УДК 519.962.22

МІНІМАКСНІ ОЦІНКИ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯНЬ З ЛІНІЙНИМ НЕОБМЕЖЕНИМ ОПЕРАТОРОМ У ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ

© Жук С.М.

Київський національний університет ім. Т.Г.Шевченка,
факультет кібернетики
пр-т академіка Глушкова-2, корпус 6, м.Київ 03680, Україна
e-mail: *Serhiy.Zhuk@gmail.com*

Abstract. This paper describes an approach to minimax estimation of the solution of a linear equation with closed dense defined mapping in Hilbert space. A class of the linear minimax mean-square estimations is considered. A necessary an sufficient condition for the minimax mean-square error to be finite is introduced. A representation of minimax estimations are obtained in the case of ellipsoidal constraints.

Вступ

Ця робота є продовженням [1]. Тут розвивається техніка, застосована у [1] до апріорного оцінювання розв'язків одновимірних крайових задач, на абстрактні лінійні операторні рівняння у гільбертовому просторі.

1. Постановка задачі

Нехай спостерігається реалізація вектора y з гільбертового простору $\mathscr{Y}$ вигляду

$$y = H\varphi + \eta, \tag{1}$$

де η є випадковим вектором зі значеннями у $\mathscr{Y}$, нульовим середнім та кореляційним оператором R_η, H є елементом банахового простору[1] $\mathscr{L}(\mathscr{H},\mathscr{Y})$, а $\varphi \in \mathscr{H}$ є розв'язком лінійного операторного рівняння

$$L\varphi = f \tag{2}$$

Ми будемо вважати L замкненим оператором, що відображає скрізь щільну підмножину $\mathscr{D}(L)$ гільбертового простору $\mathscr{H}$ у гільбертів простір $\mathscr{F}$.

Припустимо, що вектор $f \in \mathscr{F}$ є деяким, наперед невідомим, елементом множини $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$. Нехай також розподіл випадкового вектора η задовольняє умову $R_\eta \subset \mathscr{R}$, де $\mathscr{R}$ є задана підмножина $\mathscr{L}(\mathscr{Y},\mathscr{Y})$.

Наша мета полягає в тому, щоб

(ОЗ) для заданого $\ell \in \mathscr{H}$ оцінити скалярний добуток (ℓ,φ), користуючись інформацією про φ: структура рівняння (2), визначена властивостями оператора L; спостереження за φ, задані у вигляді (1); структура множин $\mathscr{G},\mathscr{R}$.

(ОЗ) є різновидом обернених задач для лінійних операторних рівнянь у гільбертовому просторі в умовах невизначеності. Надалі називатимемо (ОЗ) задачею оцінювання.

[1] Символом $\mathscr{L}(\mathscr{H},\mathscr{Y})$ позначимо банаховий простір усіх лінійних обмежених операторів з $\mathscr{H}$ у $\mathscr{Y}$

Зауваження 1. Помітимо, що реалізація y визначається не лише кореляційним оператором η, виглядом H та f. У загальному випадку може йтися про невизначеність, породжену неоднозначністю оператора L: кожному $f \in R(L) \cap \mathscr{G}$ ми можемо зіставити множину $\varphi_0 \oplus N(L)$, де $N(L) = \{\varphi \in \mathscr{D}(L) : L\varphi = 0\}$. Таким чином $y = H(\varphi_0 + \varphi) + \eta$ для фіксованих f та реалізації η.

Тут ми не припускаємо, що оператори L, H мають обмежені обернені, відтак незначні відхилення у правій частині (2) та вимірах (1) можуть спричинити необмежено велику похибку оцінювання. Зважаючи на це, а також на цілий ряд невизначеностей, згаданих вище, ми побудуємо операцію оцінювання на основі мінімаксного підходу. Це дозволить запропонувати *гарантовану похибку оцінювання*, яка характеризує найбільше відхилення оцінки від реального значення і для досить[2] широкого класу операторів L, H буде скінченною.

Означення 1. Афінний функціонал $(\hat{u}, \cdot) + \hat{c}$ назвемо *апріорною мінімаксною середньоквадратичною оцінкою* скалярного добутку (ℓ, φ), якщо

$$\sup_{\varphi \in L^{-1}(G), R_\eta \in \mathscr{R}} M((\ell, \varphi) - (\hat{u}, y) - \hat{c})^2 = \inf_{u,c} \sup_{\varphi \in L^{-1}(G), R_\eta \in \mathscr{R}} M((\ell, \varphi) - (u, y) - c)^2 \tag{3}$$

Вираз

$$\hat{\sigma}(\ell) = \sup_{\varphi \in L^{-1}(G), R_\eta \in \mathscr{R}} M((\ell, \varphi) - (\hat{u}, y) - \hat{c})^2$$

назвемо *мінімаксною середньоквадратичною похибкою* у напрямку ℓ.

Нижче приведено теореми про представлення мінімаксніх апріорних та апостеріорних оцінки для того випадку, коли множини обмежень $\mathscr{G}, R$ є опуклими обмеженими і замкненими у відповідних просторах.

2. Мінімаксні оцінки для випадку слабко компактних опуклих обмежень

У подальшому нам знадобляться такі позначення. Введемо множини

$$\mathscr{U}_\ell = \{u \in \mathrm{Y} : L^* z = \ell - H^* u\}, D = \{\ell \in \mathscr{H} : U(\ell) \neq \varnothing\}$$

Тут символом L^* позначено оператор, спряжений до L, який після ототожнення гільбертових просторів $\mathscr{H}, \mathscr{F}$ з їхніми спряженими, діє з F у H. Існування єдиного спряженого L^* забезпечується [4] щільною визначеністю L. Через $\delta(\mathscr{G}, \cdot)$ позначимо індикатор множини $\mathscr{G}$, тобто $\delta(\mathscr{G}, f) = 0, f \in \mathscr{G}$ і $+\infty$ інакше. Покладемо

$$(\delta L)^*(x) = \sup_{\varphi \in \mathscr{D}(L)} \{(\varphi, x) - \delta(\mathscr{G}, L\varphi)\}$$

Функціонал $(\delta L)^*$ є перетворення Юнга-Фенхеля функціоналу (δL), $(\delta L)(x) = \delta(\mathscr{G}, Lx)$, якщо $x \in \mathscr{D}(L)$ і $+\infty$ інакше. Позначимо

$$\mathrm{dom}(\delta L)^* = \{x \in \mathscr{H} : (\delta L)^*(x) < \infty\}$$

[2]Якщо $R(L), H(N(L))$ є замкненими лінійними многовидами, то гарантована похибка оцінювання скінченна у довільному напрямку $\ell \in R(L^*) + R(H^*)$, зокрема для $N(L) \cap N(H) = \{0\}$ гарантована похибка завжди скінченна.

ефективну множину функціоналу $(\delta L)^*$ і нехай

$$(L^*c)(x) = \inf\{c(\mathscr{G}, z)|L^*z = x\}, c(\mathscr{G}, z) = \sup\{(z, f), f \in \mathscr{G}\}$$

Нехай $\mathrm{cl}(f) = f^{**}$. За теоремою Фенхеля-Моро f^{**} збігається з напівнеперервною знизу регуляризацію функціоналу f, якщо f є власним.

Наступна лема лежить в основі доведення основних тверджень про існування, єдиність та представлення мінімаксних оцінок.

Лема 1. Нехай $\mathscr{G}$ є опуклою обмеженою замкненою підмножиною $\mathscr{F}$, L є лінійним щільно визначеним замкненим оператором з $\mathscr{H}$ у $\mathscr{F}$.
Тоді

$$(L^*c)^* = (\delta L), (L^*c)^{**} = (\delta L)^*, R(L^*) \subset \mathrm{dom}(\delta L)^* \subset \overline{R(L^*)} \tag{4}$$

Якщо внутрішність $\mathscr{G}$ має спільні точки з $R(L)$, то $\mathrm{dom}(\delta L)^* = \mathrm{dom}(L^*c) = R(L^*)$, функціонал (L^*c) є власним, $L^*c = (L^*c)^{**}$ і

$$(L^*c)(x) = c(\mathscr{G}, z_0) = \inf\{c(\mathscr{G}, z)|L^*z = x\}, x \in R(L^*)$$

Доведення. Нехай $p \in \mathscr{D}(L)$. Обчислимо[3]

$$(L^*c)^*(p) = \sup_{x \in R(L^*)} \{(p, x) - \inf\{c(\mathscr{G}, z)|L^*z = x\}\} =$$

$$\sup_{x \in R(L^*)} \sup_{z \in L^{*-1}(x)} \{(p, x) - c(\mathscr{G}, z)\} = \sup_{z \in \mathscr{D}(L^*)} \{(p, L^*z) - c(\mathscr{G}, z)\} =$$

$$\sup_{z \in \mathscr{F}} \{(Lp, z) - c(\mathscr{G}, z)\} = c^*(\mathscr{G}, \cdot)(Lp) = \delta(\mathscr{G}, Lp)$$

Розглянемо випадок $p \notin \mathscr{D}(L)$. За означенням спряженого до необмеженого лінійного оператора [4, с.39] лінійний функціонал $z \mapsto p(z) = (p, L^*z)$ є необмеженим. Це означає, що знайдеться послідовність $\{z_n\}$ така, що $\|z_n\| \leq 1, z_n \in \mathscr{D}(L^*)$ і $p(z_n) \to +\infty$. З іншого боку опорна функція $c(\mathscr{G}, \cdot)$ обмеженої опуклої множини обмежена в околі довільної точки $z \in \mathscr{F}$ і тому неперервна [3, с.21]. Але тоді $\sup_n c(\mathscr{G}, z_n) = M < +\infty$ і

$$(L^*c)^*(p) = \sup_{z \in \mathscr{D}(L^*)} \{(p, L^*z) - c(\mathscr{G}, z)\} \geq \sup_n \{p(z_n) - M\} = +\infty$$

Таким чином, $(L^*c)^*(p) = +\infty$. З іншого боку $(\delta L)(p) = +\infty$ за означенням. Ми показали, що $(L^*c)^*(p) = (\delta L)(p)$ для всіх p, звідки $(L^*c)^{**} = (\delta L)^*$. Під час доведення ми не використовували інформацію про те, чи мають множини $R(L), \mathscr{G}$ спільні точки чи ні. Тому $(L^*c)^{**} = (\delta L)^*$ виконується для випадку $R(L) \cap \mathscr{G} = \varnothing$.

Нехай $x \notin N(L)^{\perp}$ і $Lp \in G$ для деякого $p \in \mathscr{D}(L)$. Знайдеться $p_0 \in N(L)$ таке, що $n(p_0, x) > 0, n \in \mathbb{N}$. Але тоді

$$(\delta L)^*(x) = \sup_{q \in \mathscr{D}(L)} \{(q, x) - \delta(G, Lq)\} \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \{(p, x) + n(p_0, x)\} = +\infty$$

Тому $\mathrm{dom}(\delta L)^* \subset N(L)^{\perp} = \overline{R(L^*)}$.

[3] $p \in \mathscr{D}(L)$ тому лінійний функціонал $z \mapsto p(z) = (p, L^*z)$ є обмеженим, відтак може бути розповсюджений на весь простір $\mathscr{F}$ за неперервністю, звідки $\sup_{z \in \mathscr{D}(L^*)} \{(Lp, z) - c(\mathscr{G}, z)\} = \sup_{z \in \mathscr{F}} \{(Lp, z) - c(\mathscr{G}, z)\}$.

З іншого боку, якщо $x = L^*z$, то

$$(\delta L)^*(x) = \sup_{q\in\mathscr{D}(L)} \{(Lq,x) - \delta(G,Lq)\} \leq \sup_{f\in\mathscr{F}}\{(f,x) - \delta(G,f)\} = c(G,x) < +\infty$$

в силу обмеженості G. Таким чином $R(L^*) \subset \mathrm{dom}(\delta L)^* \subset \overline{R(L^*)}$.

Нехай тепер $\mathrm{int}\mathscr{G} \cap R(L) \neq \varnothing$. Покажемо, що цього достатньо для $(L^*c) \leqslant (\delta L)^*$. Справді

$$x^* \in \mathrm{dom}(\delta L)^*, x \in \mathscr{D}(L) \Rightarrow (x^*,x) - (\delta L)^*(x^*) \leqslant \delta L(x) < +\infty$$

в силу нерівності Юнга-Фенхеля. Зафіксувавши $x^* \in \mathrm{dom}(\delta L)^*$, введемо множину

$$\mathscr{M}(x^*) = \{(z,\mu)|Lx = z, \mu = (x^*,x) - (\delta L)^*(x^*)\}$$

Помітимо, що

$$\mathscr{W} = \mathrm{int}\,\mathrm{epi}(\delta(\mathscr{G},\cdot)) = \mathrm{int}\mathscr{G} \times \{\mu \in \mathbb{R}^1 : \mu > 0\} \cap \mathscr{M}(x^*) = \varnothing$$

Дійсно, якщо $(z,\mu) \in \mathscr{W} \cap \mathscr{M}$, то

$$\delta(\mathscr{G},Lx) < \mu = (x^*,x) - (\delta L)^*(x^*), Lx = z$$

що суперечить нерівності Юнга-Фенхеля.
Отже, опуклі множини $\mathrm{epi}(\delta(\mathscr{G},\cdot), \mathscr{M}(x^*)$ можна розділити ненульовим лінійним неперервним функціоналом

$$\sup\{(z^0,z) + \beta_0\alpha|(z,\alpha) \in \mathscr{W}\} \leqslant \inf\{(z^0,z) + \beta_0\alpha|(z,\alpha) \in \mathscr{M}(x^*)\} \qquad (*)$$

Легко пересвідчитись, що $\beta_0 < 0$. Дійсно, якщо $\beta_0 > 0$, то sup у $(*)$ дорівнює $+\infty$. З іншого боку sup у $(*)$ завжди відмінна від $-\infty$, що ґарантує скінченність inf у $(*)$. Якщо $\beta_0 = 0$, то згідно $(*)$ $\mathscr{G}$ та $R(L)$ розділяються функціоналом $(z^0,\cdot)$, але тоді $\mathrm{int}\mathscr{G} \cap R(L) = \varnothing$.

За означенням $\mathscr{M}(x^*)$

$$-\infty < (\mathrm{c}(\mathscr{G},z^0) = \sup\{(z^0,z) - \beta_0\delta(\mathscr{G},z)\} \leqslant \inf\{(z^0,Lx) - |\beta_0|(x^*,x)\} + |\beta_0|(\delta L)^*(x^*)$$

звідки

$$-\infty < \inf_x\{(z^0,Lx) - \beta_0(x^*,x)\} \Rightarrow [-|\beta_0|x^*,z^0] \perp \{[x,Lx], x \in \mathscr{D}(L)\}$$

Тому, зважаючи на вигляд [4, с.40] ортогонального доповнення графіка L, дістанемо

$$z_0 \in \mathscr{D}(L^*), L^*z_0 = |\beta_0|x^* \Rightarrow (L^*c)(x^*) \leqslant c(\mathscr{G},\beta_0^{-1}z^0) \leqslant (\delta L)^*(x^*)$$

Ми показали, що на $\mathrm{dom}(\delta L)^*$ виконано $(L^*c) = (\delta L)^*$ і $\mathrm{dom}(\delta L)^* \subset R(L^*)$. За означенням $R(L^*) \subset \mathrm{dom}(L^*c)$. Раніше було доведено, що $R(L^*) \subset \mathrm{dom}(\delta L)^*$. Оскільки, взагалі кажучи, $(L^*c) \geqslant (L^*c)^{**} = (\delta L)^*$, то $\mathrm{dom}(\delta L)^* \subset \mathrm{dom}(L^*c)$. Отже

$$(L^*c) = (\delta L)^*, \mathrm{dom}(\delta L)^* = \mathrm{dom}(L^*c) = R(L^*)$$

За теоремою Фенхеля-Моро $(L^*c) = (L^*c)^{**} = (\delta L)^*$ тоді і лише тоді, коли (L^*c) має замкнений надграфік, що для власних опуклих функціоналів еквівалентно напівнеперервності знизу [5, с.178]. $\square$

Наступна теорема дає загальний вигляд мінімаксної середньо-квадратичної оцінки та визначає критерій скінченності мінімаксної похибки оцінювання.

Теорема 1. Нехай $\mathscr{G}$ є опуклою, замкненою, обмеженою підмножиною $\mathscr{F}$, $\eta \in \{\eta : M(\eta, \eta) \leq 1\}$. Гарантована похибка оцінювання має вигляд

$$\sigma(\ell, u) = \frac{1}{4}[\mathrm{cl}(L^* c)(\ell - H^* u) + \mathrm{cl}(L^* c)(-\ell + H^* u)]^2 + \sup_{R_\eta \in \mathscr{R}} (R_\eta u, u), \tag{5}$$

Для заданого $\ell \in \mathscr{H}$ мінімаксна похибка скінчена тоді і лише тоді коли

$$\ell - H^* u \in \mathrm{dom}(\delta L)^* \cap -\mathrm{dom}(\delta L)^*, R(L^*) \subset \mathrm{dom}(\delta L)^* \subset \overline{R(L^*)}$$

для деякого $u \in \mathscr{Y}$. Мінімаксна оцінка дається виразом

$$y \mapsto (\hat{u}, y) + \hat{c}, \hat{u} \in \mathrm{Arginf}_u \sigma(\ell, u), \hat{c} = \frac{1}{2}(\mathrm{cl}(L^* c)(\ell - H^* \hat{u}) - \mathrm{cl}(L^* c)(-\ell + H^* \hat{u}))$$

Доведення. Беручи до уваги рівність $M\xi^2 = M(\xi - M\xi)^2 + (M\xi)^2$ та (1), знайдемо

$$M((\ell, \varphi) - (u, y) - c)^2 = [(\ell - H^* u, \varphi) - c]^2 + M(u, \eta)^2$$

відтак

$$\sup_{\varphi \in L^{-1}(G), R_\eta \in \mathscr{R}} M((\ell, \varphi) - (u, y) - c)^2 = \sup_{\varphi \in L^{-1}(G)} [(\ell - H^* u, \varphi) - c]^2 + \sup_{R_\eta \in \mathscr{R}} (R_\eta u, u)$$

Легко показати, що у цьому випадку

$$\sup_{R_\eta \in \mathscr{R}} (R_\eta u, u) = (u, u)$$

Перетворимо перший доданок

$$\begin{gathered}\sup_{\varphi \in L^{-1}(G)} [(\ell - H^* u, \varphi) - c] = \frac{1}{2}((\delta L)^* (\ell - H^* u) + (\delta L)^* (-\ell + H^* u)) + \\ |c - \frac{1}{2}((\delta L)^* (\ell - H^* u) - (\delta L)^* (-\ell + H^* u))|\end{gathered} \tag{6}$$

Зважаючи на формулу (6) виводимо, що для заданих ℓ, u, c

$$\sup_{\varphi \in L^{-1}(G)} [(\ell - H^* u, \varphi) - c] < +\infty \Leftrightarrow \ell - H^* u \in \mathrm{dom}(\delta L)^* \cap -\mathrm{dom}(\delta L)^*,$$

Множина $\mathrm{dom}(\delta L)^*$ є опуклим конусом з вершиною в нулі, відтак $\mathrm{dom}(\delta L)^* \cap -\mathrm{dom}(\delta L)^*$ є найбільшим лінійним многовидом, що міститься в $\mathrm{dom}(\delta L)^*$. Якщо покласти $c = \frac{1}{2}((\delta L)^*(\ell - H^* u) - (\delta L)^*(-\ell + H^* u))$, то з (6) та леми 1 дістанемо вираз для $\sigma(\ell, u)$.

Якщо $\ell - H^* u \in \mathrm{dom}(\delta L)^* \cap -\mathrm{dom}(\delta L)^*$, то в силу строгої опуклості, коерцитивності та напівнеперервності знизу функціоналу $u \mapsto \sigma(\ell, u)$ існує єдина мінімаксна оцінка $\hat{u}$. □

Наслідок 1. Нехай

$$\mathrm{int}\mathscr{G} \cap R(L) \neq \varnothing, \eta \in \{\eta : M(\eta, \eta) \leq 1\}$$

Тоді гарантована похибка оцінювання скінченна для $\ell - H^*u \in R(L^*)$ і лише для них, існує єдина мінімаксна середньоквадратична оцінка $\hat{u}$, що визначається з умови $\sigma(\ell, u) \to \min_u$, де

$$\sigma(\ell, u) = \frac{1}{4}[c(\mathscr{G}, z) + c(\mathscr{G}, -z)]^2 + (u, u) L^*z = \ell - H^*u \tag{7}$$

Доведення. Згідно теореми 1 для заданого $\ell \in \mathscr{H}$ мінімаксна похибка скінчена тоді і лише тоді коли

$$\ell - H^*u \in \mathrm{dom}(\delta L)^* \cap -\mathrm{dom}(\delta L)^*$$

Оскільки $0 \in \mathscr{G} \cap R(L)$, то ми знаходимося в умовах леми 1, звідки $\mathrm{dom}(\delta L)^* = R(L^*)$ і

$$\mathrm{cl}(L^*c)(\ell - H^*u) = (L^*c)(\ell - H^*u) = c(\mathscr{G}, z), L^*z = \ell - H^*u$$

Легко показати, що у цьому випадку

$$\sup_{R_\eta \in \mathscr{R}} (R_\eta u, u) = (u, u)$$

Тоді з (5) виводимо (7). Легко збагнути, що функціонал $u \mapsto \sigma(\ell, u)$ є слабко напівнеперевним строго опуклим та коерцитивним. Справді, слабка напівнеперервність слідує з опуклості та замкнености (лема 1) функціоналу

$$w \mapsto \min\{c(\mathscr{G}, \psi), L^*\psi = w\}$$

Решта властивостей очевидні. Тому на замкненій опуклій множині $\mathscr{U}_\ell$ функціонал $u \mapsto \sigma(\ell, u)$ досягає свого мінімуму в єдиній точці $\hat{u}$. $\square$

Для еліпсоїдів у гільбертовому просторі мінімаксна апріорна середньоквадратична оцінка може бути зображена у вигляді розв'язків системи лінійних операторних рівнянь.

Теорема 2. Нехай

$$\mathscr{G} = \{f : \|f\|^2 \leq 1\}, \eta \in \{\eta : M(\eta, \eta) \leq 1\},$$

множина $R(T) = \{[Lx, Hx], x \in \mathscr{D}(L)\}$ є замкненою. Для $\ell \in R(L^*) + R(H^*)$ і лише для них єдина мінімаксна оцінка $\hat{u}$ може бути подана у вигляді $\hat{u} = H\hat{p}$, де $\hat{p}$ є довільним розв'язком системи

$$\begin{aligned} L^*\hat{z} &= \ell - H^*H\hat{p}, \\ L\hat{p} &= \hat{z} \end{aligned} \tag{8}$$

мінімаксна похибка оцінювання зображується як

$$\sigma(\ell, \hat{u}) = (\ell, \hat{p}) \tag{9}$$

Доведення. Помітимо, що умови наслідку 1 виконано, відтак існує єдина мінімаксна середньоквадратична оцінка $\hat{u}$, що визначається з умови

$$\sigma(\ell, u) = (z, z) + (u, u), L^*z = \ell - H^*u, u \in \mathscr{U}_\ell \tag{10}$$

Можна показати, що оцінка $\hat{u}$, водночас, може бути знайдена як розв'язок задачі проектування

$$\|[z, u]\|^2 \to \inf, T^*[z, u] = \ell \tag{11}$$

Остання має єдиний розв'язок в силу замкнeності T, що лежить у множині значень оператора T. Отже, $[\hat{u}, \hat{z}] = Tx$ і, водночас, $T^*[\hat{u}, \hat{z}] = \ell$, звідки, пригадуючи означення T, знаходимо

$$Lx = \hat{z}, Hx = \hat{u}, L^*\hat{z} + H^*\hat{u} = \ell,$$

що і завершує доведення. □

Зауваження 2. Можна показати, що вектор[4] $[\hat{u}, \hat{z}]$, які знаходяться як розв'язок системи (8), є найменшим по нормі розв'язком рівняння $T^*[z, u] = \ell$. Ми можемо ввести оператор

$$\ell \mapsto T^{*+}\ell = [\hat{u}, \hat{z}], \ell \in R(L^*) + R(H^*)$$

З іншого боку вектори $[\hat{\varphi}, \hat{q}]$, що знаходяться як розв'язок системи

$$\begin{aligned} &L^*\hat{q} = H^*(y - H\hat{\varphi}), \\ &L\hat{\varphi} = \hat{q} \end{aligned} \tag{12}$$

дають розв'язок задачі проектування

$$(Lx, Lx) + (y - Hx, y - Hx) \to \min_x,$$

причому $\hat{\varphi}$ – розв'язок цієї задачі з найменшою нормою. Зобразимо цю відповідність у вигляді

$$T^+[0, y] = \hat{\varphi}, y \in \mathscr{Y}$$

Запишемо $(T^{*+}\ell, [y, 0]) = (\hat{u}, y) = (\ell, \hat{\varphi}) = (\ell, T^+[0, y])$. Якщо $R(T^*)$ збігається з усім простором прибуття T^*, то попередня рівність справедлива для довільного ℓ, відтак вектор $T^+[0, y]$ можна прийняти за оцінку x. У загальному випадку $T^+[0, y]$ дає оцінку проекції x на $R(T^*)$.

Висновки

У цій роботі проілюстровано застосування підходу, запропонованого у [2], до проблеми мінімаксного оцінювання розв'язків лінійних операторних рівнянь у випадку слабко компактних опуклих обмежень, виділено множину функціоналів $\mathscr{F}$, для елементів якої і лише для них мінімаксна оцінка існує і єдина, одержано представлення оцінки за допомогою розв'язків системи лінійних операторних рівнянь для випадку квадратичних обмежень.

Список літератури

1. *Деміденко С.В.,Жук С.М.,Наконечний О.Г.* До проблеми мінімаксного оцінювання розв'язків одновимірних крайових задач // Тавр.вісник інформ. та матем.— 2007.— N1— С.7-24.
2. *Жук С.М.* Задачі мінімаксного спостереження для лінійних дескрипторних систем: Автореферат дис.канд-та фіз.-мат. наук / Київ, 2006 – 19 с.
3. *Екланд И.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы:Пер.з англ.— М.:Наука, 1979.– 396 с.
4. *Лянце В.Э.,Сторож О.Г.* Методы теории неограниченных операторов. — Киев:Наук.думка, 1983.— 212 с. н
5. *Иоффе А.Д.,Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. — М.:Наука, 1974.— 477 с.

Статья поступила в редакцию 12.02.2008

[4]Символом $[x, y]$ будемо позначати вектор, що є елементом декартового добутку $H_1 \times H_2$.