^2\int_{R_1}^{R_2} g_2(r)V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta_n)\sigma_2 r^{2\alpha_2-1}dr + \left(\alpha_{22}^2\right)^{-1}R_2^{2\alpha_2+1}V_{\nu,(\alpha);2}(R_2,\beta_n)g_R +$$

$$+c_{21}^{-1}R_1^{2\alpha_2+1}\left[Z_{\nu,(\alpha);12}^1(\beta_n)\omega_{21} - Z_{\nu,(\alpha);22}^1(\beta_n)\omega_{11}\right], \qquad (30)$$

$$Z_{\nu,(\alpha);i2}^1(\beta_n) = \left(\alpha_{i2}^1\frac{d}{dr} + \beta_{i2}^1\right)V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta_n)\Big|_{r=R_1}, \; i = 1, 2.$$

Побудований за відомою логічною схемою [5] методом запровадженого формулами (28)-(30) гібридного інтегрального перетворення єдиний розв'язок крайової задачі (1)-(3) має структуру:

$$u_j(r)=\int_0^{R_1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)V_{\nu,(\alpha);1}(\rho,\beta_n)}{\left(\beta_n^2+q^2\right)\left\|V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2}\right)g_1(\rho)\sigma_1\rho^{2\alpha_1+1}d\rho+$$

$$+\int_{R_1}^{R_2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)V_{\nu,(\alpha);2}(\rho,\beta_n)}{\left(\beta_n^2+q^2\right)\left\|V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2}\right)g_2(\rho)\sigma_2\rho^{2\alpha_2-1}d\rho+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)V_{\nu,(\alpha);2}(R_2,\beta_n)}{\alpha_{22}^2\left(\beta_n^2+q^2\right)\left\|V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2}R_2^{2\alpha_2+1}g_R+$$

$$+\frac{R_1^{2\alpha_2+1}}{c_{21}}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)Z^1_{\nu,(\alpha);12}(\beta_n)}{\left(\beta_n^2+q^2\right)\left\|V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2}\omega_{21}-\right.$$

$$\left.-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)Z^1_{\nu,(\alpha);22}(\beta_n)}{\left(\beta_n^2+q^2\right)\left\|V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2}\omega_{11}\right]. \qquad (31)$$

Тут $q^2=\max\{q_1^2;q_2^2\}$. Якщо $q^2=q_1^2$, то $k_1^2=0$, $k_2^2=q_1^2-q_2^2\geq 0$. В цьому випадку $b_{1n}=\beta_n$, $b_{2n}=\sqrt{\beta_n^2+q_1^2-q_2^2}$. Якщо $q^2=q_2^2$, то $k_1^2=q_2^2-q_1^2\geq 0$, $k_2^2=0$. В цьому випадку $b_{1n}=\sqrt{\beta_n^2+q_2^2-q_1^2}$, $b_{2n}=\beta_n$.

Порівнюючи розв'язки (17) та (31) в силу єдиності, одержуємо наступні формули підсумовування функціональних рядів:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)V_{\nu,(\alpha);k}(\rho,\beta_n)}{\left(\beta_n^2+q^2\right)\left\|V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2}=\frac{1}{\sigma_k}\ \mathcal{H}_{\nu,(\alpha);jk}(r,\rho;q_1,q_2),\ j,k=1,2,\ (32)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\nu,(\alpha);2}(R_2,\beta_n)V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)}{\alpha_{22}^2\left(\beta_n^2+q^2\right)\left\|V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2}=R_2^{-(2\alpha_2+1)}W_{\nu,(\alpha);2j}(r,q_1,q_2),\ j=1,2, (33)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z^1_{\nu,(\alpha);12}(\beta_n)V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)}{\left(\beta_n^2+q^2\right)\left\|V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2}=\frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha_2+1}}\ \mathcal{R}^j_{\nu,(\alpha);21}(r,q_1,q_2),\ j=1,2,\qquad (34)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z^1_{\nu,(\alpha);22}(\beta_n)V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)}{\left(\beta_n^2+q^2\right)\left\|V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2}=-\frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha_2+1}}\ \mathcal{R}^j_{\nu,(\alpha);11}(r,q_1,q_2),\ j=1,2.\quad (35)$$

Функції $W_{\nu,(\alpha);2j}(r, q_1, q_2)$ визначені формулами (14), функції $\mathcal{R}^{j}_{\nu,(\alpha);i1}(r, q_1, q_2)$ – формулами (15), а функції $\mathcal{H}_{\nu,(\alpha);jk}(r, \rho; q_1, q_2)$ – формулами (16). Оскільки праві частини в рівностях (32)-(35) не залежать від нерівності $\left(q_1^2 - q_2^2\right) \geq 0$ або нерівності $\left(q_2^2 - q_1^2\right) \geq 0$, то можна покласти $q_1^2 = q_2^2 = q^2$ ($k_1^2 = 0$, $k_2^2 = 0$), звужуючи при цьому сім'ю палі параметричних функціональних рядів.

З викладеного вище випливає твердження.

Теорема 3. Якщо вектор-функція $f(r) = \left\{B_{\nu,\alpha_1}[g_1(r)]; B^*_{\alpha_2}[g_2(r)]\right\}$ неперервна на множин I_1, функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови (2) та умови спряження (3) і виконується умова (13) однозначної розв'язності крайової задачі (1)-(3), то мають місце формули (32)-(35) підсумовування поліпараметричних функціональних рядів за власними елементами ГДО $\mathcal{M}_{\nu,(\alpha)}$, визначеного рівністю (18).

Список використаних джерел:

1. Ленюк М. П. Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя. – Киев, 1983. – 62 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.3).
2. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.
3. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 328 с.
4. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. – М.: Физматгиз, 1963. – 431 с.
5. Комаров Г. М., Ленюк М. П., Мороз В. В. Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені диференціальними рівняннями другого порядку. – Чернівці: Прут, 2001. – 228 с.

The method of comparison of the decision of a regional problem for system of differential equations Bessel and Euler on a segment [0, R_2] of a polar axis with one point of the interface constructed $r \geq R_1 > R_2$, on the one hand, by a method of functions Cauchy, and on the other hand, a method of corresponding hybrid integrated transformation (SGIP), summarises a polyparametrical family of functional numbers on own elements of the corresponding hybrid differential operator.

Key words: *Not own integrals, functions Cauchy, the main decisions, hybrid integrated transformation, the basic identity, condition of unequivocal resolvability, the logic scheme.*

Отримано: 03.06.2008