УДК 539.3

В. Г. Карнаухов, Я. О. Жук, Т. В. Карнаухова

Уточнена термомеханічна модель вимушених гармонічних коливань фізично нелінійної оболонки з розподіленими трансверсально-ізотропними актуаторами

(Представлено академіком НАН України В. Д. Кубенком)

Using refined Timoshenko's hypotheses and similar hypotheses for electric field quantities, a thermomechanical model of thin-walled shells with distributed transversely isotropic actuators is presented with taking the dissipative heating and physical nonlinearities into account.

Тонкостінні оболонки знаходять широке застосування в багатьох галузях сучасної науки і техніки. Часто на них діють стаціонарні та нестаціонарні механічні й теплові навантаження. Для демпфірування викликаних ними коливань в останні роки почали інтенсивно розвиватися активні методи з використанням п'єзоактивних матеріалів — п'єзоелектричних, п'єзомагнітних та матеріалів з пам'яттю форми. Найчастіше застосовують п'єзоелектричні матеріали, які мають ряд переваг порівняно з іншими матеріалами. Останні досягнення в цих питаннях наведено в роботах [1–4]. Ефективність роботи актуаторів та активного демпфірування за їх допомогою залежить від багатьох факторів: їх геометричних розмірів, розміщення в структурі оболонки, електромеханічних властивостей, зокрема залежності комплексних характеристик від амплітуд деформацій або напружень. Внаслідок істотної чутливості властивостей багатьох пасивних (без п'єзоефекту) і активних матеріалів до зміни температури значний вплив на ефективність роботи актуаторів та на ефективність демпфірування за їх допомогою мають теплові ефекти. Джерелом підвищення температури може бути як теплообмін із зовнішнім середовищем, так і дисипативний розігрів, викликаний гістерезисними втратами в матеріалах. При значних відношеннях товщини оболонки до радіуса кривини та при великій різниці в значеннях механічних характеристик матеріалів шарів виникає необхідність в розробці уточнених моделей шаруватих оболонок. Проте уточнені моделі тонкостінних елементів з урахуванням фізичної нелінійності та температури дисипативного розігріву розвинуті недостатньо.

Дана робота присвячена розробці уточненої термомеханічної моделі типу Тимошенка для в'язкопружних тонкостінних тришарових композитних оболонок з розподіленими п'єзоелектричними актуаторами з урахуванням фізичної нелінійності та дисипативного розігріву.

1. Нехай оболонка складена по товщині з середнього ізотропного пасивного шару і двох зовнішніх поляризованих по товщині трансверсально-ізотропних п'єзоактивних шарів, які виконують функції актуаторів. При цьому між пасивним і п'єзоактивними шарами можуть бути розміщені внутрішні електроди або вони можуть бути відсутніми. Нехай товщина пасивного шару дорівнює h_0, а верхній та нижній п'єзоактивні шари мають відповідно товщини h_1 та h_2. Загальна товщина пластини $h = h_0 + h_1 + h_2$. На оболонку діє гармонічне за часом нормальне механічне навантаження. Дисипація енергії в матеріалах при моногармонічному навантаженні в оболонці приводить до дисипативного розігріву. При досягненні температурою точки Кюрі п'єзоактивні шари втрачають п'єзоефект і вони не виконують свого функціонального призначення. Це явище можна назвати тепловим руйнуванням п'єзоелемента.

Для моделювання механічної поведінки такої композитної оболонки використаємо гіпотези Тимошенка, відповідно до яких тангенціальні складові вектора переміщень змінюються по товщині оболонки за лінійним законом, а для деформацій зсуву задається деякий закон. Пасивний шар може бути як металічним, так і діелектричним. П'єзоактивні шари вважаються поляризованими по товщині. Для них приймається додаткова гіпотеза, згідно з якою тангенціальні складові вектора індукції набагато менші від нормальної складової. В результаті з рівняння електростатики матимемо, що нормальна складова індукції постійна по товщині п'єзошару. При переході через електрод вона має розрив першого роду. Для рівняння енергії приймається припущення, що нормальна складова вектора теплового потоку змінюється по товщині за степеневим законом. Використовуючи закон Фур'є, знаходимо розподіл температури по товщині кожного шару.

Відповідно до концепції комплексних характеристик, визначальні рівняння для пасивного матеріалу матимуть вигляд [5–8]

$$\sigma_{km} = 2\mu\varepsilon_{km} + \lambda\varepsilon_{ll}\delta_{km},$$

де комплексні параметри Ламе λ, μ залежать від інтенсивності деформацій або напружень, частоти та температури.

Рівняння енергії в моногармонічному наближенні має вигляд звичайного рівняння теплопровідності з джерелом тепла, яке породжується дисипативною функцією $D = \omega(\sigma''\varepsilon' - \sigma'\varepsilon'')/2$. Кінематичні співвідношення, рівняння руху, механічні та теплові граничні умови мають стандартний вигляд [9]. Використовуючи ці співвідношення та рівняння і визначальні рівняння (1), (2), матимемо складну нелінійну систему диференціальних рівнянь відносно зміщень і температури, яка описує термомеханічний стан шару із фізично нелінійного пасивного матеріалу.

Для в'язкопружних п'єзоактивних трансверсально-ізотропних матеріалів рівняння стану мають такий же вигляд, як і рівняня стану пружних матеріалів [10], в яких дійсні електромеханічні характеристики слід замінити на залежні від частоти і температури комплексні характеристики [5, 6]. Кінематичні співвідношення, рівняння руху, рівняння енергії, рівняння електростатики, граничні механічні, теплові та електричні умови наведено в роботах [5, 6, 10]. З їх використанням одержимо складну нелінійну систему диференціальних рівнянь відносно зміщень, температури та електричного потенціалу, яка описує термоелектромеханічний стан п'єзоелектричних шарів.

Зауважимо, що для багатьох п'єзоактивних матеріалів точка Кюрі лежить набагато нижче тієї температури, для якої потрібно враховувати залежність властивостей пасивного матеріалу від температури. Це зауваження стосується в першу чергу металічних пасивних матеріалів. Тоді можна не враховувати цю залежність і вказана вище нелінійна задача розпадається на дві окремі задачі — задачу механіки для в'язкопружного матеріалу і задачу теплопровідності з відомим джерелом тепла, який визначається дисипативною функцією.

Для лінеаризації вказаних вище нелінійних задач можна використати різного типу ітераційні методи — метод послідовних наближень, метод квазілінеаризації або метод змінних параметрів [5, 8]. Детально розглянемо останній метод. Відповідно до цього методу лінeаризація задачі на i-й ітерації досягається шляхом розрахунку коефіцієнтів визначальних рівнянь пасивного та п'єзоактивного шарів і дисипативної функції за формулами типу

$$\lambda = \lambda(\varepsilon'_{i-1}, \varepsilon''_{i-1}, \theta_{i-1}),$$

$$\mu = \mu(\varepsilon'_{i-1}, \varepsilon''_{i-1}, \theta_{i-1}),$$

$$D = D(\varepsilon'_{i-1}, \varepsilon''_{i-1}, \theta_{i-1}).$$

Тут ε'_{i-1}, ε''_{i-1}, θ_{i-1} — дійсні та уявні частини деформацій та температура, розраховані на $(i-1)$-й ітерації. Для прискорення збіжності ітераційного процесу використовується метод Ейткена–Стеффенсена [8]. Таким чином, на кожній ітерації матимемо тривимірну лінеаризовану задачу механіки та теплопровідності з відомим джерелом тепла.

Щоб звести ці тривимірні лінеаризовані задачі до двовимірних, для композитної оболонки застосуємо гіпотези типу Тимошенка для механічних польових величин та вказані вище адекватні їм гіпотези для електричних польових величин і температури.

Необхідно відзначити, що використана в даній роботі концепція комплексних характеристик широко застосовується в механіці пасивних дисипативних матеріалів при моногармонічному деформуванні. Для її обгрунтування використовуються як моделі лінійної та нелінійної в'язкопружності, так і моделі пластичності та в'язкопружнопластичності [7, 8, 11]. Останні досягнення з розробки цієї концепції для пасивних та п'єзоактивних матеріалів наводяться в роботі [6].

За аналогією з викладеним в [9] і відповідно до вказаного, зміщення змінюються по товщині пасивного шару оболонки за лінійним законом

$$u_1^z = u_1 + \varphi_1 z; \qquad v_1^z = v_1 + \varphi_{21} z; \qquad u_3^z = u_3. \tag{1}$$

Вирази для всіх кінематичних характеристик через компоненти вектора переміщень u_i $(i = 1, 2, 3)$ і зсуви ϕ_i подано в роботі [12]. Згідно з цим, співвідношення (1) доповнюються співвідношеннями

$$\sigma_{13} = f_1(z)\overset{0}{\sigma}_{13}; \qquad \sigma_{23} = f_1(z)\overset{0}{\sigma}_{23}.$$

Вирази для $\overset{0}{\sigma}_{13}$ і $\overset{0}{\sigma}_{23}$ знаходяться з варіаційного принципу Рейснера або методом Бубнова–Гальоркіна з таких співвідношень:

$$\int\limits_{(h_0)} \left(\varepsilon_{i3}^z - \frac{f_1(z)}{G_{i3}(z)}\overset{0}{\sigma}_{i3}\right) f_1(z)\,dz = 0, \qquad i = 1, 2.$$

В результаті знаходимо:

$$\overset{0}{\sigma}_{i3} = \frac{I_1 \varepsilon_{i3}}{I_{2i}},$$

де

$$I_1 = \int\limits_{(h_0)} f_1(z)\,dz, \qquad I_{2i} = \int\limits_{(h_0)} \frac{f_1^2(z)}{G_{i3}(z)}\,dz.$$

Складові рівнянь стану оболонки (зусилля, моменти, перерізуючі сили), які вносяться пасивним ізотропним шаром у загальні рівняння стану оболонки, визначаються традиційним співвідношенням [9]:

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{T}_1 = \widetilde{C}_{11}\varepsilon_1 + \widetilde{C}_{12}\varepsilon_2 + \widetilde{K}_{11}\varkappa_1 + \widetilde{K}_{12}\varkappa_2, \qquad \widetilde{T}_2 = \widetilde{C}_{12}\varepsilon_1 + \widetilde{C}_{22}\varepsilon_2 + \widetilde{K}_{12}\varkappa_1 + \widetilde{K}_{22}\varkappa_2,\\
&\widetilde{M}_1 = \widetilde{K}_{11}\varepsilon_1 + \widetilde{K}_{12}\varepsilon_2 + \widetilde{D}_{11}\varkappa_1 + \widetilde{D}_{12}\varkappa_2, \qquad \widetilde{M}_2 = \widetilde{K}_{12}\varepsilon_1 + \widetilde{K}_{22}\varepsilon_2 + \widetilde{D}_{12}\varkappa_1 + \widetilde{D}_{22}\varkappa_2,\\
&\widetilde{S} = \widetilde{C}_{66}\varepsilon_{12} + \widetilde{K}_{66}\varkappa_{12}, \qquad \widetilde{H} = \widetilde{K}_{66}\varepsilon_{12} + \widetilde{D}_{66}\varkappa_{12},\\
&\widetilde{Q}_1 = \widetilde{G}_{13}\varepsilon_{13}, \qquad \widetilde{Q}_2 = \widetilde{G}_{23}\varepsilon_{23}, \qquad \widetilde{G}_{i3} = \frac{I_1^2}{I_{2i}}.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Для п’єзоактивного трансверсально-ізотропного шару після нехтування у визначальних рівняннях нормальною складовою тензора напряжень σ_{33} та тангенціальними складовими вектора індукції спрощені визначальні рівняння набуваають вигляду:

$$
\begin{aligned}
&\overset{k}{\sigma}_{11} = \overset{k}{B}_{11}(z)\varepsilon_{11}^z + \overset{k}{B}_{12}(z)\varepsilon_{22}^z - \overset{k}{\gamma}_{31}(z)\overset{k}{E}_3,\\
&\overset{k}{\sigma}_{22} = \overset{k}{B}_{12}(z)\varepsilon_{11}^z + \overset{k}{B}_{22}(z)\varepsilon_{22}^z - \overset{k}{\gamma}_{31}(z)\overset{k}{E}_3,\\
&\overset{k}{\sigma}_{12} = \overset{k}{B}_{66}(z)\varepsilon_{12}, \qquad \overset{k}{\sigma}_{13} = \overset{k}{B}_{13}(z)\varepsilon_{13}, \qquad \overset{k}{\sigma}_{23} = \overset{k}{B}_{23}(z)\varepsilon_{23},\\
&\overset{k}{D}_3 = \overset{k}{\gamma}_{33}(z)\overset{k}{E}_3 + \overset{k}{\gamma}_{31}(z)[(\varepsilon_{11}^z + \varepsilon_{22}^z)].
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Тут прийнято позначення [5, 10]. Як видно з (3), в подальшому рівняння стану для перерізуючих сил матимуть такий самий вигляд, як і для пасивних шарів з модифікованими жорсткісними характеристиками і “коефіцієнтами зсуву”. Тому їх наводити не будемо, а звернемо увагу лише на зусилля і моменти.

2. Розглянемо випадок, коли внутрішні електроди присутні. Використовуючи останнє з рівнянь (3), матимемо

$$
\frac{D_3}{\gamma_{33}} = -\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{\gamma_{31}}{\gamma_{33}}[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + (\varkappa_1 + \varkappa_2)z]. \tag{4}
$$

Для пасивного шару $\gamma_{31} = 0$, $D_3 = C_0 = 0$.

Для верхнього та нижнього п’єзоактивних шарів $D_3 = C_1(\alpha,\beta)$ та $D_3 = C_2(\alpha,\beta)$ відповідно. Нехай $\psi(h_0/2 + h_1) = V_1$, $\psi[-(h_0/2 + h_1)] = V_2$. Після інтегрування (4) по товщині верхнього та нижнього п’єзоактивних шарів матимемо

$$
\begin{aligned}
&C_1(\alpha,\beta) = -\frac{V_1}{v_{10}} + \frac{v_{11}}{v_{10}}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \frac{w_{11}}{v_{10}}(\varkappa_1 + \varkappa_2),\\
&C_2(\alpha,\beta) = \frac{V_2}{v_{20}} + \frac{v_{21}}{v_{20}}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \frac{w_{21}}{v_{20}}(\varkappa_1 + \varkappa_2).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Враховуючи (5), знайдемо з останнього з рівнянь (3) E_3, одержаний результат підставимо в перші три рівняння (3) і використаємо формули для інтегральних характеристик оболонки:

$$
T_{(1,2,12)} = \int\limits_{(h)} (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12})\, d\gamma, \qquad M_{(1,2,12)} = \int\limits_{(h)} (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12})\gamma\, d\gamma. \tag{6}
$$

В результаті одержимо складові визначальних рівнянь для зусиль і моментів, які породжуються п'єзоактивними шарами:

$$
\begin{aligned}
&\overline{T}_{(1,2)} = \overline{C}_{11,21}\varepsilon_1 + \overline{C}_{12,22}\varepsilon_2 + \overline{K}_{11,21}\varkappa_1 + \overline{K}_{12,22}\varkappa_2 - \overset{0}{T}_{(1,2)},\\
&\overline{M}_{(1,2)} = \overline{K}_{11,21}\varepsilon_1 + \overline{K}_{12,22}\varepsilon_2 + \overline{D}'_{11,21}\varkappa_1 + \overline{D}_{12,22}\varkappa_2 - \overset{0}{M}_{(1,2)},\\
&\overline{T}_{12} = \overline{S} = \overline{C}_{66}\varepsilon_{12} + \overline{K}_{66}\varkappa_{12}, \qquad \overline{M}_{12} = \overline{H} = \overline{K}_{66}\varepsilon_{12} + \overline{D}_{66}\varkappa_{12}.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Тут введено позначення роботи [5] і, крім того,

$$
\overset{0}{T}_{(1,2)} = -\frac{v_{(11,12)}}{v_{10}}V_1 + \frac{v_{(21,22)}}{v_{20}}V_2, \qquad \overset{0}{M}_{(1,2)} = -\frac{w_{(11,12)}}{v_{10}}\frac{w_{(21,22)}}{v_{20}}V_2. \tag{8}
$$

До наведених вище рівнянь потрібно додати рівняння руху, наведені в [9].

3. Розглянемо другий випадок, коли середній пасивний шар діелектричний, а внутрішні електроди відсутні. При цьому індукція постійна по товщині оболонки, розміщеної між електродами:

$$
D_3 = C(\alpha, \beta). \tag{9}
$$

Використовуючи (9), за аналогією з вищевикладеним, матимемо:

$$
C(\alpha, \beta) = -\frac{V_0}{v_{10}} + \frac{v_{11}}{v_{10}}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \frac{w_{11}}{v_{10}}(\varkappa_1 + \varkappa_2). \tag{10}
$$

Тут V_0 — прикладена до зовнішніх електродів різниця потенціалів, а величини v_{ij}, w_{ij} розраховуються за формулами, наведеними в [5]. За аналогією з [5], одержимо спрощені рівняння для напружень. Після їх інтегрування по товщині одержимо рівняння стану вигляду (7), коефіцієнти яких розраховуються за формулами, наведеними в [5].

4. Двовимірні рівняння енергії представлено в [5]. Вважаючи, що температура постійна по товщині оболонки, одержимо стаціонарне рівняння енергії вигляду:

$$
\frac{\lambda}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(B\frac{\partial}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(B\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\right]\theta - \frac{2\delta\theta - D}{h} = 0, \tag{11}
$$

де $\theta = T - T^0$, $\delta = (\alpha_3 + \alpha_4)/2$, $T^0 = (\alpha_3\theta_3 + \alpha_4\theta_4)/(\alpha_3 + \alpha_4)$; α_3, α_4 — коефіцієнти теплообміну на поверхнях $z = \pm h/2$ із зовнішнім середовищем з температурами θ_3, θ_4; λ — коефіцієнт теплопровідності матеріалу [12]. Якщо знехтувати розігрівом в активних шарах, то в (11) дисипативна функція D розраховується за формулою

$$
\begin{aligned}
D = \frac{\omega}{2}[&(T_1''\varepsilon_1' - T_1'\varepsilon_1'') + (T_2''\varepsilon_2' - T_2'\varepsilon_2'') + 2(S''\varepsilon_{12}'' - S'\varepsilon_{12}'') + (M_1''\chi_1' - M_1'\chi_1'') +\\
&+ (M_2''\chi_2' - M_2'\chi_2'') + 2(H_1''\chi_{12}' - H_1'\chi_{12}'') + (Q_1''\varepsilon_{13}' - Q_1'\varepsilon_{13}'') + (Q_2''\varepsilon_{23}' - Q_2'\varepsilon_{23}'')].
\end{aligned}
\tag{12}
$$

При врахуванні розігріву в активних шарах в (12) потрібно додати члени, наведені в [5].

Згадана вище модель є теоретичною основою для дослідження впливу фізичної нелінійності та температури дисипативного розігріву на ефективність роботи п'єзоелектричних актуаторів та на ефективність активного демпфірування коливань композитних оболонок за їх допомогою.

Для розрахунку різниці потенціалів, яку необхідно підвести до актуатора для компенсації механічного навантаження при резонансних коливаннях, потрібно побудувати за описаною вище ітераційною процедурою амплітудно-частотну та фазочастотну характеристики при дії на оболонку тільки механічного гармонічного навантаження. Потім побудувати аналогічні характеристики для різних значень електричного навантаження, підібравши таке значення різниці потенціалів, яке найближче до побудованої раніше амплітудно-частотної характеристики при силовому навантаженні. Приклавши до оболонки знайдену таким чином різницю потенціалів з протилежною фазою, скомпенсуємо дію механічного навантаження. Для розв'язання вказаних крайових задач розроблено чисельні методи на основі методу дискретної ортогоналізації та методу скінченних елементів. Проте зауважимо, що різниця потенціалів, яку необхідно підвести до актуатора для компенсації механічного навантаження, є інтегральною характеристикою. Тому для її розрахунку можна використати класичні варіаційні методи. Ці методи особливо ефективні при активному демпфіруванні вимушених резонансних коливань пластин та оболонок.

1. *Rao S. S., Sunar M.* Piezoelectricity and its use in disturbance sensing and control of structure: A survey // Appl. mech. reviews. – 1994. – **47**, No 44. – P. 113–123.
2. *Tani J., Takagi T., Qiu J.* Intelligent material systems: Applications of functional materials // Ibid. – 1998. – **51**, No 8. – P. 505–521.
3. *Tzou H. S., Bergman L. A.* Dynamics and control of distributed systems. – Cambridge: Cambr. Univ. Press, 1998. – 400 p.
4. *Tzou H. S.* Piezoelectric shells (distributed sensing and control of continua). – Dordrecht: Kluver Academic Pub., 1993. – 400 p.
5. *Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф.* Механика связанных полей в элементах конструкций. Электротермовязкоупругость. Т. 4. – Киев: Наук. думка, 1988. – 320 с.
6. *Карнаухов В. Г., Михайленко В. В.* Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. – Житомир: ЖГТУ, 2005. – 428 с.
7. *Термомеханика* эластомерных элементов конструкций при циклическом нагружении / Потураев В. Н., Дырда В. И., Карнаухов В. Г. и др. / Под ред. В. Н. Потураева. – Киев: Наук. думка, 1987. – 288 с.
8. *Gabbert U., Tzou H. S.* Smart structures and structronic systems. – Dordrecht / Boston / London: Kluiwer Academic Pub., 2001. – 384 p.
9. *Матвеев В. В.* Демпфирование колебаний деформируемых тел. – Киев: Наук. думка, 1985. – 264 с.
10. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А.* Механика связанных полей в элементах конструкций. Электроупругость. Т. 5. – Киев: Наук. думка, 1989. – 290 с.
11. *Сенченков И. К., Жук Я. А., Карнаухов В. Г.* Моделирование термомеханического поведения физически нелинейных материалов при моногармоническом нагружении // Прикл. механика. – 2004. – **40**, № 9. – С. 3–34.
12. *Луговой П. З., Мейш В. Ф., Штанцель Э. А.* Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций. – Киев: ИПЦ "Киевский университет", 2005. – 536 с.

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ
НТУ України "Київський політехнічний інститут"

Надійшло до редакції 19.09.2006