УДК 519.873

ИССЛЕДОВАНИЕ НАДЕЖНОСТИ ОДНОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ, ОБСЛУЖИВАЮЩЕЙ ДВА ПОТОКА ЗАЯВОК, С КОНЕЧНОЙ ОЧЕРЕДЬЮ

© Коваленко А.И., Марянин Б.Д., Смолич В.П.

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского
факультет математики и информатики
пр-т Вернадского, 4, г. Симферополь, 95007, Украина
e-mail: *svp54@mail.ru*

Abstract. Stationary characteristics of a single-server queueing system, alternating between two Poisson streams are obtained.

Постановка задачи

Рассматривается система массового обслуживания, состоящая из одной линии и двух бункеров накопления конечных емкостей, предназначенных для заявок соответствующих типов. На систему поступают два независимых простейших потока заявок с интенсивностями λ_1 и λ_2. Времена обслуживания заявок: w_1 и w_2 – произвольные непрерывные случайные величины с конечным математическими ожиданиями, интенсивности которых равны соответственно $\mu_1(x)$ и $\mu_2(x)$. Требуется найти вероятностные характеристики состояний системы.

Правила обслуживания предполагают:

1. Поступающая на свободную систему заявка любого из двух типов начинает обслуживаться немедленно.
2. При непустых бункерах в момент окончания обслуживания линией заявки одного типа на обслуживание немедленно поступает одна из очередных заявок, при этом приоритетное право принадлежит заявке другого типа.
3. Система функционирует с потерями; поступающие на систему заявки в момент занятости линии и заполненности мест в бункерах, предназначенных для приема заявок соответствующего типа, теряются.

В работе получены вероятности состояний системы, а также вероятности потери заявок в стационарном режиме.

1. Математическое моделирование

Методику рассуждений проведем для случая одноместных бункеров накопления заявок.

Обозначим через γ_k, $k = 1, 2$ – время ожидания заявки $k-$го типа в соответствующем бункере.

Введем случайный процесс $\xi(t)$ (t – время), фазовое пространство которого состоит из возможных состояний системы:

1. (0) – система свободна от заявок

2. (k, m, n) – линия обслуживает заявку $k-$го типа
   $(k = 1, 2)$ и в бункерах содержится соответственно
   $m-$ заявок 1-го типа $(m = 0, 1)$ и
   $n-$ заявок 2-го типа $(n = 0, 1)$.

Таким образом, для системы возможны 9 различных состояний.
Граф переходов состояний выглядит следующим образом:

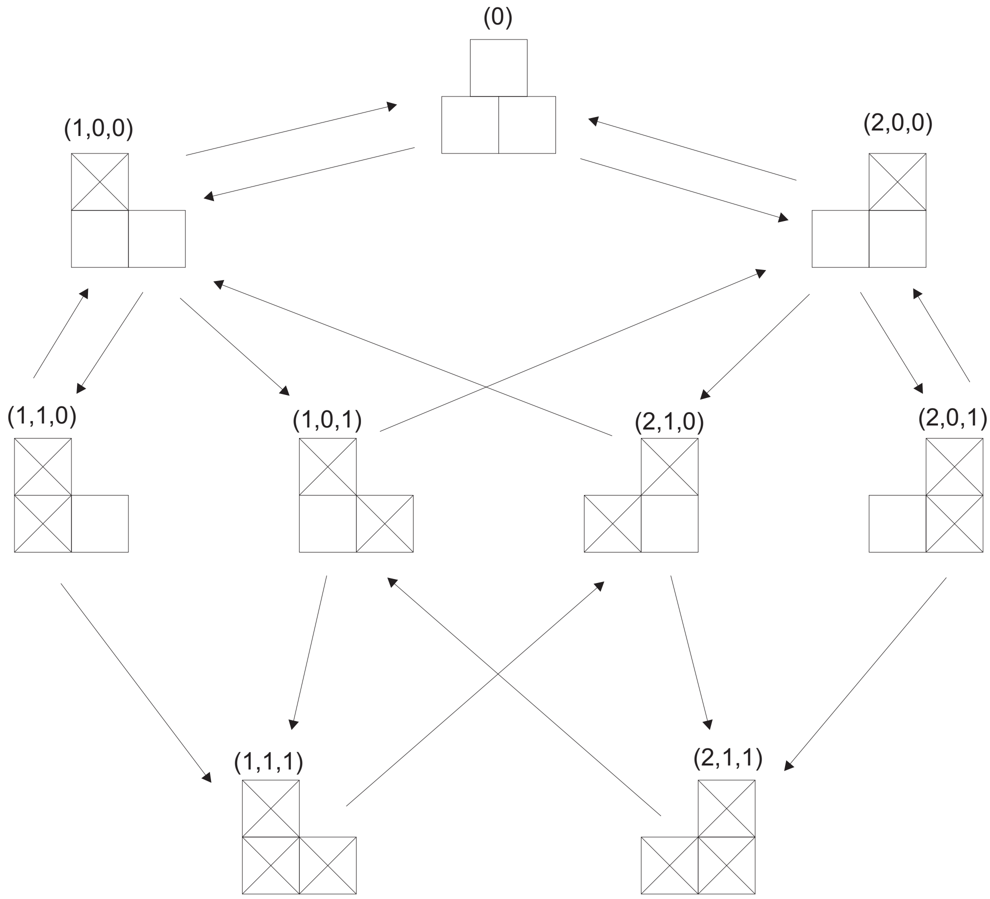

Рис. 1. Граф переходов состояний

Введем функции:
$P_0(t) = \mathbb{P}\{\xi(t) = (0)\ , P_{k,m,n}(t) = \mathbb{P}\{\xi(t) = (k, m, n)\}$,
$Q_{k,0,0}(t, x) = \mathbb{P}\{\xi(t) = (k, 0, 0), w_k < x\}, k = 1, 2, \quad q_{k,0,0}(t, x) = \dfrac{\partial Q_{k,0,0}}{\partial x}$,
$Q_{k,1,0}(t, x, y) = \mathbb{P}\{\xi(t) = (k, 1, 0), w_k < x, \gamma_1 < y\}, \quad q_{k,1,0} = \dfrac{\partial^2 Q_{k,1,0}}{\partial x \partial y}$,
$Q_{k,0,1}(t, x, z) = \mathbb{P}\{\xi(t) = (k, 0, 1), w_k < x, \gamma_2 < z\}, \quad q_{k,0,1}(t, x, z) = \dfrac{\partial^2 Q_{k,0,1}}{\partial x \partial z}$,
$Q_{k,1,1}(t, x, y) = \mathbb{P}\{\xi(t) = (k, 1, 1), a_k < x, \gamma_1 < y, \gamma_2 < z\}, \quad q_{k,1,1}(t, x, y, z) = \dfrac{\partial^3 Q_{k,1,1}}{\partial x \partial y \partial z}$.

Введем обозначения для функций в стационарном режиме:

$$P_0 = \lim_{t\to+\infty} P_0(t), \qquad P_{k,m,n} = \lim_{t\to+\infty} P_{k,m,n}(t)$$

$$g_{k,0,0}(x) = \lim_{t\to+\infty} q_{k,0,0}(t,x), \qquad g_{k,1,0} = \lim_{t\to+\infty} q_{k,1,0}(t,x,y),$$

$$g_{k,0,1}(x,z) = \lim_{t\to+\infty} q_{k,0,1}(t,x,z), g_{k,1,1}(x,y,z) = \lim_{t\to+\infty} q_{k,1,1}(t,x,y,z)$$

Заметим, что имеют место соотношения:

$$\left.\begin{array}{r}
P_{k,0,0} = \int\limits_0^\infty g_{k,0,0}(x)dx, \quad k=1,2; \qquad P_{1,1,0} = \int\limits_0^\infty dy \int\limits_y^\infty g_{1,1,0}(x,y)dx, \\
P_{2,1,0} = \int\limits_0^\infty dx \int\limits_0^\infty g_{2,1,0}(x,y)dy, \qquad P_{1,0,1} = \int\limits_0^\infty dx \int\limits_0^\infty g_{1,0,1}(x,z)dz \\
P_{2,0,1} = \int\limits_0^\infty dz \int\limits_z^\infty g_{2,0,1}(x,z)dx, \qquad P_{1,1,1} = \int\limits_0^\infty dy \int\limits_y^\infty dx \int\limits_0^\infty g_{1,1,1}(x,y,z)dz \\
P_{2,1,1} = \int\limits_0^\infty dz \int\limits_z^\infty dx \int\limits_0^\infty g_{2,1,1}(x,y,z)dy
\end{array}\right\} \qquad (*)$$

Проведя вероятностные рассуждения и предельные переходы, получим систему интегро-дифференциальных уравнений, начальные и граничные условия к ним:

$$(\lambda_1+\lambda_2)P_0 = \int\limits_0^\infty g_{1,0,0}(x)\mu_1(x)dx + \int\limits_0^\infty g_{2,0,0}(x)\mu_2(x)dx \qquad (1.1)$$

$$g'_{1,0,0}(x) + (\lambda_1+\lambda_2+\mu_1(x))g_{1,0,0}(x) = 0 \qquad (1.2)$$

$$g_{1,0,0}(0) = \lambda_1 P_0 + \int\limits_0^\infty dy \int\limits_y^\infty g_{1,1,0}(x,y)\mu_1(x)dx + \int\limits_0^\infty dy \int\limits_0^\infty g_{2,1,0}(x,y)\mu_2(x)dx$$

$$g'_{2,0,0}(x) + (\lambda_1+\lambda_2+\mu_2(x))g_{2,0,0}(x) = 0 \qquad (1.3)$$

$$g_{2,0,0}(0) = \lambda_2 P_0 + \int\limits_0^\infty dz \int\limits_0^\infty g_{1,0,1}(x,z)\mu_1(x)dx + \int\limits_0^\infty dz \int\limits_z^\infty g_{2,0,1}(x,z)\mu_2(x)dx$$

$$\frac{\partial g_{1,1,0}}{\partial x} + \frac{\partial g_{1,1,0}}{\partial y} + (\lambda_2+\mu_1(x))g_{1,1,0}(x,y) = 0, \qquad 0\le y\le x$$

$$g_{1,1,0}(x,0) = \lambda_1 g_{1,0,0}(x) \qquad (1.4)$$

$$\frac{\partial g_{2,1,0}}{\partial x} + \frac{\partial g_{2,1,0}}{\partial y} + (\lambda_2+\mu_2(x))g_{2,1,0}(x,y) = 0, \quad 0\le x, 0\le y$$

$$g_{2,1,0}(x,0)=\lambda_1 g_{2,0,0}(x),\quad g_{2,1,0}(0,y)=\int_0^\infty dz\int_y^\infty g_{1,1,1}(x,y,z)\mu_1(x)dx \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial g_{1,0,1}}{\partial x}+\frac{\partial g_{1,0,1}}{\partial z}+(\lambda_1+\mu_1(x))g_{1,0,1}(x,z)=0,\quad 0\le x, 0\le z$$

$$g_{1,0,1}(x,0)=\lambda_2 g_{1,0,0}(x),\quad g_{1,0,1}(0,z)=\int_0^\infty dy\int_z^\infty g_{2,1,1}(x,y,z)\mu_2(x)dx \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial g_{2,0,1}}{\partial x}+\frac{\partial g_{2,0,1}}{\partial z}+(\lambda_1+\mu_2(x))g_{2,0,1}(x,z)=0,\quad 0\le z\le x$$

$$g_{2,0,1}(x,0)=\lambda_2 g_{2,0,0}(x) \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial g_{1,1,1}}{\partial x}+\frac{\partial g_{1,1,1}}{\partial y}+\frac{\partial g_{1,1,1}}{\partial z}+\mu_1(x)g_{1,1,1}(x,y,z)=0,\quad 0\le y\le x, 0\le z$$

$$g_{1,1,1}(x,0,z)=\lambda_1 g_{1,0,1}(x,z),\quad g_{1,1,1}(x,y,0)=\lambda_2 g_{1,1,0}(x,y) \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial g_{2,1,1}}{\partial x}+\frac{\partial g_{2,1,1}}{\partial y}+\frac{\partial g_{2,1,1}}{\partial z}+\mu_2(x)g_{2,1,1}(x,y,z)=0,\quad 0\le z\le x, 0\le y$$

$$g_{2,1,1}(x,0,z)=\lambda_1 g_{2,0,1}(x,z),\quad g_{2,1,1}(x,y,0)=\lambda_2 g_{2,1,0}(x,y) \tag{1.9}$$

Далее выписываем решение системы и получаем алгебраическую линейную систему уравнений относительно вероятностей состояний в стационарном режиме. Из (1.2) и (1.3) имеем:

$$g_{1,1,0}(x)=g_{1,0,0}(0)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}\Phi_1(x),\quad g_{2,0,0}(x)=g_{2,0,0}(0)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}\Phi_2(x) \tag{1.10}$$

где $\Phi_k(x)=e^{-\int_0^x \mu_k(t)dt}$ – функции надежности случайных величин w_k, $k=1,2$. Введем обозначения для преобразования Лапласа: $\Phi_k^*(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\Phi_k(x)dx$, $k=1,2$.

Учитывая (∗), получаем:

$$P_{k,0,0}=g_{k,0,0}(0)\Phi_k^*(\lambda_1+\lambda_2),\quad k=1,2 \tag{1.11}$$

Из (1.4)–(1.7) имеем

$$g_{1,1,0}(x,y)=\lambda_1 g_{1,0,0}(x-y)e^{-\lambda_2 y}e^{-\int_{x-y}^{x}\mu_1(t)dt},\quad 0\le y\le x \tag{1.12}$$

$$g_{2,1,0}(x,y)=\left[\begin{array}{ll}\lambda_1 g_{2,0,0}(x-y)e^{-\int_{x-y}^{x}\mu_2(t)dt}e^{-\lambda_2 y}, & 0\le y\le x\\ g_{2,1,0}(0,y-x)e^{-\int_0^x\mu_2(t)dt}e^{-\lambda_2 y}, & 0\le x\le y\end{array}\right. \tag{1.13}$$

$$g_{1,0,1}(x,z)=\left[\begin{array}{ll}\lambda_2 g_{1,0,0}(x-z)e^{-\int\limits_{x-z}^{x}\mu_1(t)dt}e^{-\lambda_1 z}, & 0\le z\le x\\ g_{1,0,1}(0,z-x)e^{-\int\limits_{0}^{x}\mu_1(t)dt}e^{-\lambda_1 x}, & 0\le x\le z\end{array}\right. \tag{1.14}$$

$$g_{2,0,1}(x,z)=\lambda_2 g_{2,0,0}(x-z)e^{-\lambda_1 z}e^{-\int\limits_{x-z}^{x}\mu_2(t)dt},\quad 0\le z\le x \tag{1.15}$$

Для соответствующих постоянных получаются выражения

$$P_{1,1,0}=\lambda_1 g_{1,0,0}(0)\int\limits_0^\infty e^{-\lambda_2 y}dy\int\limits_0^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}\Phi_1(x+y)dx \tag{1.16}$$

$$P_{2,1,0}=\lambda_1 g_{2,0,0}(0)\int\limits_0^\infty e^{-\lambda_2 y}dy\int\limits_0^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}\Phi_2(x+y)dx+$$
$$+\Phi_2^*(\lambda_2)\int\limits_0^\infty dy\int\limits_0^\infty dz\int\limits_y^\infty g_{1,1,1}(x,y,z)\mu_1(x)dx \tag{1.17}$$

$$P_{1,0,1}=\lambda_2 g_{1,0,0}(0)\int\limits_0^\infty e^{-\lambda_1 z}dz\int\limits_0^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}\Phi_1(x+z)dx+$$
$$+\Phi_1^*(\lambda_1)\int\limits_0^\infty dz\int\limits_0^\infty dy\int\limits_z^\infty g_{2,1,1}(x,y,z)\mu_2(x)dx \tag{1.18}$$

$$P_{2,0,1}=\lambda_2 g_{2,0,0}(0)\int\limits_0^\infty e^{-\lambda_1 z}dz\int\limits_0^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}\Phi_2(x+z)dx \tag{1.19}$$

Из (1.8)–(1.9) имеем:

$$g_{1,1,1}(x,y,z)=\left[\begin{array}{ll}\lambda_2\lambda_1 g_{1,0,0}(0)\Phi_1(x)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)(x-y)}\cdot e^{-\lambda_2(y-z)}, & 0\le z\le y\le x\\ \lambda_1\lambda_2 g_{1,0,0}(0)\Phi_1(x)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)(x-z)}\cdot e^{-\lambda_1(z-y)}, & 0\le y\le z\le x\\ \lambda_1 g_{1,0,1}(0,z-x)\Phi_1(x)e^{-\lambda_1(x-y)}, & 0\le y\le x\le z\end{array}\right. \tag{1.20}$$

$$g_{2,1,1}(x,y,z)=\left[\begin{array}{ll}\lambda_1\lambda_2 g_{2,0,0}(0)\Phi_2(x)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)(x-z)}\cdot e^{-\lambda_1(z-y)}, & 0\le y\le z\le x\\ \lambda_1\lambda_2 g_{2,0,0}(0)\Phi_2(x)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)(x-y)}\cdot e^{-\lambda_2(y-z)}, & 0\le z\le y\le x\\ \lambda_2 g_{2,1,0}(0,y-x)\Phi_2(x)e^{-\lambda_2(x-z)}, & 0\le z\le x\le y\end{array}\right. \tag{1.21}$$

Учитывая $(*)$, вычисляем $P_{1,1,1}$ и $P_{2,1,1}$:

$$P_{1,1,1} = \lambda_1\lambda_2 g_{1,0,0}(0)\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty (e^{-\lambda_1 z}+e^{-\lambda_2 y})dz\,dy\int\limits_0^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}\Phi_1(x+y+z)dx+ \\ +\lambda_1 A_2\int\limits_0^\infty dy\int\limits_0^\infty e^{-\lambda_1 x}\Phi_1(x+y)dx \quad (1.22)$$

$$P_{2,1,1} = \lambda_1\lambda_2 g_{2,0,0}(0)\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty (e^{-\lambda_1 z}+e^{-\lambda_2 y})dz\,dy\int\limits_0^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}\Phi_2(x+y+z)dx+ \\ +\lambda_2 A_1\int\limits_0^\infty dy\int\limits_0^\infty e^{-\lambda_2 x}\Phi_2(x+y)dx, \quad (1.23)$$

где

$$A_1 = \int\limits_0^\infty g_{2,1,0}(0,y)dy = \int\limits_0^\infty dy\int\limits_0^\infty dz\int\limits_y^\infty g_{1,1,1}(x,y,z)\mu_1(x)dx$$

$$A_2 = \int\limits_0^\infty g_{1,0,1}(0,z)dz = \int\limits_0^\infty dz\int\limits_0^\infty dy\int\limits_z^\infty g_{2,1,1}(x,y,z)\mu_2(x)dx$$

Для A_1 и A_2 имеют место соотношения:

$$A_1 = \lambda_1\lambda_2 g_{1,0,0}(0)\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty (e^{-\lambda_1 z}+e^{-\lambda_2 y})dz\,dy\int\limits_0^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}f_1(x+y+z)dx+ \\ +\lambda_1 A_2\int\limits_0^\infty dy\int\limits_0^\infty e^{-\lambda_1 x}f_1(x+y)dx \quad (1.24)$$

$$A_2 = \lambda_1\lambda_2 g_{2,0,0}(0)\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty (e^{-\lambda_1 z}+e^{-\lambda_2 y})dy\,dz\int\limits_0^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}f_2(x+y+z)dx+ \\ +\lambda_2 A_1\int\limits_0^\infty dz\int\limits_0^\infty e^{-\lambda_2 x}f_2(x+y)dx, \quad (1.25)$$

где $f_k = \mu_k(x)\Phi_k(x)$, $k = 1, 2$ – плотности распределения случайных величин w_1 и w_2.

Наконец, получаем соотношения для $g_{1,0,0}(0)$ и $g_{2,0,0}(0)$:

$$g_{1,0,0}(0) = \lambda_1 P_0 + \lambda_1 g_{1,0,0}(0) \int_0^\infty e^{-\lambda_2 y} dy \int_0^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x} f_1(x+y)dx +$$
$$+ \lambda_1 g_{2,0,0}(0) \int_0^\infty e^{-\lambda_2 y} dy \int_0^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x} f_2(x+y)dx + A_1 f_2^*(\lambda_2) \quad (1.26)$$

$$g_{2,0,0}(0) = \lambda_2 P_0 + \lambda_2 g_{2,0,0}(0) \int_0^\infty e^{-\lambda_1 y} dy \int_0^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x} f_2(x+y)dx +$$
$$+ \lambda_2 g_{1,0,0}(0) \int_0^\infty e^{-\lambda_1 y} dy \int_0^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x} f_1(x+y)dx + A_2 f_1^*(\lambda_1) \quad (1.27)$$

Постоянные величины: P_0; $P_{1,0,0}$; $P_{2,0,0}$; $P_{1,1,0}$; $P_{2,1,0}$; $P_{1,0,1}$; $P_{2,0,1}$; $P_{1,1,1}$; $P_{2,1,1}$; A_1; A_2; $g_{1,0,0}(0)$; $g_{2,0,0}(0)$ можно найти из алгебраической системы линейных однородных уравнений (1.11), (1.16)–(1.19), (1.22)–(1.27), добавив к ним нормировочное соотношение

$$P_0 + P_{1,0,0} + P_{2,0,0} + P_{1,1,0} + P_{2,1,0} + P_{1,0,1} + P_{2,0,1} + P_{1,1,1} + P_{2,1,1} = 1 \quad (1.28)$$

Полученное из (1.1) соотношение

$$(\lambda_1 + \lambda_2)P_0 = g_{1,0,0} f_1^*(\lambda_1 + \lambda_2) + g_{2,0,0}(0) f_2^*(\lambda_1 + \lambda_2)$$

можно использовать для проверки.

Вероятности потери заявки k-го типа $P_k, k = 1,2$ в стационарном режиме выражаются следующим образом:

$$P_1 = P_{1,1,0} + P_{1,1,1} + P_{2,1,1}$$
$$P_2 = P_{2,1,0} + P_{1,1,1} + P_{2,1,1}$$

Заключение

В работе получены вероятностные характеристики состояний системы в стационарном режиме, а также вероятности потери заявок 1-го и 2-го типов.

Список литературы

1. *Анисимов В.В., Закусило О.К., Донченко В.С.* Элементы теории массового обслуживания и асимптотического анализа систем. – Киев: «Выща школа», 1987. – 246 с.

2. *Беляев Ю.К.* Линейчатые марковские процессы и их приложения к задачам теории надёжности // Труды VI Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике – Вильнюс. 1962 – С. 309-323.

3. *Коваленко А.И., Стрыгина Н.З.* Вычисление стационарных характеристик надёжности четырёхэлементной иерархической системы с восстановлением // Автоматика и телемеханика – М: Российская АН, 1992. – №1. – С. 156-164.
4. *Коваленко А.И., Смолич В.П.* Анализ надёжности двухэлементной системы, обслуживаемой двумя наладчиками // Динамические системы. – 2000. – Вып. 16 – С. 137-142.
5. *Коваленко А.И., Марянин Б.Д., Смолич В.П.* Исследование системы массового обслуживания M/G/1/1. // Учёные записки ТНУ, 2002, серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика», №2, С. 40-42.
6. *Коваленко А.И., Марянин Б.Д., Смолич В.П.* Стационарные характеристики системы M/G/2/0 с поочерёдным обслуживанием заявок двумя линиями // Динамические системы. – ТНУ, 2008. – Вып. 24 – С. 69-82.

Статья поступила в редакцию 02.06.2009