Список використаних джерел:

1. Гери М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.: Мир, 1982. – 416 с.
2. Stefan Ropke, David Pisinger. An Adaptive Large Neighborhood Search Heuristic for the Pickup and Delivery Problem with Time Windows, 2005. – P.1-30.
3. Holland JH. (1975) Adaptation in natural und artificial systems – An introductory analysis with applications to biology, control, und artificial intelligence // The University of Michigan Press, Ann Arbor, MI.
4. Giselher Pankratz. A Grouping Genetic Algorithm for the Pickup and Delivery Problem with Time Windows // OR Spectrum (2005) 27. – P.21-41.

The author examined a generalization of the Vehicle Routing Problem with Time Windows – Pickup and Delivery Problem with Time Windows. The comparative analysis of methods to solve the problem is fulfilled.

Key words: *pickup and delivery problem with time windows, grouping genetic algorithm, an adaptive large neighbourhood search heuristic.*

Отримано: 05.06.2008

УДК 519.6

М. Я. Бартіш, О. В. Ковальчук, Л. В. Николайчук

Львівський національний університет імені Івана Франка

ТРИКРОКОВИЙ ІТЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД РОЗВ’ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Досліджується новий підхід до побудови методів розв’язування нелінійних систем. Даний метод базується на методі спуску та деякій модифікації методу Ньютона. Досліджено швидкість збіжності. Проведено чисельні експерименти на тестових задачах.

Ключові слова: *задача про найменші квадрати, метод Ньютона, градієнтний метод, система нелінійних рівнянь.*

Вступ. Математичне моделювання складних фізичних процесів дуже часто потребує розв’язування систем нелінійних рівнянь. Універсальних методів для успішного розв’язування широкого класу подібних задач нема, тому актуальною є проблема побудови нових ефективних алгоритмів. Пропонується ітераційний метод для розв’язування систем нелінійних рівнянь, який не потребує аналітичного задання матриці Якобі і більш повно на кожному кроці використовується інформація про функцію. Проведено теоретичні та практичні дослідження даного методу.

Постановка задачі для розв'язування систем нелінійних алгебраїчних рівнянь. Розглянемо задачу розв'язування системи нелінійних алгебраїчних рівнянь

$$P(x) = 0, P : R^n \to R^n . \qquad (1)$$

Відомим методом для розв'язування подібних задач є метод Ньютона [2]

$$x_{k+1} = x_k - \left[P'(x_k)\right]^{-1} P(x_k) . \qquad (2)$$

На практиці матрицю $P'(x_k)$ часто замінюють наближеною, для якої виконується умова:

$$\left\|P'(x_k) - Q_k\right\| \le c_1 \left\|P(x_k)\right\|^{\gamma} ,$$

де $c_1 > 0, \gamma \in (0;1]$.

Отже, ми отримаємо деяку модифікацію методу Ньютона

$$x_{k+1} = x_k - \left[Q_k\right]^{-1} P(x_k), \qquad (3)$$

де, наприклад, Q_k – перша поділена різниця [1].

В даній роботі використовувалась наступна апроксимація

$$(Q_k)_j = \frac{P(x_k + h_k e_j) - P(x_k)}{h_k}, \quad j = 1,\ldots,n ,$$

де $h_k > 0$ – достатньо мале число.

Поряд із задачею (1) можна розглядати задачу про найменші квадрати

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(P(x), P(x)\right) \to \min_{R^n} . \qquad (4)$$

Застосовуючи градієнтний метод для (4) отримаємо

$$x_{k+1} = x_k - \beta_k P'^T(x_k) P(x_k), \qquad (5)$$

де $\beta_k > 0$ визначається за одним із відомих алгоритмів і забезпечує монотонне спадання функції. Наприклад,

$$f\left(x_k - \beta_k h(x_k)\right) - f(x_k) \le -\varepsilon \beta_k \left(f'(x_k), h(x_k)\right), \ 0 < \varepsilon < 1 \qquad (6)$$

або

$$\beta_k = \arg\min_{\beta > 0} f(x_k - \beta h_k) , \qquad (7)$$

де $h_k = P'^T(x_k) P(x_k)$.

Використовуючи апроксимацію матриці Якобі отримаємо алгоритм

$$x_{k+1} = x_k - \beta_k Q_k^T P(x_k). \qquad (8)$$

В статті пропонується новий алгоритм розв'язку задачі (1). Маючи наближення x_k , виконуємо один крок за методом (3)

$$u_k = x_k - [Q_k]^{-1} P(x_k) \tag{9}$$

і один крок за методом (8)

$$v_k = x_k - \beta_k Q_k^T P(x_k). \tag{10}$$

Виконання одного кроку за методом (8) не вимагає суттєвих додаткових обчислень, оскільки $P(x_k)$ і Q_k визначені при обчисленні u_k. Маючи значення u_k і v_k, визначаємо наступне наближення x_{k+1} за формулою

$$x_{k+1} = u_k + \lambda_k (v_k - u_k), \tag{11}$$

де $\lambda_k = \arg\min\limits_{\lambda} f(u_k + \lambda(v_k - u_k))$.

Обґрунтування збіжності.

Лема. Нехай $P : R^n \to R^n, P \in C^1(R^n)$. Якщо Q_k – матриця розмірності $n \times n$, така що

$$\left\| I - Q_k^T \left(P'^T(x_k)\right)^{-1} \right\| \le \alpha < 1, \tag{12}$$

де $\alpha \in (0;1)$, тоді напрямок $h_k = Q_k^T P(x_k)$ є напрямком спадання функції f в точці x_k.

Доведення.

Оскільки $P'^T(x_k)P(x_k)$ є напрямком найшвидшого спадання функції $f(x)$, то повинно виконуватися

$$\left(Q_k^T P(x_k), P'^T(x_k)P(x_k)\right) > 0 .$$

За допомогою відповідних перетворень та умови (12) отримаємо

$$\left(Q_k^T P(x_k), P'^T(x_k)P(x_k)\right) = \left(\left(P'^T(x_k) + Q_k^T - P'^T(x_k)\right)P(x_k), P'^T(x_k)P(x_k)\right) =$$

$$= \left\|P'^T(x_k)P(x_k)\right\|^2 + \left(\left(Q_k^T - P'^T(x_k)\right)P(x_k), P'^T(x_k)P(x_k)\right) =$$

$$= \left\|P'^T(x_k)P(x_k)\right\|^2 - \left(\left(I - Q_k^T\left(P'^T(x_k)\right)^{-1}\right)P'^T(x_k)P(x_k), P'^T(x_k)P(x_k)\right) \ge$$

$$\ge (1-\alpha)\left\|P'^T(x_k)P(x_k)\right\|^2 > 0.$$

Лема доведена.

Теорема. Нехай

1) $P : R^n \to R^n$, $P \in C^1(R^n)$;

2) Для $x, y \in D$, $D \subset R^n$, $P'(x)$ задовольняє умову Ліпшиця:

$$\left\| P^{'}(x) - P^{'}(y) \right\| \le L\|x - y\|, \tag{13}$$

де $0 < L < \infty$;

3) Q_k – матриця розмірності $n \times n$, така що

$$\left\| Q_k^{-1} \right\| \le \frac{1}{m}, \tag{14}$$

де $m > 0$,

$$\left\| P'(x_k) - Q_k \right\| \le c_1 \left\| P(x_k) \right\|^{\gamma}, \tag{15}$$

де $c_1 > 0,\ \gamma \in (0;1]$,

$$\left\| I - Q_k^T \left(P'^T (x_k) \right)^{-1} \right\| \le \alpha < 1,$$

де $\alpha \in (0;1)$;

4) початкове наближення x_0 вибирають таким, щоб виконувалася умова:

$$q = C \left\| P(x_0) \right\|^{\gamma} < 1, \tag{16}$$

де $C = \frac{L}{2m^2} \left\| P(x_0) \right\|^{1-\gamma} + \frac{c_1}{m}$.

Тоді послідовність $\{x_k\}$ породжена (9)-(11) збігається до розв'язку x^* задачі (1) і має місце оцінка

$$\left\| P(x_{k+1}) \right\| \le q^{\frac{(\gamma+1)^{k+1}-1}{\gamma}} \left\| P(x_0) \right\|. \tag{17}$$

Доведення.

Нехай відоме деяке наближення x_k до розв'язку задачі (1). Із (9) та (14) отримаємо

$$\left\| u_k - x_k \right\| \le \frac{1}{m} \left\| P(x_k) \right\|. \tag{18}$$

Врахувавши умову

$$P(u_k) = P(u_k) - P(x_k) - Q_k (u_k - x_k)$$

та умови (13), (15) та пронормувавши попередній вираз отримаємо

$$\left\| P(u_k) \right\| = \left\| \int_0^1 \left\{ \left(P'(x_k + \tau(u_k - x_k)) - P'(x_k) \right) + \left(P'(x_k) - Q_k \right) \right\} (u_k - x_k) d\tau \right\| \le$$

$$\le \frac{L}{2} \left\| u_k - x_k \right\|^2 + c_1 \left\| P(x_k) \right\|^{\gamma} \left\| u_k - x_k \right\| \le$$

$$\le \frac{L}{2m^2} \left\| P(x_k) \right\|^2 + \frac{c_1}{m} \left\| P(x_k) \right\|^{\gamma} \left\| P(x_k) \right\| \le C \left\| P(x_k) \right\|^{\gamma+1},$$

де
$$C = \frac{L}{2m^2}\left\|P(x_0)\right\|^{1-\gamma} + \frac{c_1}{m}.$$

Отже,
$$\left\|P(u_k)\right\| \le C\left\|P(x_k)\right\|^{\gamma+1}. \tag{19}$$

Так як $\left\|P(x_{k+1})\right\| \le \left\|P(u_k)\right\| \le C\left\|P(x_k)\right\|^{\gamma+1}$, то

$$\left\|P(x_{k+1})\right\| \le C\left\|P(x_k)\right\|^{\gamma+1} \le \ldots \le C\left(q^{\frac{(\gamma+1)^k-1}{\gamma}}\left\|P(x_0)\right\| \right)^{\gamma+1} =$$

$$= q^{\frac{(\gamma+1)^{k+1}-\gamma-1}{\gamma}} q\left\|P(x_0)\right\| = q^{\frac{(\gamma+1)^{k+1}-1}{\gamma}}\left\|P(x_0)\right\|.$$

Отже,
$$\left\|P(x_{k+1})\right\| \le q^{\frac{(\gamma+1)^{k+1}-1}{\gamma}}\left\|P(x_0)\right\|.$$

Теорема доведена.

В більшості випадків досить важко підібрати "гарне" початкове наближення, тому використовують демпфований [2] множник. Отже, остаточно метод набуде наступного вигляду
$$u_k = x_k - \alpha_k\left[Q_k\right]^{-1} P(x_k), \tag{20}$$
$$v_k = x_k - \beta_k Q_k^T P(x_k), \tag{21}$$
$$x_{k+1} = \arg\min_{\lambda} f\left(u_k + \lambda(v_k - u_k)\right), \tag{22}$$
при $\alpha \in (0;1]$.

На практиці часто зустрічаюся задачі вигляду
$$P : R^n \to R^m. \tag{23}$$

При $m > n$ задачу (23) розв'язують у сенсі найменших квадратів. Одним із найбільш вживаних методів для розв'язування нелінійної задачі у сенсі найменших квадратів є метод Гауса-Ньютона.
$$x_{k+1} = x_k - \left[P'^T(x_k)P'(x_k)\right]^{-1} P'^T(x_k)P(x_k). \tag{24}$$

У задачах з нульовою нев'язкою, та за виконання певних умов метод Гауса-Ньютона має локально-квадратичну збіжність, а у випадку несумісних систем, збіжність стає лінійною і може суттєво погіршуватися зі збільшенням нев'язки.

Якщо використати апроксимацію матриці Якобі, наприклад поділеними різницями, отримаємо
$$x_{k+1} = x_k - \left[Q_k^T Q_k\right]^{-1} Q_k^T P(x_k), \tag{25}$$

де $$\left(Q_k\right)_j = \frac{P\left(x_k + h_k e_j\right) - P\left(x_k\right)}{h_k}, \quad j = 1, \ldots, m \,,$$

при $h_k > 0$ – достатньо мале число.

Пропонується трикроковий ітераційний метод для розв'язування задачі (23) у сенсі найменших квадратів, при апроксимації матриці Якобі

$$u_k = x_k - \alpha_k \left[Q_k^T Q_k\right]^{-1} Q_k^T P\left(x_k\right), \tag{26}$$

$$v_k = x_k - \beta_k Q_k^T P\left(x_k\right), \tag{27}$$

$$x_{k+1} = u_k + \gamma_k \left(v_k - u_k\right), \tag{28}$$

де $\gamma_k = \arg\min_{\gamma}\left(f\left(u_k + \gamma\left(v_k - u_k\right)\right)\right)$, при $\alpha \in (0;1]$.

Апробація. Роботу даних алгоритмів досліджено на тестових прикладах. Обчислення проводилися до виконання умови $\left\|x_{k+1} - x_k\right\| \le \varepsilon$. В таблицях наведено кількість ітерацій, затрачених для отримання наближеного розв'язку задач. Розглянуто такі тестові функції:

1. *Система Brent* [4].

$$P_k(x) = 3x_k\left(x_{k+1} - 2x_k\right) + x_{k+1}^2/4\,, \qquad k = 1;$$

$$P_k(x) = 3x_k\left(x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}\right) + \left(x_{k+1} - x_{k-1}\right)^2/4\,, \qquad 1 < k < n;$$

$$P_k(x) = 3x_k\left(20 - 2x_k + x_{k-1}\right) + \left(20 - x_{k-1}\right)^2/4\,, \qquad k = n;$$

$$f\left(x^*\right) = 0.$$

Наступні дві системи мають вироджений якобіан у точці розв'язку.

2. *Розширена сингулярна система Пауелла* [3].

$$P_{4i-3}(x) = x_{4i-3} + 10x_{4i-2},$$

$$P_{4i-2}(x) = \sqrt{5}\left(x_{4i-1} - x_{4i}\right),$$

$$P_{4i-1}(x) = \left(x_{4i-2} - x_{4i-1}\right)^2,$$

$$P_{4i}(x) = \sqrt{10}\left(x_{4i-3} - x_{4i}\right)^2,$$

$$i = 1, \ldots, \left[\frac{n}{4}\right].$$

Розв'язок $x^* = (0, \ldots, 0)$.

3. *Розширена проблема Грага і Леві* [4].

$$P_{4i-3}(x) = \left(e^{x_{4i-3}} - x_{4i-2}\right)^2,$$
$$P_{4i-2}(x) = 10\left(x_{4i-2} - x_{4i-1}\right)^3,$$
$$P_{4i-1}(x) = tg^2\left(x_{4i-1} - x_{4i}\right),$$
$$P_{4i}(x) = x_{4i} - 1,$$
$$i = 1,\ldots,\left[\frac{n}{4}\right].$$

Розв’язок $x^* = (0,1,1,1,\ldots,0,1,1,1)$.

У *таблиці 1* представленні результати розв’язування вище наведених систем різницевим методом Ньютона (3) та запропонованим алгоритмом (20)-(22).

Таблиця 1

№ функції	x_0	n	$\varepsilon = 10^{-5}$		$\varepsilon = 10^{-8}$	
			(3)	(20)-(22)	(3)	(20)-(22)
1	(5; –5; 5; –5)	4	14	9	15	10
		20	21	16	31	25
		60	22	17	31	24
	(2; 3; 2; 3)	4	8	7	9	8
		20	21	17	43	31
		60	22	18	46	41
		100	23	18	69	47
2	(–3; –1; 0; 1)	4	19	14	29	22
		20	20	15	32	24
		60	21	15	36	25
		100	21	16	38	26
	(1; –2; 1; –2)	4	20	14	32	21
		20	21	15	35	23
		60	21	16	38	24
		100	22	16	39	24
3	(1; 2; 1; 2)	4	28	9	49	12
		60	31	9	59	12
	(1; 1; 1; 0)	4	20	11	39	22
		20	22	11	45	24
		60	23	12	51	25
		100	23	12	54	26

Отримані результати показують перевагу методу (20)-(22) перед методом (3). Відзначимо, у випадку коли якобіан у точці розв’язку вироджений, комбінований алгоритм працював суттєво краще в сенсі кількості обчислень, ніж класичний метод.

Перейдемо до випадку $m > n$.

4. *Система Gaussian* [3].

$$n=3,\quad m=15,\qquad P_k=x_1\exp\left[\frac{-x_2(t_k-x_3)^2}{2}\right]-y_k,$$

де $t_k=(8-k)/2$ та

k	y_k	k	y_k	k	y_k
1	0.0009	6	0.2420	11	0.1295
2	0.0044	7	0.3521	12	0.0540
3	0.0175	8	0.3989	13	0.0175
4	0.0540	9	0.3521	14	0.0044
5	0.1295	10	0.2420	15	0.0009

Розв’язок $x^*=[0.4;\ 1;\ 0]^T$

$$f(x^*)\cong 5.639\cdot 10^{-10}\ .$$

5. *Система Bard* [4].

$$n=3,\quad m=15,\qquad P_k=y_k-\left(x_1+\frac{u_k}{v_kx_2+w_kx_3}\right),$$

де $u_k=k$, $v_k=16-k$, $w_k=\min(u_k, v_k)$, та

k	y_k	k	y_k	k	y_k
1	0.14	6	0.32	11	0.73
2	0.18	7	0.35	12	0.96
3	0.22	8	0.39	13	1.34
4	0.25	9	0.37	14	2.10
5	0.29	10	0.58	15	4.39

Розв’язок $x^*=[0.082411;\ 1.133036;\ 2.343695]^T$

$$f\left(x^*\right)\cong 4.10744\cdot 10^{-3}\ .$$

6. *Система Kowalik і Osborne* [4].

$$n=4,\quad m=11,\qquad P_k=y_k-\frac{x_1u_k\left(u_k+x_2\right)}{u_k\left(u_k+x_3\right)+x_4},$$

де

k	y_k	u_k	k	y_k	u_k
1	0.1957	4.0000	7	0.0456	0.1250
2	0.1947	2.0000	8	0.0342	0.1000
3	0.1735	1.0000	9	0.0323	0.0833
4	0.1600	0.5000	10	0.0235	0.0714
5	0.0844	0.2500	11	0.0246	0.0625
6	0.0627	0.1670			

Розв’язок $x^*\cong[0.192807;\ 0.191282;\ 0.123057;\ 0.136062]^T$

$$f\left(x^*\right)\cong 1.53753\cdot 10^{-4}\ .$$

7. *Система Brown і Dennis* [2, 4].

$$n=4,\quad m\ge 4,\qquad P_k=\left(x_1+t_kx_2-e^{t_k}\right)^2+\left(x_3+x_4\sin\left(t_k\right)-\cos\left(t_k\right)\right),$$

де $t_k = k/5$

$$m = 5: \quad x^* \cong [0.77781;\ 1.87187;\ 1.15301;\ -0.67095]^T$$
$$f(x^*) \cong 9.08309 \cdot 10^{-5}$$
$$m = 10: \quad x^* \cong [-0.18950;\ 3.45424;\ 1.32570;\ -1.336679]^T$$
$$f(x^*) \cong 7.21613 \cdot 10^{-1}$$
$$m = 20: \quad x^* \cong [-11.5944;\ 13.2036;\ \text{-}0.4034;\ 0.2368]^T$$
$$f(x^*) \cong 4.29112 \cdot 10^{4}$$

Таблиця 2

№ функції	x_0	$n \times m$	$\varepsilon = 10^{-5}$		$\varepsilon = 10^{-8}$	
			(25)	(26)-(28)	(25)	(26)-(28)
4	(–5; 2; 1)	3×15	9	6	10	7
	(1; 3; 1)	3×15	7	6	8	7
5	(2.5; 2.5; 2.5)	3×15	10	5	11	6
	(1; 2; 3)	3×15	7	4	7	5
	(3; 3; 3)	3×15	6	5	10	6
6	(0.5; 0.3; 0.5; 0.3)	4×11	13	9	15	11
	(0.25; 0.39; 0.415; 0.39)	4×11	18	8	18	9
7	(25; 5;–5; –1)	4×5	215	40	215	43
		4×10	43	23	45	23
		4×20	299	59	304	63
	(1; 1; 1; 1)	4×5	121	40	134	40
		4×10	33	22	37	24
		4×20	261	44	264	44

Висновок. Запропоновані нові трикрокові ітераційні методи для розв'язування систем нелінійних рівнянь. Доведено швидкість збіжності запропонованого алгоритму. На тестових прикладах виконано їх числове дослідження, зроблено порівняння отриманих результатів з базовим методом, на основі яких вони побудовані. З наведених прикладів бачимо, що запропоновані модифікації складають конкуренцію класичним методам. Особливо цей ефект відчутний у випадку, коли якобіан в точці розв'язку вироджений (див. *табл. 1*), або є досить велика нев'язка (див. *табл. 2*). Використання запропонованих методів дозволяє скоротити час пошуку розв'язку системи, в порівнянні з базовими методами.

Список використаних джерел:

1. Бахвалов Н. С. Численные методы. – М.: Наука, 1973.
2. Дэннис Дж. мл., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. – М.: Мир, 1988.

3. Jorge J. More, Burton S. Garbow, Kenneth E. Hillstrom Testing unconstrained optimization software // ACM Transactions on mathematical Software. – Vol 7. – No. 1. – March, 1981. – P.17-41.
4. Luksan L., Vlcek J. Test problems for unconstrained optimization // Institute of computer science, Academy of sciences of the Czech Republic. – 2003.

In this paper a new way to the creation of the method for solving system of nonlinear equations is being researched, which is based on steepest descent and the Newton methods. We have proved theorem where the convergence of the proposed method is justified and the rate of convergence is established. Numeral experiments have been conducted on the test problems and they have been compared of the basic methods. The conclusions on the possibilities application of method have been made.

Key words: *the methods of steepest descent, the Newton methods, system of nonlinear equations.*

Отримано: 02.06.2008

УДК 519

І. В. Бейко[1], П. М. Зінько[2]

[1] Українсько-Угорський інститут кібернетики та інформаційних технологій, м. Київ
[2] Київський національний університет імені Тараса Шевченка

МЕТОДИ ВИСОКИХ ПОРЯДКІВ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ КОШІ ТА БАГАТОМІРНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ АСИМПТОТИЧНО-РОЗВ'ЯЗУЮЧИХ ОПЕРАТОРІВ

Побудовані чисельні методи підвищеної точності для розв'язування багатовимірних крайових задач і задач Коші з використанням асимптотично-розв'язуючих операторів.

Ключові слова: *асимптотично-розв'язуючі оператори, крайові задачі, задачі Коші.*

Вступ. Для побудови оптимальних робочих моделей в роботах [1, 5, 7] використовуються розв'язуючі оператори, які узагальнюють псевдообернені оператори та функції Гріна. Їх асимптотичні апроксимації (асимпотично-розв'язуючі оператори) використовуються для побудови математичних моделей складних керованих багатозв'язних систем у класі граф-операторних моделей, де k-та підсистема (k-й вузол граф-операторної моделі), представлена алгебраїчними, диференційними, інтегро-диференційними рівняннями чи їх сукупністю, представляється в канонічному вигляді $A_{ks}(x_{ks}, z_{ks}, p_{ks}) = \theta_{W_{A_{ks}}}$, A_{ks}:

