УДК 519.8

МИНИМАКСНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ НЕИЗВЕСТНЫХ ДАННЫХ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ТИПА НЕЙМАНА

© Перцов А.С.

Черновицкий национальный университет им. Ю.Федьковича
факультет прикладной математики
ул. Коцюбинского, 2, г. Черновцы, 58012, Украина
e-mail: *pertsov@ukr.net*

Abstract. We find minimax estimates of functionals from unknown deterministic data of the boundary value problem for biharmonic equation with Neumann type boundary conditions.

Введение

Задачам минимаксного оценивания состояний систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями и уравнениями в частных производных при условии их однозначной разрешимости посвящено значительное число работ (см., например, [1]).

Однако, в ситуации, когда решения краевых задач не определены однозначно и существуют лишь, если данные этих краевых задач удовлетворяют некоторым условиям совместности, вопросы их минимаксного оценивания разработаны недостаточно полно (в этом направлении см., например, [3]). Исследуемая ниже задача минимаксного оценивания относится к описанному кругу проблем.

В данной статье по зашумленным наблюдениям решений и при специальных ограничениях на неизвестные правые части уравнений и граничных условий типа Неймана, входящих в постановку краевых задач для бигармонического уравнения, а также на шумы в наблюдениях, найдены минимаксные оценки функционалов от этих правых частей.

Нахождение минимаксных оценок сведено к решению некоторых систем интегро-дифференциальных уравнений и доказана их однозначная разрешимость.

1. Вспомогательные факты

Обозначим через H – гильбертово пространство над $\mathbb{R}$ со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_H$ и нормой $\|\cdot\|_H$. Через $J_H \in \mathscr{L}(H, H')$ будем обозначать оператор, называемый изометричным изоморфизмом, действующий из H на его сопряженное пространство H', и определяемый равенством $(u, v)_H = < J_H u, v >_{H'\times H}$ $\forall u, v \in H$, где $< f, x >_{H'\times H} := f(x)$ для $x \in H$, $f \in H'$. Этот оператор существует в силу теоремы Рисса.

Обозначим через $L^2(\Omega, H)$ пространство Бохнера, состоящее из случайных элементов $\xi = \xi(\omega)$, определенных на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{B}, P)$

со значениями в H таких, что

$$\|\xi\|^2_{L^2(\Omega,H)} = \int\limits_{\Omega} \|\xi(\omega)\|^2_H dP(\omega) < \infty. \tag{1}$$

В этом случае существует интеграл Бохнера $\mathbb{E}\xi := \int_\Omega \xi(\omega)\, dP(\omega) \in H$, называемый математическим ожиданием или средним случайного элемента $\xi(\omega)$, удовлетворяющий условию

$$(h, \mathbb{E}\xi)_H = \int\limits_{\Omega} (h, \xi(\omega))_H \, dP(\omega) \quad \forall h \in H. \tag{2}$$

Применение к случайной величине ξ этого определения приводит к традиционному определению ее математического ожидания, поскольку интеграл Бохнера (1) переходит в обычный интеграл Лебега по вероятностной мере $dP(\omega)$. В $L^2(\Omega, H)$ можно ввести скалярное произведение:

$$(\xi, \eta)_{L^2(\Omega,H)} := \int\limits_{\Omega} (\xi(\omega), \eta(\omega))_H \, dP(\omega) \quad \forall \xi, \eta \in L^2(\Omega, H). \tag{3}$$

Пространство $L^2(\Omega, H)$, оснащенное нормой (1) и скалярным произведением (3), является гильбертовым.

Введем также следующие обозначения: $x = (x_1, \dots, x_n)$ – пространственная переменная, принадлежащая ограниченной открытой области $D \subset \mathbb{R}^n$ с липшицевой границей Γ; $dx = dx_1 \cdots dx_n$ – мера Лебега в $\mathbb{R}^n$; $L^2(D)$ – пространство функций, суммируемых с квадратом в области D; для целого числа m обозначим через $H^m(D)$ – стандартные пространства Соболева с естественными нормами.

Пусть состояние $\varphi(x)$ системы определяется как решение краевой задачи

$$\varphi \in H^2(D), \tag{4}$$

$$\Delta^2 \varphi(x) = f(x) \quad \text{в} \quad D, \tag{5}$$

$$N\varphi = h_1, \quad M\varphi = h_2 \qquad \text{на} \quad \Gamma, \tag{6}$$

где

$$M\varphi = \sigma \Delta \varphi + (1 - \sigma) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \nu^2}, \tag{7}$$

$$N\varphi = -\frac{\partial}{\partial \nu}(\Delta) + (1 - \sigma) \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \nu_1 \nu_2 - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} (\nu_1^2 - \nu_2^2) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \nu_1 \nu_2 \right], \tag{8}$$

$f \in L^2(D)$, $h_1, h_2 \in L^2(\Gamma)$, $0 \le \sigma < 1$, ν – единичная нормаль к Γ, внешняя по отношению к области D, ν_i – i-я координата единичной нормали ν, $\frac{\partial}{\partial s} = -\frac{\partial}{\partial x_1}\nu_2 + \frac{\partial}{\partial x_2}\nu_1$ – производная по направлению касательной к кривой Γ. При этом под обобщенным решением этой задачи понимается функция $\varphi \in H^2(D)$, для которой справедливо интегральное тождество ([2], стр. 435),

$$\int\limits_D \left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \sigma \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + 2(1 - \sigma) \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \sigma \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \right] dx$$

$$= \int_D v(x)f(x)\,dx + \int_\Gamma vh_1\,d\Gamma + \int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \nu} h_2\,d\Gamma \quad \forall v \in H^2(D). \tag{9}$$

Как известно (см., например, [2]), для существования решения задачи (4) – (6) необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись условия совместности

$$\int_D f(x)\,dx + \int_\Gamma h_1\,d\Gamma = 0, \quad \int_D x_1 f(x)\,dx + \int_\Gamma x_1 h_1\,d\Gamma + \int_\Gamma \frac{\partial x_1}{\partial \nu} h_2\,d\Gamma = 0, \tag{10}$$

$$\int_D x_2 f(x)\,dx + \int_\Gamma x_2 h_1\,d\Gamma + \int_\Gamma \frac{\partial x_2}{\partial \nu} h_2\,d\Gamma = 0. \tag{11}$$

Если условия (10), (11) выполняются, то существует бесконечное множество решений данной задачи, причем любые два решения отличаются друг от друга на полином вида $p(x_1, x_2) = a + bx_1 + cx_2$ почти всюду в D. Обозначим множество этих полиномов через P_1.

Постановка задачи минимаксного оценивания. Задача состоит в том, чтобы по наблюденим вида

$$y = y(\varphi; \eta) = C\varphi + \eta \tag{12}$$

найти оптимальную, в некотором смысле, оценку значения функционала

$$l(F) = \int_D l_0(x)f(x)\,dx + \int_\Gamma l_1 h_1\,d\Gamma + \int_\Gamma l_2 h_2\,d\Gamma \tag{13}$$

в классе линейных оценок

$$\widehat{l(F)} = (y(\varphi; \eta), u)_{H_0} + c, \tag{14}$$

где $\varphi(x)$ – решение краевой задачи (4) – (6), $F := (f, h_1, h_2) \in L^2(D) \times L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$, элемент u принадлежит гильбертову пространству H_0, $c \in \mathbb{R}$, $l_0 \in L^2(D)$, $l_1 \in L^2(\Gamma)$, $l_2 \in L^2(\Gamma)$ – заданные функции, в предположении, что правые части $f(x)$, h_1, h_2 уравнений (5), (6) и погрешности $\eta = \eta(\omega)$ в наблюдениях (12), являющиеся случайными элементами, определенными на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{B}, P)$ со значениями в H_0, неизвестны, а известно лишь, что элемент $F := (f, h_1 h_2) \in G_0$ и $\eta \in G_1$. Здесь $C \in \mathscr{L}(L^2(D), H_0)$ – линейный непрерывный оператор, такой что его ограничение на подпространство P_1 инъективно; через G_0 обозначено множество функций $\tilde{F} := (\tilde{f}, \tilde{h}_1, \tilde{h}_2) \in L^2(D) \times L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$, удовлетворяющих условиям

$$\int_D Q(\tilde{f} - f_0)(x)(\tilde{f}(x) - f_0(x))\,dx + \int_\Gamma Q_1(\tilde{h}_1 - h_1^{(0)})(\tilde{h}_1 - h_1^{(0)})\,d\Gamma$$
$$+ \int_\Gamma Q_2(\tilde{h}_2 - h_2^{(0)})(\tilde{h}_2 - h_2^{(0)})\,d\Gamma \le 1, \tag{15}$$

и

$$\int\limits_D \tilde{f}(x)\,dx + \int\limits_\Gamma \tilde{h}_1\,d\Gamma = 0, \quad \int\limits_D x_1\tilde{f}(x)\,dx + \int\limits_\Gamma x_1\tilde{h}_1\,d\Gamma + \int\limits_\Gamma \frac{\partial x_1}{\partial \nu}\tilde{h}_2\,d\Gamma = 0, \tag{16}$$

$$\int\limits_D x_2\tilde{f}(x)\,dx + \int\limits_\Gamma x_2\tilde{h}_1\,d\Gamma + \int\limits_\Gamma \frac{\partial x_2}{\partial \nu}\tilde{h}_2\,d\Gamma = 0, \tag{17}$$

а через G_1 обозначено множество случайных элементов $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}(\omega) \in L^2(\Omega, H_0)$, с нулевыми средними, удовлетворяющими неравенству

$$\mathbf{M}(Q_0\tilde{\eta}, \tilde{\eta})_{H_0} \leq 1, \tag{18}$$

где Q, Q_1, Q_2 i Q_0 – ограниченные самосопряженные положительно-определенные операторы в $L^2(D)$, $L^2(\Gamma)$ и H_0 соответсвенно, для которых существуют ограниченные обратные операторы Q^{-1}, Q_1^{-1}, Q_2^{-1} и Q_0^{-1}, $F_0 := (f_0, h_1^{(0)}, h_2^{(0)}) \in L^2(D) \times L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$ – заданные функции, удовлетворяющие условиям (16)–(17).

Определение 1. Оценку вида $\widehat{\widehat{l(F)}} = (y(\varphi;\eta), \hat{u})_{H_0} + \hat{c}$ будем называть минимаксной оценкой $l(F)$, если элемент $\hat{u}$ и число $\hat{c}$ определяются из условия

$$\sigma(u,c) := \sup_{\tilde{F}\in G_0, \tilde{\eta}\in G_1} \mathbf{M}|l(\tilde{F}) - \widehat{l(\tilde{F})}|^2 \to \inf_{u\in H_0, c\in\mathbb{C}} := \sigma^2,$$

где $\tilde{\varphi}$ – любое решение краевой задачи (4)– (6) при $f(x) = \tilde{f}(x)$, $h_1 = \tilde{h}_1$, $h_2 = \tilde{h}_2$, $\widehat{l(\tilde{F})} = (y(\tilde{\varphi};\tilde{\eta}), u)_{H_0} + c$. Величину σ будем называть погрешностью минимаксного оценивания выражения (13).

2. Основные результаты

Теорема 1. *Задача нахождения минимаксной оценки $\widehat{l(F)}$ значения функционала $l(F)$ эквивалентна задаче оптимального управления системой, описываемой краевой задачей*

$$z(\cdot;u) \in H^2(D), \tag{19}$$

$$\Delta^2 z(x;u) = -(C^* J_{H_0} u)(x) \quad \text{в} \quad D, \tag{20}$$

$$Nz(\cdot;u) = 0, \quad Mz(\cdot;u) = 0, \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{21}$$

$$\int\limits_D Q^{-1}(l_0(x) + z(x;u))\,dx + \int\limits_\Gamma Q_1^{-1}(l_1 + z(\cdot;u))\,d\Gamma = 0, \tag{22}$$

$$\int\limits_D x_1 Q^{-1}(l_0(x)+z(x;u))\,dx + \int\limits_\Gamma x_1 Q_1^{-1}\left(l_1 + z(\cdot;u)\right)\,d\Gamma + \int\limits_\Gamma \frac{\partial x_1}{\partial\nu} Q_2^{-1}\left(l_2 + \frac{\partial z(\cdot;u)}{\partial\nu}\right)\,d\Gamma = 0, \tag{23}$$

$$\int\limits_D x_2 Q^{-1}(l_0(x)+z(x;u))\,dx + \int\limits_\Gamma x_2 Q_1^{-1}\left(l_1 + z(\cdot;u)\right)\,d\Gamma + \int\limits_\Gamma \frac{\partial x_2}{\partial\nu} Q_2^{-1}\left(l_2 + \frac{\partial z(\cdot;u)}{\partial\nu}\right)\,d\Gamma = 0. \tag{24}$$

с функцией стоимости вида

$$I(u) = \int\limits_D Q^{-1}(z(x;u) + l_0(x))(z(x;u) + l_0(x))dx + \int\limits_\Gamma Q_1^{-1}(z(\cdot;u) + l_1)(z(\cdot;u) + l_1)\, d\Gamma$$

$$+ \int\limits_\Gamma Q_2^{-1}\left(\frac{\partial z(\cdot;u)}{\partial\nu} + l_2\right)\left(\frac{\partial z(\cdot;u)}{\partial\nu} + l_2\right) d\Gamma + (Q_0^{-1}u, u)_{H_0} \to \inf_{u\in V}, \quad (25)$$

где[1]

$$V = \{u \in H_0 : \int\limits_D (C^* J_{H_0}u)(x)p_0(x)\, dx = 0 \quad \forall p_0 \in P_1\},$$

$C^* : H_0' \to L_2(a,b)$ *– оператор, сопряженный к* C*, который определяется соотношением* $< Cv, w >_{H_0\times H_0'} = \int_D v(x)C^*w(x)\, dx$ *для всех* $v \in L^2(D)$, $w \in H_0'$.

Доказательство. Сначала заметим, что задача (19)–(24), в силу условий совместности (10)–(11), в которых положено $f(x) = -(C^*J_{H_0}u)(x)$, $h_1 = 0$, $h_2 = 0$, однозначно разрешима при $u \in V$.

Обозначим через $\tilde\varphi_\perp$ единственное решение задачи (4)-(6) при $f(x) = \tilde f(x)$, $h_1 = \tilde h_1$, $h_2 = \tilde h_2$, ортогональное ко всем полиномам из множества P_1.

Тогда, поскольку любое решение $\tilde\varphi$ этой задачи можно представить в виде $\tilde\varphi = \tilde\varphi_\perp + \varphi_0$, где $\tilde\varphi_0 \in P_1$, имеем

$$\sup_{\tilde F\in G_0,\tilde\eta\in G_1} \mathbf{M}|l(\tilde F) - \widehat{l(\tilde F)}|^2 = \sup_{\tilde F\in G_0,\tilde\eta\in G_1}\ \sup_{\varphi_0\in P_1} \mathbf{M}|l(\tilde\varphi_\perp + \varphi_0) - l(\widehat{\tilde\varphi_\perp + \varphi_0})|^2.$$

Учитывая (12)-(14), для любого $u \in H_0$ получим

$$\widehat{l(\tilde F)} = (y(\tilde\varphi_\perp + \varphi_0;\tilde\eta), u)_{H_0} + c = (C(\tilde\varphi_\perp + \varphi_0), u)_{H_0} + (\tilde\eta, u)_{H_0} + c$$

$$=< C(\tilde\varphi_\perp + \varphi_0), J_{H_0}u >_{H_0\times H_0'} + (\tilde\eta, u)_{H_0} + c$$

$$= \int\limits_D (\tilde\varphi_\perp(x) + \varphi_0(x))(C^*J_{H_0}u)(x)\, dx + (\tilde\eta, u)_{H_0} + c$$

$$= \int\limits_D \tilde\varphi_\perp(x)(C^*J_{H_0}u)(x)\, dx + \int\limits_D \varphi_0(x)(C^*J_{H_0}u)(x)\, dx + (\tilde\eta, u)_{H_0} + c,$$

откуда

$$l(\tilde F) - \widehat{l(\tilde F)} = \int\limits_D l_0(x)\tilde f(x)\, dx + \int\limits_\Gamma l_1\tilde h_1\, d\Gamma + \int\limits_\Gamma l_2\tilde h_2\, d\Gamma - l(\widehat{\tilde\varphi_\perp + \varphi_0})$$

$$= \int\limits_D l_0(x)\tilde f(x)\, dx + \int\limits_\Gamma l_1\tilde h_1\, d\Gamma + \int\limits_\Gamma l_2\tilde h_2\, d\Gamma$$

$$- \int\limits_D \tilde\varphi_\perp(x)(C^*J_{H_0}u)(x)\, dx - \int\limits_D \varphi_0(x)(C^*J_{H_0}u)(x)\, dx - (\tilde\eta, u)_{H_0} - c.$$

[1]Нетрудно видеть,что V – непустое, замкнутое, выпуклое множество.

Отсюда, принимая во внимание соотношение $\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}|\xi - \mathbf{M}\xi|^2 = \mathbf{M}\xi^2 - (\mathbf{M}\xi)^2$ между дисперсией $\mathbf{D}\xi$ случайной величины ξ и ее математическим ожиданием $\mathbf{M}\xi$, находим

$$\mathbf{M}\left|l(\tilde{F}) - \widehat{l(\tilde{F}}\right|^2 = \sup_{\varphi_0 \in P_1}\left|\int\limits_D l_0(x)\tilde{f}(x)\,dx + \int\limits_\Gamma l_1\tilde{h}_1\,d\Gamma + \int\limits_\Gamma l_2\tilde{h}_2\,d\Gamma\right.$$

$$\left.-\int\limits_D \tilde{\varphi}_\perp(x)(C^* J_{H_0}u)(x)\,dx - \int\limits_D \varphi_0(x)(C^* J_{H_0}u)(x)\,dx - c\right|^2 + \mathbf{M}|(\tilde{\eta}, u)_{H_0}|^2. \qquad (26)$$

Поскольку функция $\varphi_0(x)$ под знаком последнего интеграла в правой части этого равенства пробегает все пространство P_1, то величина $\mathbf{M}\left|l(\tilde{F}) - \widehat{l(\tilde{F})}\right|^2$ будет ограниченной тогда и только тогда, когда $u \in V$. Учитывая теперь, что функция $z(x;u)$, которая определена лишь тогда, когда $u \in V$, удовлетворяет уравнениям (19)–(21), имеем

$$\int\limits_D \left[\left(\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x_1^2} + \sigma\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x_2^2}\right)\frac{\partial^2 z(x;u)}{\partial x_1^2} + 2(1-\sigma)\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial^2 z(x;u)}{\partial x_1\partial x_2}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x_2^2} + \sigma\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x_1^2}\right)\frac{\partial^2 z(x;u)}{\partial x_2^2}\right]dx = -\int\limits_D w(x)C^* J_{H_0}u(x)\,dx \quad \forall w \in H^2(D). \quad (27)$$

Положив в последнем тождестве $w = \tilde{\varphi}_\perp$, получим равенство

$$\int\limits_D \left[\left(\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_\perp(x)}{\partial x_1^2} + \sigma\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_\perp(x)}{\partial x_2^2}\right)\frac{\partial^2 z(x;u)}{\partial x_1^2} + 2(1-\sigma)\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_\perp(x)}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial^2 z(x;u)}{\partial x_1\partial x_2}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_\perp(x)}{\partial x_2^2} + \sigma\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_\perp(x)}{\partial x_1^2}\right)\frac{\partial^2 z(x;u)}{\partial x_2^2}\right]dx = -\int\limits_D \tilde{\varphi}_\perp(x)C^* J_{H_0}u(x)\,dx. \qquad (28)$$

С другой стороны, поскольку $\tilde{\varphi}_\perp$ является решением краевой задачи (4)–(6) при $f = \tilde{f}$, $h_1 = \tilde{h}_1$, $h_2 = \tilde{h}_2$, то для этой функции выполняется интегральное тождество (9), положив в котором $v = z(\cdot;u)$, находим

$$\int\limits_D \left[\left(\frac{\partial^2 z(x;u)}{\partial x_1^2} + \sigma\frac{\partial^2 z(x;u)}{\partial x_2^2}\right)\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_\perp}{\partial x_1^2} + 2(1-\sigma)\frac{\partial^2 z(x;u)}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_\perp}{\partial x_1\partial x_2}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial^2 z(x;u)}{\partial x_2^2} + \sigma\frac{\partial^2 z(x;u)}{\partial x_1^2}\right)\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_\perp}{\partial x_2^2}\right]dx = \int\limits_D z(x;u)\tilde{f}(x)\,dx + \int\limits_\Gamma z(\cdot;u)\tilde{h}_1\,d\Gamma + \int\limits_\Gamma \frac{\partial z(\cdot;u)}{\partial\nu}\tilde{h}_2\,d\Gamma. \qquad (29)$$

Учитывая, что левые части (28) и (29) совпадают, получаем

$$-\int\limits_D \tilde{\varphi}_\perp(x)C^* J_{H_0}u(x)\,dx = \int\limits_D z(x;u)\tilde{f}(x)\,dx + \int\limits_\Gamma z(\cdot;u)\tilde{h}_1\,d\Gamma + \int\limits_\Gamma \frac{\partial z(\cdot;u)}{\partial\nu}\tilde{h}_2\,d\Gamma.$$

Отсюда, в силу (26), находим

$$\inf_{c\in\mathbb{R}} \sup_{\tilde F\in G_0,\tilde\eta\in G_1} \mathbf{M}|l(\tilde F)-\widehat{l(\tilde F)}|^2 =$$

$$= \inf_{c\in\mathbb{R}} \sup_{\tilde F\in G_0} \left|(\tilde f, z(\cdot;u)+l_0)_{L^2(D)} + (\tilde h_1, z(\cdot;u)+l_1)_{L^2(\Gamma)} + \left(\tilde h_2, \frac{\partial z(\cdot;u)}{\partial\nu}+l_2)\right)_{L^2(\Gamma)} - c\right|^2$$

$$+ \sup_{\tilde\eta\in G_1} \mathbf{M}|(\tilde\eta,u)_{H_0}|^2. \qquad (30)$$

Для вычисления первого члена в правой части (30) применим обобщенное неравенсто Коши-Буняковского и (15). Имеем

$$\inf_{c\in\mathbb{R}} \sup_{\tilde F\in G_0,} \left|(\tilde f, z(\cdot;u)+l_0)_{L^2(D)} + (\tilde h_1, z(\cdot;u)+l_1)_{L^2(\Gamma)} + \left(\tilde h_2, \frac{\partial z(\cdot;u)}{\partial\nu}+l_2\right)_{L^2(\Gamma)} - c\right|^2$$

$$= \inf_{c\in\mathbb{R}} \sup_{\tilde F\in G_0,} \Bigg|(z(\cdot;u)+l_0, \tilde f - f_0)_{L^2(D)} + (\tilde h_1 - h_1^{(0)}, z(\cdot;u)+l_1)_{L^2(\Gamma)} + \left(\tilde h_2 - h_2^{(0)}, \frac{\partial z(\cdot;u)}{\partial\nu}+l_2\right)_{L^2(\Gamma)}$$

$$+(z(\cdot;u)+l_0, \tilde f_0)_{L^2(D)} + (h_1^{(0)}, z(\cdot;u)+l_1)_{L^2(\Gamma)} + \left(h_2^{(0)}, \frac{\partial z(\cdot;u)}{\partial\nu}+l_2\right)_{L^2(\Gamma)} - c\Bigg|^2$$

$$\le \Big\{(Q^{-1}(z(\cdot;u)+l_0), z(\cdot;u)+l_0)_{L^2(D)} + (Q_1^{-1}(z(\cdot;u)+l_1), z(\cdot;u)+l_1)_{L^2(\Gamma)}$$

$$+ \left(Q_2^{-1}\left(\frac{\partial z(\cdot;u)}{\partial\nu}+l_2\right), \frac{\partial z(\cdot;u)}{\partial\nu}+l_2\right)_{L^2(\Gamma)}\Bigg\}$$

$$\times \left\{(Q(\tilde f - f^{(0)}), \tilde f - f^{(0)})_{L^2(D)} + (Q_1(\tilde h_1 - h_1^{(0)}), \tilde h_1 - h_1^{(0)})_{L^2(\Gamma)} + (Q_2(\tilde h_2 - h_2^{(0)}), \tilde h_2 - h_2^{(0)})_{L^2(\Gamma)}\right\}$$

$$\le (Q^{-1}(z(\cdot;u)+l_0), z(\cdot;u)+l_0)_{L^2(D)} + (Q_1^{-1}(z(\cdot;u)+l_1, z(\cdot;u)+l_1)_{L^2(\Gamma)}$$

$$+ \left(Q_2^{-1}\left(\frac{\partial z(\cdot;u)}{\partial\nu}+l_2\right), \frac{\partial z(\cdot;u)}{\partial\nu}+l_2\right)_{L^2(\Gamma)}. \qquad (31)$$

Непосредсвенной подстановкой убеждаемся, что неравенство (31) обращается в равенство на элементе $\tilde F^{(0)} := (\tilde f^{(0)}, \tilde h_1^{(0)}, \tilde h_2^{(0)}) \in G_0$, где

$$\tilde f^{(0)}(x) := \frac{1}{d} Q^{-1}(z(x,u)) + l_0) + f_0(x),$$

$$\tilde h_1^{(0)} := \frac{1}{d} Q_1^{-1}(z(\cdot;u)+l_1) + h_1^{(0)},\ \tilde h_2^{(0)} := \frac{1}{d} Q_2^{-1}\left(\frac{\partial z(\cdot;u)}{\partial\nu}+l_2\right) + h_2^{(0)},$$

$$d = \Big\{(Q^{-1}(z(\cdot;u)+l_0), z(\cdot;u)+l_0)_{L^2(D)} + (Q_1^{-1}(z(\cdot;u)+l_1), z(\cdot;u)+l_1)_{L^2(\Gamma)}$$

$$+ \left(Q_2^{-1}\left(\frac{\partial z(\cdot;u)}{\partial\nu}+l_2\right), \frac{\partial z(\cdot;u)}{\partial\nu}+l_2\right)_{L^2(\Gamma)}\Bigg\}^{1/2}$$

(тот факт, что элемент $\tilde{F}^{(0)} \in G_0$ следует, в силу равенств (22) – (24)). Поэтому

$$\inf_{c\in\mathbb{R}} \sup_{\tilde{F}\in G_0,} \left| (\tilde{f}, z(\cdot;u)+l_0)_{L^2(D)} + (\tilde{h}_1, z(\cdot;u)+l_1)_{L^2(\Gamma)} + \left(\tilde{h}_2, \frac{\partial z(\cdot;u)}{\partial\nu} + l_2\right)_{L^2(\Gamma)} - c \right|^2$$

$$= \int_D Q^{-1}(z(x;u)+l_0(x))(z(x;u)+l_0(x))dx + \int_\Gamma Q_1^{-1}(z(\cdot;u)+l_1)(z(\cdot;u)+l_2)\,d\Gamma$$

$$+ \int_\Gamma Q_2^{-1}\left(\frac{\partial z(\cdot;u)}{\partial\nu}+l_2\right)\left(\frac{\partial z(\cdot;u)}{\partial\nu}+l_2\right)d\Gamma \qquad (32)$$

при

$$c = \int_D (l_0+z(x;u))f^{(0)}(x)dx + \int_\Gamma (l_1+z(\cdot;u))h_1^{(0)}\,d\Gamma + \int_\Gamma \left(l_2 + \frac{\partial z(\cdot;u)}{\partial\nu}\right)h_2^{(0)}\,d\Gamma.$$

Аналогично, вычисляя второе слагаемое в правой части (30), получим $\sup_{\tilde{\eta}\in G_1} \mathbf{M}|(\tilde{\eta},u)_{H_0}|^2 = (Q_0^{-1}u,u)_{H_0}$. Отсюда и из (30) и (18) придем к утверждению теоремы. $\square$

Решая задачу оптимального управления (19) – (25), придем к следующему результату.

Теорема 2. *Существует единственная минимаксная оценка выражения $l(\varphi)$, которая может быть представлена в виде*

$$\widehat{\widehat{l(\varphi)}} = (y(\varphi,\eta),\hat{u})_{H_0} + \hat{c}, \qquad (33)$$

где

$$\hat{u} = Q_0Cp, \quad \hat{c} = \int_D (l_0(x)+\hat{z}(x))f^{(0)}(x)\,dx + \int_\Gamma (l_1+\hat{z})h_1^{(0)}\,d\Gamma + \int_\Gamma \left(l_2+\frac{\partial\hat{z}}{\partial\nu}\right)h_2^{(0)}\,d\Gamma, \quad (34)$$

а функции $p \in H^2(D)$ и $\hat{z} \in H^2(D)$ определяются из системы интегро-дифференциальных уравнений

$$\Delta^2\hat{z}(x) = -C^*J_{H_0}Q_0Cp(x) \quad \text{в} \quad D, \qquad (35)$$

$$N\hat{z}=0, \quad M\hat{z}=0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \qquad (36)$$

$$\int_D Q^{-1}(l_0(x)+\hat{z}(x))\,dx + \int_\Gamma Q_1^{-1}(l_1+\hat{z})\,d\Gamma = 0, \qquad (37)$$

$$\int_D x_1Q^{-1}(l_0+\hat{z}(x))\,dx + \int_\Gamma x_1Q_1^{-1}(l_1+\hat{z}))\,d\Gamma + \int_\Gamma \frac{\partial x_1}{\partial\nu}Q_2^{-1}\left(l_2+\frac{\hat{\partial z}}{\partial\nu}\right)d\Gamma = 0, \qquad (38)$$

$$\int_D x_2Q^{-1}(l_0(x)+\hat{z}(x))\,dx + \int_\Gamma x_2Q_1^{-1}(l_1+\hat{z})\,d\Gamma + \int_\Gamma \frac{\partial x_2}{\partial\nu}Q_2^{-1}\left(l_2+\frac{\partial\hat{z}}{\partial\nu}\right)d\Gamma = 0, \qquad (39)$$

$$\Delta^2p(x) = Q^{-1}(l_0(x)+\hat{z}(x)) \quad \text{в} \quad D, \qquad (40)$$

$$Np = Q_1^{-1}(l_1 + \hat{z}), \quad Mp = Q_2^{-1}\left(l_2 + \frac{\partial \hat{z}}{\partial \nu}\right) \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{41}$$

$$\int_D (C^* J_{H_0} Q_0 C p)(x)\, dx = 0, \quad \int_D (C^* J_{H_0} Q_0 C p)(x) x_1\, dx = 0, \tag{42}$$

$$\int_D (C^* J_{H_0} Q_0 C p)(x) x_2\, dx = 0. \tag{43}$$

Задача (35)–(43) *однозначно разрешима. Погрешность оценивания σ определяется формулой $\sigma = l(\hat{\hat{P}})^{1/2}$, где $\hat{\hat{P}} = \left(Q^{-1}(l_0 + z), Q_1^{-1}(l_1 + z), Q_1^{-1}\left(l_2 + \frac{\partial \hat{z}}{\partial \nu}\right)\right)$.*

Альтернативное представление для минимаксной оценки через решение системы интегро-дифференциальных уравнений специального вида, не зависящее от конкретного вида функционала (13), получено в следующей теореме.

Теорема 3. *Минимаксная оценка выражения (13) имеет вид $\widehat{\widehat{l(F)}} = l(\hat{F})$ где $\hat{F} = (\hat{f}, \hat{h}, \hat{h}_2)$, $\hat{f}(x) = Q^{-1}\hat{p}(x) + f^{(0)}(x)$, $\hat{h}_1 = Q_1^{-1}\hat{p} + h_1^{(0)}$, $\hat{h}_2 = Q_2^{-1}\hat{p} + h_2^{(0)}$, а функция $\hat{p} \in L^2(\Omega, H^2(D))$ определяется из решения следующей системы стохастических интегро-дифференциальных уравнений:*

$$\Delta^2 \hat{p}(x;\omega) = C^* J_{H_0} Q_0 (y(\varphi;\eta) - C\hat{\varphi})(x;\omega) \quad \text{в} \quad D, \tag{44}$$

$$N\hat{p}(\cdot;\omega) = 0, \quad M\hat{p}(\cdot;\omega) = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{45}$$

$$\int_D Q^{-1}\hat{p}(x;\omega)\, dx + \int_\Gamma Q_1^{-1}\hat{p}(\cdot;\omega)\, d\Gamma = 0, \tag{46}$$

$$\int_D x_1 Q^{-1}\hat{p}(x;\omega)\, dx + \int_\Gamma x_1 Q_1^{-1}\hat{p}(\cdot;\omega)\, d\Gamma + \int_\Gamma \frac{\partial x_1}{\partial \nu} Q_2^{-1} \frac{\partial \hat{p}(\cdot;\omega)}{\partial \nu}\, d\Gamma = 0, \tag{47}$$

$$\int_D x_2 Q^{-1}\hat{p}(x;\omega)\, dx + \int_\Gamma x_2 Q_1^{-1}\hat{p}(\cdot;\omega)\, d\Gamma + \int_\Gamma \frac{\partial x_2}{\partial \nu} Q_2^{-1} \frac{\partial \hat{p}(\cdot;\omega)}{\partial \nu}\, d\Gamma = 0, \tag{48}$$

$$\Delta^2 \hat{\varphi}(x;\omega) = Q^{-1}\hat{p}(x;\omega) + f_0(x) \quad \text{в} \quad D, \tag{49}$$

$$N\hat{\varphi}(\cdot;\omega) = Q_1^{-1}\hat{p}(\cdot;\omega) + h_1^{(0)}, \quad M\hat{\varphi} = Q_2^{-1}\frac{\partial \hat{p}(\cdot;\omega)}{\partial \nu} + h_2^{(0)} \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{50}$$

$$\int_D C^* J_{H_0} Q_0 (y(\varphi;\eta) - C\hat{\varphi})(x;\omega)\, dx = 0, \ \int_D x_1 C^* J_{H_0} Q_0 (y(\varphi;\eta) - C\hat{\varphi})(x;\omega)\, dx = 0, \tag{51}$$

$$\int_D x_2 C^* J_{H_0} Q_0 (y(\varphi;\eta) - C\hat{\varphi})(x;\omega)\, dx = 0, \tag{52}$$

где $\hat{\varphi} \in L^2(\Omega, H^2(D))$, и равенства (44) – (52) *выполняются с вероятностью 1. Задача* (44)–(52) *однозначно разрешима.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Заключение

Результаты данной статьи, таким образом, *состоят в том, что для систем, описываемых краевыми задачами для бигармонического уравнения с граничными условиями типа Неймана, при сформулированных выше ограничениях на параметры этих задач, получены представления для минимаксных прогнозных оценок функционалов от детерминированных данных этих задач и погрешностей оценивания через решения однозначно разрешимых интегро-дифференциальных уравнений специального вида.*

Методика и результаты работы могут быть использованы в дальнейших теоретических и прикладных исследованиях процессов в теории упругости, а также при использовании системного анализа этих процессов.

Список литературы

1. *Наконечний О.Г.* Оптимальне керування та оцінювання в рівняннях із частинними похідними // Київський університет, Київ, 2004 г., 103 с.
2. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике //М.: Мир, 1985 г., 589 с.
3. *Подлипенко Ю.К., Грищук Н.В.* Минимаксное оценивание решений вырожденных краевых задач Неймана для эллиптических уравнений по наблюдениям, распределенным на системе поверхностей // Системні дослідження і інформаційні технології // №2, 2004 г., с. 104-128.

Статья поступила в редакцию 22.09.2008