УДК 528.33:551.24

М.М. Фис, Р.С. Фоца, А.Р. Согор, В.О. Волос

МЕТОД ЗНАХОДЖЕННЯ ГУСТИНИ РОЗПОДІЛУ МАС ПЛАНЕТИ З УРАХУВАННЯМ СТОКСОВИХ СТАЛИХ ДО ЧЕТВЕРТОГО СТЕПЕНЯ

Описаний алгоритм побудови модельних розподілів густини планети з урахуванням стоксових сталих четвертого порядку.

Ключові слова: обчислювальний алгоритм; модель розподілу густини; стоксові сталі.

Постановка проблеми

В основі дослідження внутрішньої структури планети покладено просторове розміщення мас δ в середині планети. Його можна отримати, використовуючи дані про зовнішнє гравітаційне поле. Максимальне врахування неоднорідностей потенціалу дозволяє будувати більш точні тривимірні функції розподілу густини.

Зв'язок з важливими науковими і практичними завданнями

Встановлення глобальних скупчень мас, що відображаються в побудованій асиметричній моделі планети, є важливим в геофізичних дослідженнях, оскільки може бути порівняне з такими, що отримані з використанням методів томографії. Відхилення від сферично-симетричного розподілу мас дає можливість більш детально встановити причини тривимірності зовнішнього потенціалу, регіональні аномалії можуть дати ключ до розуміння геодинамічних явищ планетарного характеру.

Аналіз останніх досліджень та публікацій, в яких започатковано розв'язання проблеми

Побудову тривимірних моделей густини з використанням даних про гравітаційне поле Землі започатковано професором Г.О. Мещеряковим в роботах [1, 2]. При цьому використання динамічного стиску дало можливість знайти розклад функції густини до 2-го порядку. Використання стоксових постійних і додаткова інформація у вигляді функції на поверхні планети з допомогою методики, описаної в [4], дозволяють збільшити порядок апроксимації до степеня чотири. Запропонований нижче метод дає можливість визначити такий розклад з використанням стоксових сталих до четвертого порядку

Невирішені аспекти загальної проблеми

Не досліджена можливість використання набору стоксових постійних вище четвертого порядку для знаходження відповідних функцій розподілу мас.

Постановка завдання

За даними про гравітаційне поле Землі, її стоксові сталі до четвертого порядку і динамічний стиск H необхідно побудувати функцію розподілу мас у вигляді суми біортогональних многочленів.

Виклад основного матеріалу дослідження

Раніше [4] встановлена можливість побудови функції густини δ еліпсоїдної планети при відомих даних про гравітаційне поле до 2-го порядку і густини на поверхні планети, похідні якої подані так:

$$\frac{\partial\delta}{\partial x_i} = \sum_{P+q+S=0}^{3} d^i_{PqS} W_{PqS}(x_1, x_2, x_3), \qquad (1)$$

де

$$d^i_{PqS} = \frac{\int_i \omega_{PqS} \frac{\partial\delta}{\partial x_i} d\tau}{l_{PaS}}, \qquad (2)$$

$\{\omega_{PqS}\}, \{W_{PqS}\}$ дві біортогональні системи в τ.

При певних умовах [4] функцію δ можна відновити за її похідними, а саме

$$\delta(x_1, x_2, x_3) = \int_0^{x_1} \frac{\partial\delta}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) dx_1 + $$

$$+ \int_0^{x_2} \frac{\partial\delta}{\partial x_2}(0, x_2, x_3) dx_2 + \int_0^{x_3} \frac{\partial\delta}{\partial x_3}(0, 0, x_3). \qquad (3)$$

Формула (3) для практичного застосування не є придатною, оскільки важко встановити аналітичний вигляд виразу $\int_0^{x_i} W_{mnk} dx_i$. Тому в подальшому підемо іншим шляхом: густину представимо традиційно у вигляді лінійної комбінації поліномів W_{mnk}

$$\delta(x_1, x_2, x_3) = \sum_{m+n+k=0}^{4} b_{mnk} W_{mnk}(x_1, x_2, x_3). \qquad (4)$$

Коефіцієнти b_{mnk} мають вигляд $b_{mnk} = A^m B^n C^k b_{mnk}$. В подальшому множник $\alpha^m \beta^n \gamma^k$ при b_{mnk} для простоти запису опускаємо (тут і далі δ_C – середня густина планети, $\alpha = \frac{A}{a}, \beta = \frac{B}{a}, \gamma = \frac{C}{a}$, де A, B, C півосі планетарного еліпсоїда, a – екваторіальний радіус (як правило, A=B=a)).

Коефіцієнти b_{mnk} при $(m+n+k) \le 2$ знаходяться з системи рівнянь, яка отримується підстановкою формули (4) в стоксові сталі $C_{nk}, S_{nk}(n \le 2)$ і динамічний стиск H (аналогічно, як при визначенні степеневих моментів I_{PqS})

$$\begin{cases} 2b_{002} - (b_{200} + b_{002}) = 35C_{20}\delta_c - \\ -7b_{000}\left[\left(\gamma^2 - \frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)\right)\right] \\ b_{200} - b_{020} = \\ = 70\left[\left(C_{22}\delta_c - b_{000}\frac{(\alpha^2-\beta^2)}{20}\right)\right] \\ b_{200} + b_{020} = \\ = \frac{35}{2}\left[\frac{-C_{20}}{H}\delta_c - \frac{b_{000}(\alpha^2+\beta^2)}{5}\right] \\ b_{000} = C_{00}\delta_c,\ b_{101} = \frac{35}{2}C_{21}\delta_C \\ b_{011} = \frac{35}{2}S_{21}\delta_C,\ b_{110} = 35S_{22}\delta_C \end{cases}, \qquad (5)$$

розв’язок якої наступний:

$$\begin{aligned} & b_{000} = \delta_C \\ & b_{002} = \frac{7}{2}\delta_C\left(5C_{20}\left(1-\frac{1}{2H}\right)-\gamma^2\right) \\ & b_{200} = \frac{7}{2}\delta_C\left[5\left(2C_{22}-\frac{C_{20}}{2H}\right)-\alpha^2\right] \\ & b_{020} = \frac{7}{2}\delta_C\left[5\left(2C_{22}-\frac{C_{20}}{2H}\right)-\beta^2\right] \\ & b_{101} = \frac{35}{2}C_{21}\delta_C, b_{011} = \frac{35}{2}S_{21}\delta_C, b_{110} = \\ & = 35S_{22}\delta_C \end{aligned} \qquad (6)$$

Для визначення значень $b_{mnk}(3 \le m + n + k \le 4)$ підставимо їх в стоксові сталі 3-го і 4-го порядків, формули для яких можна отримати з [5]

$$C_{30} = \frac{1}{Ma^3}\int_\tau \delta\left(z^3 - \frac{3}{2}z(x^2+y^2)\right)d\tau,$$

$$C_{31} = \frac{1}{Ma^3}\int_\tau \delta\left(z^2x - \frac{1}{4}x(x^2+y^2)\right)d\tau$$

$$S_{31} = \frac{1}{Ma^3}\int_\tau \delta\left(z^2y - \frac{1}{2}y(x^2+y^2)\right)d\tau,$$

$$C_{32} = \frac{1}{Ma^3}\int_\tau \delta\frac{\left(z(x^2-y^2)\right)}{4}d\tau$$

$$S_{32} = \frac{1}{Ma^3}\int \frac{\delta xyz}{2}d\tau,$$

$$C_{33} = \frac{1}{Ma^3}\int_\tau \delta x\left(\frac{1}{3}x^2\right)d\tau,$$

$$S_{33} = \frac{1}{Ma^3}\int_\tau \delta\frac{y\left(x^2-\frac{1}{3}y^2\right)d\tau}{8} \qquad (7)$$

$$C_{40} = \frac{1}{Ma^4}\int_\tau \delta(z^4 - 3z^2(x^2+y^2) + \frac{1}{8}(x^2+y^2)^2)d\tau,$$

$$C_{41} = \frac{1}{Ma^4}\int_\tau \delta\left[z^3x - \frac{3}{4}xz(x^2+y^2)\right]d\tau$$

$$S_{41} = \frac{1}{Ma^4}\int_\tau \delta\left[z^3y - \frac{3}{4}xy(x^2+y^2)\right]d\tau,$$

$$C_{42} = \frac{1}{Ma^4}\int_\tau \left[\frac{3z^2(x^2+y^2)}{2} + \frac{1}{4}(y^2-x^4)\right]\delta d\tau$$

$$S_{42} = \frac{1}{Ma^4}\int_\tau \left[3z^2xy - \frac{1}{2}xy(x^2+y^2)\right]\delta d\tau,$$

$$C_{43} = \frac{1}{Ma^4}\int_\tau \frac{zx(x^2-3y^2)}{6}\delta d\tau$$

$$S_{44} = \frac{1}{Ma^4}\int_\tau \frac{1}{8}\left(xy(x^2-y^2)\right)\delta d\tau \qquad (8)$$

В результаті отримаємо ряд залежностей для коефіцієнтів b_{mnk} 3-го порядку, які групуємо

$$\begin{cases} 105\delta_C C_{30} - 27\left(\gamma^2 - \frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)\right)b_{001} \\ = 2b_{003} - 3(b_{201}+b_{021}) \\ 105\delta_C C_{32} - 27\frac{(\alpha^2-\beta^2)}{4}b_{001} \\ = \frac{1}{2}(b_{201} - b_{021}) \end{cases} \qquad (9)$$

$$\begin{cases} 105\delta_C C_{31} - 27\left(\gamma^2 - \frac{1}{2}(3\alpha^2+\beta^2)\right)b_{100} \\ = 2b_{102} - \frac{1}{2}(b_{300}+b_{120}) \\ 105\delta_C C_{33} - 27(\alpha^2-\beta^2)b_{100} \\ = \frac{b_{300}}{3} - b_{120} \end{cases} \qquad (10)$$

$$\begin{cases} 105S_{31} - 27\left(\gamma^2 - \frac{1}{2}\left(\alpha^2 + 3\beta^2\right)\right)b_{010} \\ = b_{012} - \frac{1}{2}\left(b_{210} + b_{030}\right) \\ 105S_{33} - 27\left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{8}\right)b_{010} \\ = b_{210} - \frac{1}{3}b_{030} \end{cases} \quad (11)$$

Одна величина визначається безпосередньо, а саме $210\delta_C S_{32} = b_{111}$.

Аналогічно для 4-го порядку виписуємо рівняння, які також об'єднуємо

$$\frac{11!!}{72}\left\{\begin{matrix} \delta_C C_{40} - \frac{24}{7!!}\times \\ \times\left[\begin{matrix} \left(\gamma^2 - \frac{1}{2}\left(\alpha^2 + \beta^2\right)\right)\times \\ \times\left(b_{002} - \frac{1}{2}\left(b_{200} + b_{020}\right)\right) + \\ + \left(\alpha^2 - \beta^2\right)\frac{b_{200} - b_{020}}{4} \end{matrix}\right] + \\ + \frac{3}{35}\left[\begin{matrix} \gamma^4 - \gamma^2\left(\alpha^2 + \beta^2\right) \\ + \frac{1}{8}\left(3\alpha^4 + 3\beta^4 - 2\alpha^2\beta^2\right) \end{matrix}\right] \end{matrix}\right\} +$$

$$= b_{004} - 3\left(b_{202} + b_{022}\right) + \frac{3}{8}\times$$
$$\times\left(b_{400} + b_{040} + 2b_{220}\right)$$

$$\frac{11!!}{72}\left\{\begin{matrix} 4\delta_C C_{42} - \frac{24}{9!!}\times \\ \times\left[\begin{matrix} \left(\alpha^2 - \beta^2\right)\times \\ \times\left(b_{002} - \frac{1}{2}\left(b_{200} + b_{020}\right)\right) + \\ + \left(b_{200} - b_{020}\right)\times \\ \times\left(\gamma^2 - \frac{1}{2}\left(\alpha^2 + \beta^2\right)\right) \end{matrix}\right] + \\ + \frac{3}{70} + \left(\begin{matrix} \gamma^2\left(\alpha^2 - \beta^2\right) + \\ + \frac{1}{4}\left(\beta^4 - \alpha^4\right) \end{matrix}\right)_{b_{000}} \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{3}{2}\left(b_{202} - b_{022}\right) + \frac{1}{4}\left(b_{040} - b_{400}\right)$$

$$\frac{11!!32\delta_C}{72} - \frac{72}{9!!}\left(\alpha^2 - \beta^2\right)\left(b_{200} - b_{020}\right) +$$
$$+ \frac{3}{35}\left(\alpha^2 - \beta^2\right)^2 b_{000} = b_{400} + b_{040} - 6b_{220} \quad (13)$$

$$\begin{cases} \frac{11\delta_C}{72}\left(\begin{matrix} C_{41} - \frac{18}{9!!}b_{101}\times \\ \times\left[\begin{matrix} \gamma^2 - \frac{1}{2}\left(\alpha^2 + \beta^2\right) - \\ - \frac{1}{4}\left(\alpha^2 - \beta^2\right) \end{matrix}\right] \end{matrix}\right) \\ = b_{103} - \frac{3}{4}\left(b_{301} + b_{131}\right) \\ \frac{11!!}{72}\left(\delta_C C_{43} - \frac{18}{9!!}\right)\left(\left(\alpha^2 - \beta^2\right)\frac{b_{101}}{6}\right) = \\ = \frac{b_{301} - 3b_{121}}{6} \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} \frac{11!!}{72}\left\{\delta_C S_{41} - \frac{18}{9!!}b_{011}\times \right. \\ \left. \times\left[\left(\gamma^2 - \frac{1}{2}\right)\left(\alpha^2 + \beta^2\right) + \frac{1}{4}\left(\alpha^2 - \beta^2\right)\right]\right\} = \\ = b_{013} - \frac{3}{4}\left(b_{031} + b_{211}\right) \\ \frac{11!!}{72}\left\{\delta_C S_{43} + \frac{18}{9!!6}\left(\alpha^2 - \beta^2\right)b_{011}\right\} = \\ = 3\frac{b_{211} - b_{031}}{6} \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} \frac{11!!}{72}\left(\begin{matrix} \delta_C S_{42} + \frac{18}{9!!}\times \\ \times\left[3\left(\gamma^2 - \left(\alpha^2 + \beta^2\right)\right)\right]b_{110} \end{matrix}\right) = \\ = 3b_{112} - \frac{1}{2}\left(b_{310} + b_{130}\right) \\ \frac{11!!}{72}\left(\delta_C S_{44} + \frac{18}{9!!8}\left(\alpha^2 - \beta^2\right)b_{110}\right) = \\ = \frac{b_{310} - b_{130}}{8} \end{cases} \quad (16)$$

Кожна з систем рівнянь (9)–(16) недовизначена. Для їх доповнення використаємо представлення похідних рівностями (1), коефіцієнти розкладу яких визначаються через степеневі моменти густини $I_{pqs}\left(p + q + s \le 2\right)$ та інтегральні поверхневі характеристики

$$\sigma_{pqs}[1](p+q+s\le 4).$$

Вважаючи їх невідомими і враховуючи додаткові умови вигляду

$$\sigma_{p+2qs}+\sigma_{pq+2s}+\sigma_{pqs+2}=\sigma_{pqs},$$

$$(p+q+s)\le 2, \qquad (17)$$

у випадку лінійної незалежності отримуємо, що їх кількість відповідає числу рівнянь. Дійсно, коефіцієнтів N-го порядку є

$$d=\frac{(N+1)(N+2)}{2};$$

співвідношень, що задовольняють стоксові сталі, $t=(2N+1)$, далі, b_{mnk} можна виразити через $d^i_{pqs}(p+q+s\le \ \le N-1)$, які в свою чергу визначаються як лінійна комбінація $\sigma_{pqs}(p+q+s\le N)$. Невідомими є інтеграли для $l=p+q+s=N$, бо при $l<N$ вони визначені раніше. Загальна кількість σ_{pqs} обчислюється як $\frac{N}{2}(N-1)$, а тому

$$t+l=\frac{N(N-1)}{2}+(2N+1)=$$

$$=\frac{N^2+3N+2}{2}=\frac{(N+1)(N+2)}{2}=d. \qquad (18)$$

Знайдемо спочатку зв'язок між коефіцієнтами b_{mnk} і d^i_{pqs}, для чого випишемо многочлени W_{mnk}, використовуючи рекурентні співвідношення $(m+n+k\le 4)$ (приймемо позначення $a_1=A, a_2=B, a_3=C, x_1=$ $=x, x_2=y, x_3=z$)

$$W_{mnk}(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{2^{m+n+k}m!n!k!a_1{}^m a_2{}^n a_3{}^k}\frac{\partial^n}{\partial x_1^m\partial x_2^n\partial x_3^k}\left(\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}-1\right)^{m+n+k}$$

$$W_{000}=1, W_{100}=\frac{x_1}{a_1}, W_{010}=\frac{x_2}{a_2}, W_{001}=\frac{x_3}{a_3}$$

$$W_{200}=\frac{1}{2a_1^2}\left[3\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2+\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2+\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2-1\right],\quad W_{020}=\frac{1}{2a_2^2}\left[3\left(\frac{x_2}{a}\right)^2+\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2+\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2-1\right]$$

$$W_{002}=\frac{1}{2a_3^2}\left[3\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2+\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2+\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2-1\right],\quad W_{110}=2\frac{x_1}{a_1}\frac{x_2}{a_2}, W_{101}=2\frac{x_1}{a_1}\frac{x_3}{a_3},$$

$$W_{011}=2\frac{x_2}{a_2}\frac{x_3}{a_3}, W_{300}=\frac{x_1}{2a_1^4}\left[5\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^3+5\left(\frac{x_2}{a}\right)^2+3\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2-3\right],$$

$$W_{210}=\frac{3x_2}{2a_1^2a_2^3}\left[3\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2+\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2+\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2-1\right],\quad W_{201}=\frac{3x_3}{2a_1^2a_3^2}\left[3\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2+\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2+\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2-1\right]$$

$$W_{120}=\frac{3x_1}{a_1^2a_2^2}\left[3\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2+\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2+\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2-1\right],\quad W_{102}=\frac{3x_1}{a_1^2a_3^2}\left[3\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2+\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2+\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2-1\right] \qquad (19)$$

$$W_{111}=\frac{150}{2}\frac{x_1}{a_1{}^2}\frac{x_2}{a_2{}^2}\frac{x_3}{a_3{}^2}, W_{012}\frac{3x_2}{2a_2^2a_3^2}\left[3\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2+\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2+\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2-1\right]$$

$$W_{021}=\frac{3x_3}{2a_2^2a_3^2}\left[3\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2+\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2+\left(\frac{x_3}{a_2}\right)^2-1\right],\quad W_{003}=\frac{x_3}{2a_3^4}\left[5\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2+3\left(\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2+3\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2-3\right)\right],$$

$$W_{030}=\frac{x_2}{2a_2^4}\left[5\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2+3\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2+3\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2-3\right],$$

$$W_{400}=\frac{1}{8a_1^4}\left[\begin{array}{l}35\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^4+30\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2\left(\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2+\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2-1\right)\\+3\left(\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2-1\right)+\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^4-2\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2+1\end{array}\right],$$

$$W_{310}=2\frac{x_1}{a_1^4}\frac{x_2}{a_2^2}\left[5\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2+3\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2+3\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2-3\right],$$

$$W_{301}=\frac{2x_1x_3}{a_1^4a_3^2}\left[5\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2+3\left(\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2+3\left(\frac{x_3}{a_3}\right)-3\right)\right]$$

$$W_{211}=\frac{6x_2x_3}{a_1^2a_2^2a_3^3}\left[3\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2+\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2+\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2-1\right],\quad W_{121}=\frac{6x_1x_3}{a_1^2a_2^2a_3^2}\left[3\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2+\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2+\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2-1\right]$$

$$W_{112}=\frac{6x_1x_2}{a_1^2a_2^2a_3^2}\left[3\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2+\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2+\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2-1\right],\quad W_{031}=\frac{2x_3x_2}{a_3^2a_2^4}\left[5\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2+3\left(\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2+3\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2-3\right)\right]$$

$$W_{013}=\frac{2x_2y_3}{a_2^4a_3^2}\left[5\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2+3\left(\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2+3\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2-3\right)\right]$$

$$W_{220}=\frac{3}{4a_1^2a_2^2}\left[\begin{array}{l}5\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^4+6\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2\left(3\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2+\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2-1\right)+\\+5\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^4+6\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2\left(\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2-1\right)+\left(\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2+1\right)^2\end{array}\right]$$

$$W_{202}=\frac{3}{4a_1^2a_3^2}\left[\begin{array}{l}5\left(\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^4+\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^4\right)\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^4+18\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2++\\6\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2\left(\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2+\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2\right)-6\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2-2\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2+1\end{array}\right]$$

$$W_{004}=\frac{1}{8a_2^4}\left[\begin{array}{l}35\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^4+30\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2\left(\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2+\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2-1\right)+\\+3\left[\left(\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2+\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2\right)^2-2\left(\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2+\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2\right)+1\right]\end{array}\right]$$

$$W_{004}=\frac{1}{8a_2^4}\left[\begin{array}{l}35\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^4+30\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2\left(\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2+\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2-1\right)+\\+3\left[\left(\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2+\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2\right)^2-2\left(\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2+\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2\right)+1\right]\end{array}\right]$$

$$W_{130}=\frac{2x_1x_2}{a_1^2a_2^4}\left[5\left(\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2+3\left(\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2+3\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2-3\right)\right)\right]$$

$$W_{103}=\frac{2x_1x_3}{a_1^2a_3^4}\left[5\left(\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2+3\left(\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2+3\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2-3\right)\right)\right]$$

Використовуючи тотожність

$$\frac{\partial\delta}{\partial x_i}=\sum^3 d^i_{pas}W_{pas}=\sum^4 b_{mnk}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(W_{mnk}\right) \quad (20)$$

і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях отримаємо:

0	$d'_{000}-\frac{1}{2}\left(d'_{200}+d'_{020}+d'_{002}\right)=b_{100}-\frac{3}{2}\left(b_{300}+b_{120}+b_{102}\right)$
x_1	$d'_{000}-\frac{3}{2}\left(d'_{300}+d'_{102}+d'_{120}\right)=3b_{200}+b_{020}+b_{002}-\frac{1}{8}\left(b_{400}+b_{040}+b_{004}\right)+$ $-\frac{3}{4}\left(36b_{202}+36b_{220}+12b_{022}\right)$
x_2	$d'_{010}-\frac{3}{2}\left(d'_{030}+d'_{210}+d'_{012}\right)=2b_{110}-6b_{310}-6b_{130}-6b_{112}$
x_3	$d'_{001}-\frac{3}{2}\left(d'_{003}+d'_{201}+d'_{021}\right)=2b_{101}-6\left(b_{103}+b_{301}\right)-6b_{121}$
x_1^2	$\frac{3}{2}d'_{200}+\frac{1}{2}d'_{020}+\frac{1}{2}d'_{002}=\frac{3}{2}\left(5b_{300}+3b_{120}+3b_{102}\right)$ (21)
x_2^2	$\frac{1}{2}\left(d'_{200}+3d'_{020}+d'_{002}\right)=\frac{1}{2}\left(3b_{300}+3b_{120}+3b_{102}\right)$
x_3^2	$\frac{1}{2}\left(d'_{200}+d'_{020}+3d'_{002}\right)=\frac{1}{2}\left(3b_{300}+3b_{120}+9b_{102}\right)$
x_1x_2	$2d'_{110}=9b_{210}+3b_{012}+9b_{030}$
x_1x_3	$2d'_{101}=3b_{021}+9b_{003}+9b_{201}$
x_2x_3	$2d'_{011}=\frac{105}{2}b_{111}$
x_3	$\frac{1}{2}\left(5d'_{300}+3d'_{102}+3d'_{120}\right)=\frac{1}{8}\left[\left[140b_{400}+12\left(b_{040}+b_{004}\right)\right]+15\left(b_{220}+b_{202}\right)+3b_{022}\right]$
x_2^3	$\frac{1}{2}\left(5d'_{030}+3d'_{210}+3d'_{012}\right)=6b_{310}+10b_{130}+6b_{112}$
x_3^3	$\frac{1}{5}\left(5d'_{003}+3d'_{201}+3d'_{021}\right)=6\left(b_{301}+b_{121}\right)+10b_{103}$
$x_1^2x_2$	$\frac{1}{2}\left(9d'_{210}+3d'_{030}+3d'_{012}\right)=30b_{310}+18b_{130}+18b_{112}$
$x_1^2x_3$	$\frac{1}{2}\left(9d'_{201}+3d'_{003}+3d'_{021}\right)=30b_{301}+18b_{103}+18b_{121}$
$x_1x_3^2$	$\frac{1}{2}\left(9d'_{102}+3d'_{300}+3d'_{120}\right)=\frac{60}{8}\left(b_{400}+b_{004}\right)+\frac{12}{8}b_{040}+\frac{3}{4}\left(12b_{220}+36b_{202}+12b_{022}\right)$
$x_1x_2^2$	$\frac{1}{2}\left(3d'_{102}+3d'_{300}+9d'_{120}\right)=\frac{60}{8}\left(b_{400}+b_{040}\right)+\frac{12}{8}b_{004}+\frac{3}{4}\left(36b_{220}+12b_{202}+b_{022}\right)$

$x_2 x_3^2$ $\quad \frac{1}{2}\left(9d'_{201}+3d'_{030}+9d'_{021}\right)=6b_{301}+6b_{103}+18b_{121}$

$x_2^2 x_3$ $\quad \frac{1}{2}\left(9d'_{012}+3d'_{030}+9d'_{210}\right)=6b_{310}+6b_{130}+18b_{112}$

Система рівнянь (9)-(16), а також (21) дозволяє знайти коефіцієнти розкладу b_{mnk} через d_{pqs}, а структура її дозволяє розділити на частини, а саме:

$$\begin{cases} 2b_{003}-3\left(b_{201}+b_{021}\right)=105\delta_C C_{30}-27\left(\gamma^2-\frac{1}{2}\left(\alpha^2+\beta^2\right)\right)b_{001} \\ b_{001}-b_{021}=210\delta_C C_{30}-\frac{27}{2}\left(\alpha^2-\beta^2\right)b_{001} \\ \left(b_{003}+b_{201}+b_{021}\right)=\frac{2}{3}\left(-d^3_{000}+\frac{1}{2}\left(d^3_{200}+d^3_{020}+d^3_{002}\right)\right)+\frac{2}{3}b_{001} \\ 5b_{003}+3\left(b_{021}+b_{201}\right)=d^3_{200}+d^3_{020}+d^3_{002} \\ 3b_{003}+3b_{021}+3b_{201}=d^3_{200}+2d^3_{020}+d^3_{002} \\ 3b_{003}+3b_{021}+3b_{021}=3d^3_{200}+d^3_{020}+d^3_{002} \end{cases} \tag{22}$$

$$\begin{cases} 2b_{102}-\frac{1}{3}\left(b_{300}+b_{120}\right)=105\delta_C C_{31}-27\left(\gamma^2-\frac{1}{2}\left(3\alpha^2+\beta^2\right)\right)b_{100} \\ \frac{b_{300}}{3}-b_{120}=105\delta_C C_{33}-27\left(\alpha^2-\beta^2\right)b_{100} \\ 5b_{300}+3b_{120}+3b_{102}=3d'_{200}+d'_{020}+d'_{002} \\ 3b_{300}+9b_{120}+3b_{102}=d'_{200}+3d'_{020}+d'_{002} \\ 3b_{300}+3b_{120}+9b_{102}=d'_{200}+d'_{020}+3d'_{002} \\ \frac{2}{3}\left(b_{300}+b_{120}+b_{102}\right)=b_{100}-d'_{000}+\frac{1}{2}\left(d'_{200}+d'_{020}+d'_{002}\right) \end{cases} \tag{23}$$

$$\begin{cases} b_{102}-\frac{1}{2}\left(b_{210}+b_{030}\right)=150S_{31}-27\left(\gamma^2-\frac{1}{2}\left(\alpha^2+\beta^2\right)\right)b_{010} \\ \frac{1}{8}\left(b_{012}-\frac{1}{3}b_{030}\right)=105S_{33}-\frac{27}{8}\left(\alpha^2-\beta^2\right)b_{010} \\ \frac{3}{2}\left(b_{030}+b_{210}+b_{012}\right)=b_{010}-d^2_{000}+\frac{1}{2}\left(d'_{200}+d'_{020}+d'_{002}\right) \\ 5b_{030}+3b_{210}+3b_{012}=d^2_{200}+3d^2_{020}+d^2_{002} \\ 3b_{030}+b_{210}+b_{012}=d^2_{200}+d^2_{020}+d^2_{002} \\ 3b_{030}+b_{210}+b_{012}=d^2_{200}+3d^2_{020}+d^2_{002} \end{cases} \tag{24}$$

Маємо три системи рівнянь, які доповнюємо умовами:

$$\begin{aligned} \sigma_{300}+\sigma_{120}+\sigma_{102}&=\sigma_{100} \\ \sigma_{030}+\sigma_{210}+\sigma_{012}&=\sigma_{010} \\ \sigma_{003}+\sigma_{201}+\sigma_{021}&=\sigma_{001} \end{aligned} \tag{25}$$

Аналогічно групуємо системи для коефіцієнтів 4-го порядку:

$$
\left\{
\begin{aligned}
& b_{004}+\frac{3}{8}(b_{400}+b_{040})+3(b_{202}+b_{022})+\frac{3}{4}b_{220}= \\
& =\frac{11!!}{72}\Big\{\delta_C C_{40}-\frac{72}{7!!}\Big(\gamma^2-\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)\Big(b_{002}-\frac{1}{2}(b_{200}+b_{020})\Big)\Big)+ \\
& +(\alpha^2+\beta^2)\frac{b_{200}-b_{020}}{4}\Big\}+\frac{3}{5}\Big(\gamma^4+\gamma^2(\alpha^2+\beta^2)+\frac{1}{8}(3\alpha^4+3\beta^4-2\alpha^2\beta^2)\Big) \\
& \frac{3}{2}(b_{202}-b_{022})+\frac{1}{4}(b_{040}-b_{400})=\frac{11!!}{72}\Big\{4\delta_C C_{42}-\frac{54}{9!!}\Big[(\alpha^2-\beta^2)\Big(b_{002}-\frac{1}{2}(b_{200}+b_{020})+ \\
& +(b_{200}-b_{020})\Big(\gamma^2-\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)\Big)+\frac{3}{10}(\alpha^2-\beta^2)(b_{200}-b_{020})\Big)\Big]\Big\} \\
& b_{400}+b_{040}-6b_{220}=\frac{11!!}{72}32\Big\{\delta_C C_{44}-72(\alpha^2-\beta^2)(b_{200}-b_{020})+\frac{3}{35}(\alpha^2-\beta^2)b_{000}\Big\} \\
& 140b_{400}+12(b_{040}+b_{004})+15(b_{220}+b_{202})+9b_{022}=4(5d'_{300}+3d'_{102}+3d'_{210}) \\
& 15(b_{400}+b_{004})+3b_{040}+3(12b_{220}+36b_{202})+12b_{022}=9d'_{102}+3d'_{300}+3d'_{120} \\
& 15(b_{400}+b_{004})+3b_{004}+36(3b_{220}+(b_{202}+b_{022}))=9d'_{201}+3d'_{030}+9d'_{021} \\
& 140b_{040}+12(b_{400}+b_{004})+15(b_{220}+b_{022})+b_{202}=4(5d^2_{030}+3d^2_{210}+d_{012}) \\
& 15(b_{040}+b_{400})+3b_{004}+36(3b_{220}+b_{022}+b_{202})=9d
\end{aligned}
\right. \tag{26}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
& 11!!\left[b_{103}-\frac{3}{4}(b_{301}+b_{121})\right]=\frac{11!!\delta_C}{72}\left(C_{41}-\frac{18}{9!!}b_{101}\left(\gamma^2-\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)\right)-\frac{1}{4}(\alpha^2-\beta^2)\right) \\
& \frac{11!!\delta_C}{72}\left[\frac{b_{301}-3b_{121}}{6}\right]=\frac{11!!}{72}\left(\delta_C C_{43}-\frac{18}{9!!}\frac{(\alpha^2-\beta^2)}{6}b_{101}\right) \\
& 10b_{103}+6b_{301}+6b_{121}=\frac{1}{2}(5d'_{003}+9d_{201}+3d_{021}) \\
& 18b_{103}+30_{301}+18b_{121}=\frac{1}{2}(3d'_{003}+3d_{201}9d_{021}) \\
& 9b_{103}+6_{301}+18b_{121}=\frac{1}{2}(3d'_{003}+3d_{201}3d_{021}) \\
& 2b_{101}-6(b_{301}+b_{103}+b_{121})=d'_{001}-\frac{1}{2}(d_{003}+d_{201}+d_{021})
\end{aligned}
\right. \tag{27}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
& 3b_{112}-\frac{1}{2}(b_{310}+b_{130})=\frac{11!!}{72}\left(\delta_C S_{42}-\frac{18}{9!!}\left(3\gamma^2-\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)\right)b_{110}\right) \\
& \frac{b_{130}+b_{130}}{2}=\frac{11!!}{72}\left(\delta_C S_{44}-\frac{18}{8\cdot 9!!}(\alpha^2-\beta^2)b_{110}\right) \\
& 10b_{130}+6b_{310}+6b_{112}=\left(d'_{003}+\frac{1}{2}(5d_{030}+3d_{210}+3d_{012})\right) \\
& 18b_{130}+30b_{310}+18b_{112}=\frac{1}{2}(3d'_{030}+9d_{210}+3d_{012}) \\
& 6b_{130}+6b_{310}+18b_{112}=\frac{1}{2}(3d'_{030}+3d_{210}+9d_{012}) \\
& 2b_{110}-6b_{310}-6b_{130}-6b_{112}=d'_{010}-\frac{3}{2}(d'_{030}+d_{210}+d_{012})
\end{aligned}
\right. \tag{28}
$$

Отримання останньої системи випливає з тотожності:

$$\frac{\partial \delta}{\partial x_2} = \sum_{m+n+k=0}^{4} b_{mnk} \frac{\partial}{\partial x_2}\left(W_{mnk}\right) = \sum_{p+q+s}^{3} d_{pqs}^2 W_{pqs}$$

В результаті одержимо:

$$\begin{cases} b_{013} - \frac{3}{4}\left(b_{031} + b_{211}\right) = \frac{11!!}{72}\left(\delta_C S_{41} - \frac{18}{9!!} b_{011}\left(\gamma^2 - \frac{1}{2}\left(\alpha^2 + \beta^2\right)\right) + \frac{1}{4}\left(\alpha^2 - \beta^2\right)\right) \\ \frac{3b_{211} - b_{031}}{6} = \frac{11!!}{72}\left(\delta_C S_{42} - \frac{3}{9!!}\left(3\gamma^2 - \frac{1}{2}\left(\alpha^2 + \beta^2\right)\right) b_{110}\right) \\ 10b_{013} + 6b_{031} + 6b_{211} = \frac{1}{2}\left(5d_{003}^2 + 3d_{201}^2 + 3d_{021}^{'}\right) \\ 6b_{013} + 6b_{031} + 18b_{211} = \frac{1}{2}\left(3d_{003}^2 + 9d_{201}^2 + 3d_{021}^2\right) \\ 18b_{013} + 30b_{031} + 18b_{211} = \frac{1}{2}\left(3d_{003}^2 + 3d_{201}^2 + 9d_{021}^2\right) \\ 2b_{011} - 6\left(b_{301} + b_{031} + b_{211}\right) = d_{001}^2 - \frac{3}{2}\left(d_{003}^2 + d_{201}^2 + d_{021}^2\right) \end{cases}$$

Системи рівнянь (24)–(27) знову замикаємо умовами, пам'ятаючи, що d_{pqs}^i визначається через σ_{pqs}

$$\begin{cases} \sigma_{400} + \sigma_{220} + \sigma_{202} = \sigma_{200} \\ \sigma_{220} + \sigma_{040} + \sigma_{022} = \sigma_{020} \\ \sigma_{202} + \sigma_{004} + \sigma_{022} = \sigma_{002} \\ \sigma_{310} + \sigma_{130} + \sigma_{112} = \sigma_{110} \\ \sigma_{301} + \sigma_{121} + \sigma_{103} = \sigma_{101} \\ \sigma_{031} + \sigma_{211} + \sigma_{013} = \sigma_{011} \end{cases} \qquad (29)$$

Опишемо алгоритм знаходження коефіцієнтів b_{mnk} для кожної з частин:

1. Визначаємо коефіцієнти розкладу $b_{mnk}(m+n+k \le 2)$ за формулою (6).
2. Введемо позначення:

b – стовпець невідомих b_{mnk} розмірності z_1,

d – стовпець знайдених d_{pas}^i розмірності l_1,

C – стовпець стоксових сталих – t_1,

c* – стовпець обчислених стоксових сталих розмірності t_1,

A – матриця зв'язку розмірності $t_1 \times d_1$, b_{mnk} і d_{pqs}^i,

F – матриця зв'язку розмірності $t_1 \times d_1$ стоксових сталих C_{nk}, S_{nk} і b_{mnk}

D^m – матриця зв'язку між векторами d і σ^m

σ^m – стовпець величин σ^m (при $m \le k-1$) є відомими.

Тоді ряд матричних рівнянь дає розв'язок задачі:

$$d = Ab,\ b = A^{-1}d \ (\text{при } \det A \ne 0) \qquad (30)$$

$$d = \sum_{m=0}^{n-1} D^m \sigma^m + D^n \sigma^n$$

$$b = \sum_{m=0}^{n-1} A^{-1} D^m \sigma^m + A^{-1} D^n \sigma^n \qquad (31)$$

$$C - c^* = Fb,$$

$$C - c^* = \sum_{m=0}^{n-1} F A^{-1} D^m \sigma^m + F A^{-1} D^n \sigma^n . \qquad (32)$$

Доповнюючи останнє матричне рівняння сукупністю рівностей виду (25), (29), одержимо систему

$$\begin{cases} F A^{-1} D^n \sigma^n = C - c^* - \sum_{m=0}^{n-1} F A^{-1} D^m \sigma^m \\ \sigma^n = \sigma^{n-2} \end{cases}, \qquad (33)$$

в якій кількість рівнянь ($t_1 + l_1$) така ж, як і кількість невідомих σ^n.

Застосовуючи цей алгоритм до систем однотипних рівнянь, визначаємо послідовно вектор невідомих σ^n, а далі з рівності (31) і вектор b, що дає можливість знаходити розподіл густини мас за формулою (4) в довільній точці еліпсоїдальної планети.

Література

1. Мещеряков Г.А. Динамическая фигура Луны и распределение плотности лунных

недр // Астрон.журн. – 1973. – Т. 50, № 1. – С. 186-187.
2. Мещеряков Г.А. Использование стоксовых постоянных Земли для уточнения ее механических моделей // Геодезия, картография и аэрофотосьемка. – 1975. – Вып.21. – С. 23-30.
3. Мещеряков Г.А., Фыс М.М. Определение плотности земных недр рядами по биортогональным системам многочленов // Теория и методы интерпретации гравитационных аномалий. – 1981. – С. 329-334.
4. Фис М.М., Фоца Р.С., Согор А.Р. Побудова точних моделей розподілу мас планет з урахуванням стоксових постійних вищих порядків // Збірник наукових праць „Новітні досягнення геодезії, геоінформатики та землевпорядкування – Європейський досвід”. – 2007. – Чернігів.
5. Фис М.М., Зазуляк П.М., Заяць О.С. До питання визначення кульових функцій в загально планетарній системі координат. // „Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва” Збірник наукових праць Західного Геодезичного Товариства. – Львів: Ліга-Прес. – 2004.

МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАСС ПЛАНЕТЫ С УЧЕТОМ СТОКСОВЫХ ПОСТОЯННЫХ ДО ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

М.М. Фис, Р.С. Фоца, А.Р. Согор, В.О. Волос

Описан алгоритм построения модельных распределений плотности планеты с учетом стоксовых постоянных четвертого порядка.

Ключевые слова: вычислительный алгоритм; модель распределения плотности; стоксовы постоянные.

METHOD FOR PLANETS DENSITY DISTRIBUTION CONSTRUCTION WITH USING OF STOKE'S CONSTANTS TO FOURTH ORDER

M.M. Fys, R.S. Fotsa, A.R. Sogor, V.O. Volos

The algorithm for planets density distributions construction with using of Stoke's constant of fourth order is presented.

Key words: computational algorithm; density distributions model; Stoke's constants.

Національний університет "Львівська політехніка", м. Львів Надійшла 12.10.2008