



ТИМОХА
Олександр Миколайович —
академік НАН України,
директор Інституту математики
НАН України

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ ДИНАМІКИ РІДИНИ В РУХОМИХ РЕЗЕРВУАРАХ

Стенограма доповіді на засіданні Президії
НАН України 12 січня 2022 року

У доповіді розглянуто нові вагомі фундаментальні результати в галузі математичних проблем динаміки наповнених рідиною тіл з вільною поверхнею, отримані в Інституті математики НАН України. Ці результати потенційно мають широке коло застосувань, починаючи від традиційних інженерних галузей (металургія, ракетно-, літако-, кораблебудування, отримання нових матеріалів з наперед заданими властивостями тощо) і завершуючи біомедициною, фармацевтикою та біотехнологіями. Підкреслено, що для подальшого ефективного розвитку цього напрямку необхідно посилити координацію з установами НАН України біомедичного та матеріалознавчого профілю, розширити міжнародну наукову співпрацю та приділити особливу увагу підготовці наукових кадрів вищої кваліфікації за відповідною спеціалізацією.

Добрий день, шановні колеги!

Дуже вдячний за можливість зробити цю доповідь на засіданні Президії НАН України. І хоча її назва викликає, мабуть, певні асоціації з механікою, насправді ці роботи пов'язані з розробленням суто математичного напрямку.

Роботи в галузі математичних проблем динаміки наповнених рідиною тіл з вільною поверхнею беруть свій початок від праць Михайла Олексійовича Лаврентьєва. Далі вони розвивалися в рамках наукової школи, заснованої у 50-х роках минулого століття Олександром Юлійовичем Ішлінським, а певного поштовху набули під керівництвом мого вчителя Івана Олександровича Луковського. На сучасному етапі на стику різних математичних напрямів започатковано нові актуальні наукові дослідження, пов'язані з математичною теорією нелінійних хвиль, які до того ж мають міждисциплінарний характер.

Свою доповідь я почну словами великого Ісаака Ньютона, сказаними ним незадовго до смерті: «Я не знаю, яким я поставлю перед світом, але мені здається, що я схожий на маленького

хлопчика, який бавиться на березі моря і дуже радіє, коли час від часу знаходить більш гладенький камінець чи гарнішу, ніж зазвичай, мушлю, тоді як великий, непізнаний ще океан істини лежить переді мною»¹. Ця фраза стосується як науки загалом, так і теорії поверхневих хвиль зокрема, оскільки ця теорія надзвичайно багата на парадокси і пов'язана з новою математикою.

Незважаючи на те, що основи теорії поверхневих хвиль було закладено більш як два століття тому, в різних випадках і в різних інтерпретаціях вона описує різні феномени і приводить до абсолютно різних типів розв'язків. У 1815 р. французький математик Огюстен-Луї Коші отримав Гран-прі з математики Паризької академії наук за лінійну теорію поверхневих хвиль для необмеженого об'єму рідини. А рік потому Сімеон-Дені Пуассон трансформував теорію фактично до сучасного вигляду.

Говорячи про теорію хвиль, слід згадати ще Михайла Васильовича Остроградського, який у 1826 р., перебуваючи у паризькій борговій в'язниці Кліші через несплачені борги, написав працю «Mémoire sur la propagation des ondes dans un bassin cylindrique» про теорію лінійних поверхневих хвиль для вертикального кругового циліндричного бака, тобто на випадок обмеженого об'єму рідини. До речі, О. Коші високо оцінив цей «мемуар» і не лише рекомендував роботу М.В. Остроградського Паризькій академії наук для друку в «Memoires des Savants etrangers a l'Academie» («Записки вчених, що не належать до Академії»), а й викупив його борги, хоч і сам був не надто багатю людиною.

Для доведення деяких теорем лінійної теорії поверхневих хвиль для необмеженого, на-

півобмеженого та обмеженого об'єму рідини знадобилося ще понад 200 років, а нелінійна задача поки що залишається terra incognita.

Спрощуючи лінійну постановку, її можна звести до аналізу спектральної задачі:

$$\nabla^2 \varphi = 0 \text{ in } Q_0 \text{ — об'єм рідини;}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ on } S_0 \text{ — змочені поверхні, дно;}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \kappa \varphi \text{ on } \Sigma_0 \text{ — незбурена вільна поверхня.}$$

Властивості спектральної задачі значною мірою залежать від типу об'єму. Якщо це необмежений об'єм рідини, наприклад океан, то внаслідок відсутності резонансів у системі ми отримуємо неперервний спектр; якщо об'єм напівобмежений, наприклад катамаран, то це так звані trapped modes — пригнічені, або «захоплені», моди, і в цьому разі всередині неперервного спектру можуть «лежати» певні власні частоти; якщо ж об'єм обмежений, наприклад контейнер, то є нескінченна кількість власних значень, а отже, нескінченна кількість резонансів у системі (причому актуальними є найнижчі). Резонансний характер руху рідини в обмеженому об'ємі зумовлює його строго нелінійність і породжує складні резонансні хвильові феномени та хаос. Причому саме випадок обмеженого об'єму найбільш важливий з практичної точки зору.

У 2012 р. у журналі Physical Review вийшла стаття співробітників Каліфорнійського університету Ганса Маєра та Руслана Кречетникова «Прогулянка з кавою: чому вона розливається?»², в якій вони встановили причину розплескування кави у чашці під час ходьби, проаналізувавши динаміку рідини в обмеженому об'ємі та біомеханіку рухів людини. До речі, я був рецензентом цієї роботи. І хоча математично ця задача не дуже складна, вона цікава, «весела» і практично корисна (можна чітко пояснити, чому кава розливається

¹ 'I do not know what I may appear to the world, but to myself I seem to have been only like a boy playing on the sea-shore, and diverting myself in now and then finding a smoother pebble or a prettier shell than ordinary, whilst the great ocean of truth lay all undiscovered before me" (*Memoirs of the Life, Writings, and Discoveries of Sir Isaac Newton*. Cambridge University Press, 2010. (First published in 1855 by Sir David Brewster). <https://doi.org/10.1017/CBO9780511792687>

² Mayer H., Krechetnikov R. Walking with coffee: Why does it spill? *Physical Review E*. 2012. **85**(4): 046117. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.85.046117>

ся). Недарма в тому ж самому 2012 р. авторам статті було присуджено Шнобелівську премію.

Зовсім інша ситуація з питанням, чому пиво в аналогічних умовах не розливається (мається на увазі, що пиво в кухлі не «перелите», тобто між вінцями посудини і поверхнею рідини є певний простір). Ця задача, на відміну від задачі про каву, математично не розв'язана, проте саме явище добре відоме. Наприклад, великий хімічний концерн BASF разом з південнокорейською машинобудівною компанією Samsung Heavy Industries використовують його для демпфування коливань нафти і зрідженого газу в танкерах — вони розробили спеціальну «ковдру» з пінопластових кубиків, яка запобігає розбризкуванню цих вуглеводнів під час транспортування.

Однак ані в першому, ані в другому прикладах відомі розв'язки не можуть пояснити ці феномени, оскільки пряма симуляція не здатна на параметричні студії, що стається за нескінченної кількості початкових сценаріїв для нескінченної кількості значень вхідних параметрів. Ці дослідження потребують інших підходів та методів.

Класичні інженерні задачі, в яких використовується теорія хвиль, пов'язані насамперед з ракетно-космічною тематикою (коливання рідинного палива в баках) або з коливаннями, що виникають при зберіганні та транспортуванні рідинних компонентів, вуглеводнів, чи з демпфуванням коливань у висотних спорудах за допомогою встановлених на даху великих посудин з водою. Усі ці застосування (крім скрапленого газу), можна звести до лінійних чи квазілінійних постановок, оскільки в них ідеться про ефективне демпфування, тобто зменшення коливань, і в цьому разі задача може бути лінеаризована. Проте зі скрапленням газом так не виходить — через використання криогенних технологій задача залишається суттєво нелінійною.

В останні десятиліття з'явилося безліч нових постановок задач, пов'язаних з нелінійними коливаннями рідини з вільною поверхнею в рухомому резервуарі, — від моделей людського ока чи жіночих грудей до моделювання

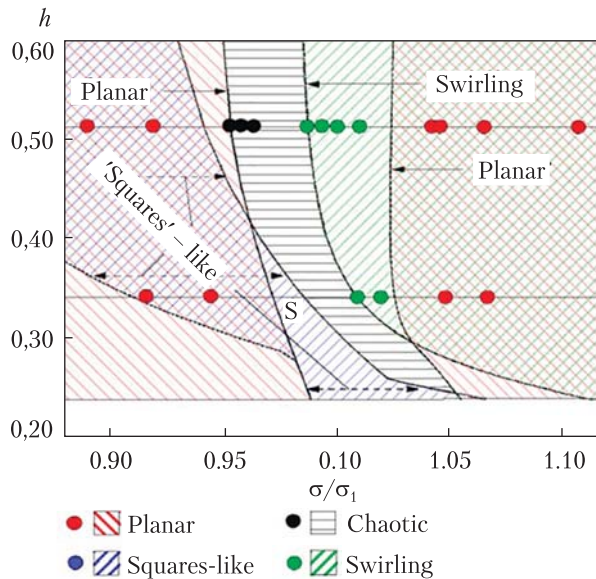
нашої планети, яка по суті є великим контейнером з рідиною.

Як уже було зазначено, наукова школа з математичних проблем динаміки наповнених рідиною тіл з вільною поверхнею розвивається в Інституті математики НАН України з 50—60-х років минулого століття і її роботи були переважно спрямовані на розв'язання класичних задач. Я також працював і за класичними, і за новими напрямками, у співпраці з іноземними колегами з різних математичних і прикладних наукових центрів було видано кілька монографій. Дуже цікавим прикладом застосування теорії є остання з них, присвячена вирощуванню аквакультур (риба, молюски) у садках, розміщених у відкритому морі чи океані, так званим *closed fish cages*. Це нелінійна задача, в якій є циліндричний резервуар з непроникними, завдяки застосуванню спеціальних плівок, стінками і вільною поверхнею рідини.

З математичної точки зору в XXI ст. перед теорією нелінійних хвиль стоять такі виклики:

- крайові задачі гіперболічного типу з вільною (невідомою) поверхнею, коли одночасно потрібно знайти розв'язки як для динаміки вільної поверхні, так і для поля швидкостей (тиску) в області, яка змінюється в часі;
- задачі, для яких не доведено жодного математичного твердження щодо розв'язності, немає прикладів точних розв'язків тощо;
- задачі, математичні аналітичні дослідження яких пов'язані з «дикими» аналітичними викладками;
- задачі, розв'язки яких можуть значно змінювати властивості залежно від геометричних та фізичних вхідних параметрів (наприклад, резонансна поведінка рідини в контейнері істотно залежить від його геометрії).

Неможливість застосувати традиційні обчислювальні методи для розв'язання таких задач зумовлена, по-перше, тим, що вони є суттєво нелінійними нескінченновимірними, тобто складними динамічними системами, і породжують мультістабільність та хаос; по-друге, тим, що поняття рівноваги може визначатися, зокрема, так званими вібросилами; по-третє,



Класифікація усталених хвильових рухів при поздовжніх гармонічних збуреннях

тим, що іноді необхідно повертатися і доводити нові твердження щодо математичних основ гідродинаміки, зокрема про усереднення за Лагранжем та Ейлером.

Розглянемо ці причини детальніше.

Наведу приклад складної динамічної системи. Це задача про резонансні коливання рідини в контейнері квадратного перерізу при поздовжньому збуренні, яку ми розв'язували на замовлення однієї норвезької компанії. На той момент ми вже мали потужний математичний апарат — мультимодальний метод, який дає змогу описувати наближену динамічну систему з нескінченною кількістю ступенів вільності. До речі, стаття³, в якій було висвітлено цей метод, у базі Scopus є не лише найцитованішою статтею за всю історію Інституту математики НАН України, а й загалом найцитованішою у світі за ключовим словом *sloshing* (коливання рідини у баках). Цей аналітичний підхід дає можливість математично строго побудувати

³ Faltinsen O.M., Rognebakke O.F., Lukovsky I.A., Timokha A.N. Multidimensional modal analysis of nonlinear sloshing in a rectangular tank with finite water depth. *Journal of Fluid Mechanics*. 2000. **407**: 201–234. <https://doi.org/10.1017/S0022112099007569>

наближену математичну модель (ODE), класифікувати хвильові рухи, стійкість і виявити діапазони хаосу. Так, мультимодальний метод з використанням варіаційного формалізму Бейтмена—Люка та асимптотики Нариманова—Моїсєєва дозволяє звести крайову задачу з вільною границею до відносно простих систем диференціальних рівнянь з дев'ятьма ступенями вільності.

Приклад класифікації усталених хвильових рухів при поздовжніх гармонічних збуреннях наведено на рисунку. Тут потрібно звернути увагу на мультистабільність системи (є кілька різного типу стійких розв'язків), в якій існують плоска, діагональна, кругова хвилі та хаос і з фізичної точки зору невідомо, за яких початкових умов виникає той чи інший тип хвилі. Експериментальні дані (точки на рисунку) підтверджують теоретичні розрахунки зазначених діапазонів збурюючих частот.

Ситуація стає дещо іншою, якщо змінюється тип бака. В разі кругового перерізу посудини діагональна хвиля не виникає, і можна побудувати аналогічну класифікацію, довівши строго математично мультистабільність та хаотичні рухи в такій системі. Важливим практичним застосуванням теорії є згадувана вище новітня технологія вирощування аквакультур. При цьому вода в баках спеціально збурюється так, щоб не було хаотичних коливань, а виникала стійка кругова хвиля, яка породжує так званий феномен Прандтля, що сприяє кращому розведенню риб чи молюсків.

Ми беремо участь у проєкті «Складні динамічні системи в природничих науках: теорія, математичне моделювання, чисельні методи та застосування передових технологій», який отримав фінансування в рамках конкурсу Національного фонду досліджень України «Підтримка досліджень провідних та молодих учених». Цей проєкт є спробою сформулювати більш широкий погляд на складні динамічні системи, зокрема на системи, подібні до нелінійних модальних систем.

Ще один аспект незастосовності традиційних обчислювальних методів для розв'язання таких задач полягає в тому, що в деяких випад-

ках рівновага у класичному розумінні перетворюється на так звану віброрівновагу, тобто рівновагу, яка визначається переважно вібро-силами.

Наприклад, у фізиці добре відома проблема вертикального, або зворотного, маятника. Це маятник, який закріплений на кінці жорсткого стрижня і центр мас якого знаходиться вище за точку опори. У нього, на відміну від горизонтального маятника, положення рівноваги є нестійким. Уперше теоретичне дослідження зворотного маятника провів А. Стефенсон у 1908 р., цій проблемі присвячена також класична праця М.М. Боголюбова, опублікована в 1942 р., але більш детально її вивчав П.Л. Капиця, який у 1951 р. розглянув та описав можливість стабілізації вертикального маятника за допомогою коливань підвісу. Тепер у літературі таку систему називають маятником Капиці.

Природно, виникає запитання, який аналог такої системи може бути в гідромеханіці, коли є суцільне середовище з вільною поверхнею. З фізичної точки зору цією проблемою займався ще М. Фарадей. У 1831 р. він провів серію експериментів з вивчення процесів стабілізації та сплюснення краплі рідини під пластиною, яка вібрує. У 1977 р. вийшла класична праця відомого вченого в галузі механіки Р.Ф. Ганієва, в якій він описав динамічну поведінку вільної поверхні рідини на розрив та нахил положення рівноваги при горизонтальних вібраціях.

Можна навести ще багато прикладів фізичних систем, у яких спостерігаються нестандартні, іноді екзотичні форми рівноваги, але у математиці цей напрям почав розвиватися лише наприкінці 80-х років минулого століття. В Інституті математики НАН України у співпраці із західними колегами було створено теорію парадоксальних віброфеноменів, яка описує, зокрема, і сплюснення краплі Фарадея, загальну математичну теорію віброрівноваги рідини, варіаційний формалізм краплі, що лежить в акустичному полі, теорію акустичного керування рідиною в космосі тощо.

І остання причина незастосовності традиційних обчислювальних методів пов'язана з тим, що іноді складаються такі ситуації, коли

необхідно доводити нові твердження щодо математичних основ гідродинаміки. Прикладом може бути так званий феномен азимутального масопереносу Прандтля, в якому з'являється кругова хвиля. Використовуючи аналітичні наближення кругової хвилі, було аналітично виведено формулу, яка адекватно описує азимутальний масоперенос Прандтля через меридіональний переріз, зокрема для випадку класичних експериментів Хаттона. Цей аналітичний результат є *контрприкладом* для базової гіпотези усереднених потоків:

$$\langle L \rangle = \langle E \rangle + S,$$

де $\langle L \rangle$ — усереднення за Лагранжем; $\langle E \rangle$ — усереднення за Ейлером; S — зсув Стокса.

Прикладами практичних застосувань можуть бути аерація вина, різні лабораторні дослідження, вирощування протейну.

Отже, в Інституті математики НАН України отримано вагомий фундаментальні результати, які дали новий поштовх для розвитку наукової школи, започаткованої академіками М.О. Лаврентьєвим, О.Ю. Ішлінським, Ю.О. Митропольським та І.О. Луковським. Сьогодні в Інституті активно розвиваються нові актуальні наукові напрями математичних досліджень. Зокрема, побудовано нові скінченновимірні математичні моделі динаміки рідини з вільною поверхнею в рухомих контейнерах та створено загальну математичну теорію капілярно-акустичних і вібраційних форм рівноваги. Вперше математично строго пояснено експериментальні явища, серед яких слід особливо відзначити феномен сплюснення краплі Фарадея та феномен масопереносу Прандтля.

Частину цих результатів отримано у співпраці з вченими-експериментаторами Норвезького університету природничих наук і технології, а також з математиками університетів Німеччини, зокрема Університету Лейпцига та Єнського університету імені Фрідріха Шиллера. Ця співпраця здійснювалася в рамках виконання проєктів, фінансованих Німецьким науково-дослідницьким співтовариством, Фондом імені Александра фон Гумбольдта, НАТО, INTAS, а також у рамках програм наукових центрів досконалості Норвегії (Centre

for Ships and Ocean Structures та Centre for Autonomous Marine Operations and Systems).

Основні результати досліджень опубліковано у високорейтингових фахових журналах та узагальнено в 6 монографіях. Зокрема, у 2012 р. монографію «Sloshing», написану у співавторстві з Odd Magnus Faltinsen і видану Cambridge University Press у 2009 р., перекладено й опубліковано китайською мовою видавництвом National Defence Press.

Отримані результати є також важливими з огляду на можливість їх застосування в тра-

диційних інженерних галузях, зокрема ракето-, літако- та суднобудуванні, конструюванні баків для перевезення та зберігання екологічно небезпечних рідин, а також у металургії, біотехнологіях для вирощування протеїну, у створенні нових надчистих матеріалів, біомеханіці та медицині. Крім того, деякі результати становлять інтерес для вчених, які займаються вулканологією та небесною механікою.

Дякую за увагу!

За матеріалами засідання підготувала О.О. Мележук

Alexander N. Timokha

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6750-4727>

MATHEMATICAL MODELS AND METHODS OF FLUID DYNAMICS IN MOBILE TANKS

Transcript of the report at the meeting of the Presidium of NAS of Ukraine, January 12, 2022

The report considers new important fundamental results in the field of mathematical problems of the dynamics of liquid-filled bodies with a free surface, obtained at the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine. These results potentially have a wide range of applications, from traditional engineering (metallurgy, rocketry, aircraft-, shipbuilding, new materials with predefined properties, etc.) to biomedicine, drug development and biotechnology. It was emphasized that for further effective development of this area it is necessary to strengthen coordination with institutions of the NAS of Ukraine in the field of biomedical and materials science, expand international scientific cooperation and pay special attention to training highly qualified scientific personnel of the relevant specialization.