УДК 517.98

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ СИСТЕМЫ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ И ПОЛУКВАДРАТИЧНЫХ СООТНОШЕНИЙ

© **Омельченко П.В.**

Институт математики Национальной Академии Наук Украины
отдел функционального анализа
ул. Терещенковская 3, Киев, 252601, Украина
e-mail: *omelchenko@imath.kiev.ua*

Abstract. We study the $*$-algebra which generated by two selfadjoint elements a, b satisfying the algebraic relations:

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(a)bg_i(a) = h(a), \qquad \sum_{j=1}^{l} p_j(a)br_j(a)bq_j(a) = \nu(a),$$

where f_i, g_i, h, $i = \overline{1,m}$, p_j, r_j, q_j, ν $j = \overline{1,l}$ are polynomials on $\mathbb{R}$, $m, l \in \mathbb{N}$. We investigate properties of polynomials f_i, g_i, h, $i = \overline{1,m}$, p_j, r_j, q_j, ν $j = \overline{1,l}$ for which this $*$-algebra is $*$-tame. The results are illustrated by examples.

1. Введение

Возникающие в задачах математики и физики $*$-алгебры стимулируют интерес к изучению таких алгебр и их представлений с различных точек зрения (см. например [4, 3] и др.). Важным классом $*$-алгебр являются $*$-алгебры порожденные образующими $x_1, x_2, \ldots, x_k$ и определяющими соотношениями:

$$P_i(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*) = 0, \qquad i = \overline{1,w},\ w \in \mathbb{N},$$

где P_i полиномы от некоммутативных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*$. (см. например [4])

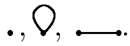
В данной работе рассматривается $*$-алгебра, порожденная двумя самосопряженными образующими a, b и удовлетворяющая следующим соотношениям:

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(a)bg_i(a) = h(a), \tag{1.1}$$

$$\sum_{j=1}^{l} p_j(a)br_j(a)bq_j(a) = \nu(a), \tag{1.2}$$

где f_i, g_i, h, $i = \overline{1,m}$, p_j, r_j, q_j, ν, $j = \overline{1,l}$, полиномы на $\mathbb{R}$, $m, l \in \mathbb{N}$.

Стандартный путь описания $*$-представлений $*$-алгебры состоит в описании всех неприводимых представлений с точностью до унитарной эквивалентности, а затем разложение произвольного представления в прямую сумму или прямой интеграл неприводимых. Такое разложение возможно, и притом единственным образом, если W^*-алгебра, порожденная любым ограниченным $*$-представлением, содержит лишь факторы типа I. В этом случае соответствующую $*$-алгебру будем называть $*$-ручной. В случае если задача описания всех $*$-представлений $*$-алгебры содержит подзадачу, задачу описания всех $*$-представлений свободной $*$-алгебры с двумя самосопряженными образующими, то такую $*$-алгебру будем называть $*$-дикой (более подробно см. [4]). Заметим, что в отличие от теории представлений в линейных пространствах, существуют еще промежуточные классы $*$-алгебр, характеризующие сложность описания всех $*$-представлений $*$-алгебры. *В данной работе нас будут интересовать лишь неприводимые представления и условия на $*$-алгебры при которых они являются $*$-ручными.*

С полулинейным соотношением (1.1) можно связать простой неориентированный граф Γ, по виду которого можно судить о сложности задачи описания всех $*$-представлений с точностью до унитарной эквивалентности, соответствующей $*$-алгебры. Как показано в [4, 7, 11], $*$-алгебра соответствующая полулинейному соотношению (1.1) является $*$-ручной, тогда и только тогда, когда связные компоненты графа Γ имеют вид: . Если Γ содержит в качестве подграфа один из графов , , то соответствующая $*$-алгебра является $*$-дикой. Поэтому вполне естественно рассматривать представления полулинейных соотношений с дополнительными соотношениями. В данной работе в качестве дополнительного соотношения рассматривается полуквадратичное (квадратичное по b) соотношение (1.2).

В работе получены условия на полиномы f_i, g_i, h, $i = \overline{1,m}$, p_j, r_j, q_j, ν, $j = \overline{1,l}$, при которых система соотношений (1.1), (1.2) является $*$-ручной. Также в работе показана связь между представлениями соотношений (1.1), (1.2) и ортоскалярными $*$-представлениями графов [14, 13, 16] и связанными с ними $*$-алгебрами [1, 5, 15]. Приведены примеры.

2. Постановка задачи. Основные определения

Ограниченным представлением соотношений (1.1), (1.2) будем называть пару ограниченных самосопряженных операторов (A, B), действующих в гильбертовом пространстве H и удовлетворяющую соотношениям:

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(A)Bg_i(A) = h(A) \tag{2.1}$$

$$\sum_{j=1}^{l} p_j(A)Br_j(A)Bq_j(A) = \nu(A), \tag{2.2}$$

где f_i, g_i, h, $i = \overline{1,m}$, p_j, r_j, q_j, ν $j = \overline{1,l}$ полиномы на $\mathbb{R}$, $m, l \in \mathbb{N}$.

Неограниченным представлением соотношений (1.1), (1.2) будем называть пару симметричных операторов (A, B), действующих в гильбертовом пространстве H, если существует такое плотное подмножество $K \subset H$, что

- K инвариантно относительно $A, B, E_A(\Delta)$, $\quad \Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$,
- K состоит из ограниченных векторов оператора A, $\quad K \subset H_B(A) \subset D(A)$,
- соотношения (2.1),(2.2) выполняются на K.

Для описания структуры пар таких операторов удобно ввести следующие три объекта (подобно работам [4, 7, 11])

- Характеристические функции:
$$\Phi(t,s)=\sum_{i=1}^{m} f_i(t)g_i(s),$$
$$\Psi(x,y,z)=\sum_{j=1}^{l} p_j(x)r_j(y)q_j(z).$$
Заметим, что в [4, 7, 11]) изучались пары самосопряженных операторов (A, B), которые удовлетворяют только соотношению (2.1) и соответственно только функция $\Phi(t,s)$. Для изучения пар операторов (A, B), которые удовлетворяют также соотношению (2.2), мы рассмотрим еще и функцию трех переменных $\Psi(x,y,z)$.
- Простой граф Γ, множеством вершин которого являются все действительные числа $\mathbb{R}$, а вершина $t\in\mathbb{R}$ связана ребром с вершиной $s\in\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $\Phi(t,s)=0$.

В случае, если $\sigma(A)=\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\}$, $n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, и $H_{\lambda_1},H_{\lambda_2},\ldots,H_{\lambda_n}$ соответствующие собственные подпространства оператора A, то относительно разложения $H=H_{\lambda_1}\oplus H_{\lambda_2}\oplus\ldots\oplus H_{\lambda_n}$ операторы A и B можно представить в виде блочных матриц:
$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n}\\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots\\ B_{n1} & B_{n2} & \cdots & B_{nn}\end{pmatrix},\tag{2.3}$$
где $B_{ij}:H_{\lambda_j}\to H_{\lambda_i}$, $B^*_{ij}=B_{ji}$, $i,j=\overline{1,n}$.

Утверждение 6. *В случае дискретного $\sigma(A)$ выполняются следующие эквивалентности $\Phi(t,s)=0\Leftrightarrow\Phi(s,t)=0$, $\Psi(x,y,z)=0\Leftrightarrow\Psi(z,y,x)=0$, для всех $t,s,x,y,z\in\sigma(A)$.*

Доказательство. Если соотношения (2.1) и (2.2) выполняются, то выполняются и сопряженные соотношения, учитывая самосопряженность операторов (A, B) получим требуемое утверждение. □

Подставив блочные матрицы (2.3) в соотношения (2.1) и (2.2), учитывая самосопряженность операторов (A, B), получим следующую систему равенств:
$$\begin{cases}\Phi(\lambda_i,\lambda_j)B_{ij}=0, \quad \text{при } i\neq j\\[2ex] \Phi(\lambda_i,\lambda_i)B_{ii}=h(\lambda_i),\\[2ex] \sum\limits_{k\in M_{\lambda_i\lambda_j}}\Psi(\lambda_i,\lambda_k,\lambda_j)B_{ik}B_{kj}=0, \quad \text{при } i\neq j\\[2ex] \sum\limits_{k\in M_{\lambda_i}}\Psi(\lambda_i,\lambda_k,\lambda_i)B_{ik}B_{ki}=\nu(\lambda_i),\end{cases}\tag{2.4}$$

где M_{λ_i} – подмножество вершин графа Γ, соединенных ребром с вершиной i, $M_{\lambda_i\lambda_j}$ – подмножество таких вершин графа Γ, которые соединены ребром и с вершиной i и с вершиной j. Из системы (2.4) видно, что для того, чтобы рассматривать нетривиальные представления системы соотношений (1.1), (1.2), необходимо наложить на них следующие условия:

$$\left\{\begin{array}{l} \Phi(\lambda_i, \lambda_k) = 0, \\ \\ \Phi(\lambda_k, \lambda_j) = 0, \end{array}\right. \Rightarrow \Psi(\lambda_i, \lambda_k, \lambda_j) = 0, \tag{2.5}$$

$$\Psi(\lambda_i, \lambda_k, \lambda_i) \neq 0, \qquad \nu(\lambda_i) \neq 0, \text{ для всех } \lambda_i, \lambda_k, \lambda_j \in \sigma(A).$$

Заметим, что существуют нетривиальные полиномы $\Phi(t,s), \Psi(x,y,z)$, которые удовлетворяют соотношениям (2.5), например, $\Phi(t,s)$ – произвольный полином двух переменных на $\mathbb{R}^2$, а $\Psi(x,y,z) = \dfrac{\Phi(x,y) - \Phi(z,y)}{x - z}$.

3. Представления полулинейных и полуквадратичных соотношений

Представление соотношения (1.1) можно рассматривать как представление соответствующего ему графа Γ, причем задача описания всех неприводимых пар самосопряженных операторов (A, B), удовлетворяющих полулинейному соотношению (1.1) со спектром $\sigma(A)$ с точностью до унитарной эквивалентности, эквивалентна задаче описания всех неприводимых представлений соответствующего связного подграфа графа Γ (см. [14, 13, 16]), а соотношение (1.2) задает дополнительные условия на оператор B. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Система соотношений (1.1),(1.2), характеристические функции которой удовлетворяют соотношениям (2.5) является $*$-ручной, если каждая связная компонента графа Γ является одним из графов Дынкина (A_n, D_n, E_6, E_7, E_8) или расширенных графов Дынкина ($\tilde{A}_n$, $\tilde{D}_4$, $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$, $\tilde{E}_8$).*

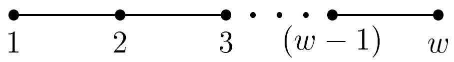
Доказательство. Пусть пара самосопряженных операторов (A, B), со спектром $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ будет представлением соотношений (1.1), (1.2) в гильбертовом пространстве H. Относительно разложения $H = H_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus H_{\lambda_n}$ блочные матрицы A, B имеют вид (2.3). Введя обозначение $\Psi(\lambda_i, \lambda_k, \lambda_i) := \psi_{ik}$, получим следующие соотношения на блоки блочной матрицы $B = ||B_{ij}||_{i,j=1}^n$:

$$\begin{array}{l} \sum\limits_{k \in M_{\lambda_1}} \psi_{1k} B_{1k} B_{k1} = \nu(\lambda_1), \\ \sum\limits_{k \in M_{\lambda_2}} \psi_{2k} B_{2k} B_{k2} = \nu(\lambda_2), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum\limits_{k \in M_{\lambda_n}} \psi_{nk} B_{nk} B_{kn} = \nu(\lambda_n), \end{array} \tag{3.1}$$

где $B_{ij} : H_{\lambda_j} \to H_{\lambda_i}$, $i, j = \overline{1, n}$, $\psi_{ik} \in \mathbb{R}$, заметим, что $\psi_{ik} \neq \psi_{ik}$.

Лемма 1. *Если граф* Γ *является деревом, то существует обратимое преобразование переводящее пару самосопряженных операторов* (A, B) *в пару самосопряженных операторов* $(A, \widetilde{B})$*, которые являются представлением той же системы полулинейного и полуквадратичного соотношения с новой функцией* ν *(обозначим ее* $\tilde{\nu}$*) и* $\psi_{ik} = 1$.

Доказательство. Поскольку граф Γ – дерево, то его можно разделить на подграфы типа цепочки A_w, которые будут пересекаться не более чем в одной точке, и занумеровать следующим образом:



Построим требуемое преобразование для каждой такой цепочки следующим образом:

$$
\begin{array}{llll}
\tilde{B}_{1k_1} = \sqrt{\psi_{1k_1}} B_{1k_1}, & \tilde{B}_{k_1 1} = \tilde{B}^*_{1k_1}, & k_1 \in \tilde{M}_1, & \tilde{\nu}(\lambda_1) = \nu(\lambda_1), \\
\tilde{B}_{2k_2} = \sqrt{\psi_{2k_2} \dfrac{\psi_{12}}{\psi_{21}}} B_{2k_2}, & \tilde{B}_{k_2 2} = \tilde{B}^*_{2k_2}, & k_2 \in \tilde{M}_2, & \tilde{\nu}(\lambda_2) = \nu(\lambda_2) \dfrac{\psi_{12}}{\psi_{21}}, \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\tilde{B}_{wk_w} = \sqrt{\psi_{wk_w} \dfrac{\psi_{(w-1)w}}{\psi_{w(w-1)}}} B_{wk_w}, & \tilde{B}_{k_w w} = \tilde{B}^*_{wk_w}, & k_w \in \tilde{M}_w, & \tilde{\nu}(\lambda_w) = \nu(\lambda_w) \dfrac{\psi_{(w-1)w}}{\psi_{w(w-1)}},
\end{array}
$$

где $\tilde{M}_k$ – подмножество вершин графа Γ, соединенных ребром с вершиной k за исключением тех вершин, для которых уже построено преобразование. Прямая проверка показывает, что построенное преобразование удовлетворяет условиям леммы. □

Замечание 1. Заметим, что данное преобразование справедливо и для графов с циклами длины 1 (петля), 2.

Далее, воспользовавшись известными [14, 13, 16] результатами теории ортоскалярных $*$-представлений графов и результатами работ [10, 6, 9] (для графа $\tilde{A}_n$) и сделав обратное преобразование, получим утверждение теоремы. □

4. Примеры

Пример 1. Задача классификации всех, с точностью до унитарной эквивалентности, пар ограниченных самосопряженных операторов (A, B), удовлетворяющих следующей системе соотношений, является $*$-ручного представленческого типа

$$A^3B + BA^3 - (A^2B + BA^2) + A^2BA + ABA^2 + ABA + B = 0,$$

$$B^2A^2 + BA^2B + A^2B^2 + B^2ABAB + B^2A^2B^2 + BABAB^2 - B^2A + BAB - AB^2 = 0,$$

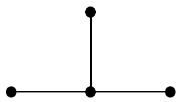
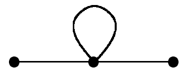
В этом случае характеристические функции имеют следующий вид:

$$\Phi(t, s) = t^3 + s^3 - (t^2 + s^2) + t^2s + ts^2 + ts + 1 = 0,$$

$$\Psi(x, y, z) = \frac{\Phi(x, y) - \Phi(z, y)}{x - z} = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz - x + y - z = 0,$$

$$h(t) \equiv 0, \quad \nu(x) \equiv 0,$$

Все связные компоненты графа данных соотношений имеют вид

 и лишь одна  ,

следовательно соответствующая $*$-алгебра $*$-ручного типа.

Пример 2. Пусть характеристические функции системы (1.1),(1.2) имеют следующий вид:

$$\Phi(t,s) = t^2 + 2a_{11}ts + s^2 + a_0, \quad a_0 \in \mathbb{R}, a_{11} = -\frac{q+q^{-1}}{2}, q \in \mathbb{R} \cup \mathbb{T},$$

$$\Psi(x,y,z) = \frac{\Phi(x,y) - \Phi(z,y)}{x-z} = z + 2a_{11}y + x,$$

$$h(t) \equiv 0, \quad \nu(x) = -a_0 x,$$

тогда представление данной системы (A,B) удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$A^2B + 2a_{11}ABA + BA^2 = -a_0B,$$
$$B^2A + 2a_{11}BAB + AB^2 = -a_0A,$$

заметим, что построенная $*$-алгебра при $a_0 = 1$ является алгеброй Фарли [2], при $a_0 = a_{11} = 1$ – универсальной обертывающей алгеброй алгебры Ли $so(3)$, при $a_0 = a_{11} = -1$ – градуированным аналогом алгебры Ли $so(3)$. О представлениях этой алгебры см. [4, 6, 9, 10, 12].

Пример 3. Задача классификации всех, с точностью до унитарной эквивалентности, пар самосопряженных операторов (A,B) удовлетворяющих следующей системе соотношений является $*$-ручного представленческого типа

$$A^2B + 2a_{11}ABA + BA^2 + 2a_1(AB+BA) + a_0B = h(A),$$

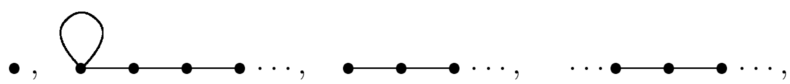
$$B^2A + 2a_{11}BAB + AB^2 + 2a_1B^2 = \nu(A),$$

В этом случае характеристические функции имеют следующий вид:

$$\Phi(t,s) = t^2 + 2a_{11}ts + s^2 + 2a_1(t+s) + a_0, \quad a_0 \in \mathbb{R}, a_1 \neq 0,$$

$$\Psi(x,y,z) = \frac{\Phi(x,y) - \Phi(z,y)}{x-z} = z + 2a_{11}y + x + 2a_1,$$

как показано в [6] каждая связная компонента графа данных соотношений одна из следующих:



при этом оператор A является неограниченным, а соответствующая $*$-алгебра $*$-ручного типа.

Автор выражает благодарность научному руководителю В. Л. Островскому и Ю. С. Самойленко за постановку задачи, плодотворные обсуждения и полезные замечания.

Список литературы

1. *S. Albeverio V.L. Ostrovskyi, Yu.S. Samoilenko* On functions on graphs and representations of a certain class of $*$-algebras. - J. Algebra 308 (2007), no. 2, pp. 567-582.
2. *D.B. Fairlie*, *Quantum deformation of* $SU(2)$, J. Phys. A: Math. and Gen. **23** (1990), no. 5, pp. 183-187.
3. *M. Jimbo*, *Quantum R-matrix to the generalized Toda system: an algebraic approach*, Lect. Nones in Phys. **246** (1986), pp.335–361.
4. *V.L. Ostrovskyi, Yu.S. Samoilenko* Introduction to the Theory of representation of finited presented $*$-algebras. I.Representations by bounded operators. - Rev. Math. Math. Phys. - 1999 - 261p.
5. *V.L. Ostrovskyi* Special characters on star graphs and representations of *-algebras// arxiv: math. RA/0509240 - 2005
6. *P.V. Omel'chenko* About $*$-representation of polynomial semilinear relations.// Methods of Functional Analysis and Topology, - vol.15 - 2009 - № 2, - pp.168-176
7. *Yu.S. Samoilenko, L.B. Turowska, V.S. Shulman* Semilinear relations and their $*$-representation// Methods of Functional Analysis and Topology, - vol.2 - 1996 - № 1, - pp.55-111
8. *L.B. Turowska*, *$*$-Representations of the quantum algebra* $U_q(sl(3))$, J. Nonlinear Math. Phys. **3** (1996), no. 3-4, pp.396–401.
9. *L.B. Turowska, Yu.S. Samoilenko*, *Semilinear relations and $*$-representations of deformations of* $so(3)$, Quantum groups and quantum spaces, Banach center publications, Inst. of Math. Polish Acad. of Sc., Warszava **40** (1997), pp.21–40.
10. *О.В. Багро, С.А. Кругляк*, *Представления алгебр Д.Фарли*, Препринт, Киев, 1996,
11. *Ю.Н. Беспалов, Ю.С. Самойленко, В.С. Шульман О наборах операторов, связанных полулинейными соотношениями* // Применение методов функционального анализа в мат. физике, Акад. Наук Украины, Инст. Мат., Киев, (1991), С. 28–51.
12. *М.Ф. Городний, Г.Б. Подкозин*, *Неприводимые представления градуированных алгебр Ли*, Спектральная теория операторов и бесконечномерный анализ, Акад. Наук Укр. Инст. Мат., Киев (1984), с.66–77.
13. *С.А. Кругляк, А.В. Ройтер* Локально скалярные представления графов в категории гильбертовых пространств. // Функциональный анализ и его приложения, - 2005 - Т.39 - вып.2 - с.13-30.
14. *С.А. Кругляк, С.И. Рабанович, Ю.С. Самойленко* О суммах проекторов// Функциональный анализ и его приложения, - 2002 - Т.36 - вып.3 - с.20-35.
15. *В.Л. Островський, Ю.С. Самойленко* Про спектральні теореми для сімей лінійно пов'язаних самоспряжених операторів із заданими спектрами, що асоційовані з розширеними графами Динкіна. // Укр. мат. журнал, - 2006 - Т.58 - № 11 - с.1556-1570.
16. *А.В. Ройтер, С.А. Кругляк, Л.А. Назарова* Ортоскалярные представления колчанов, соответствующих расширенным графам Дынкина в категории гильбертовых пространств. // Функциональный анализ и его приложения, - 2009
17. *Л.Б. Туровская*, *Представление одного класса квадратичных $*$-алгебр с тремя образующими*, Применение методов функционального анализа в мат. физике, Акад. Наук Украины, Инст. Мат., Киев, (1991), с.100–109.

Статья поступила в редакцию 17.09.2009