

УДК 517.9+530.1

## ДИНАМИКА ДИССИПАТИВНЫХ СТРУКТУР В ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ОТРАЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

© Белан Е.П.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
ПР-Т ВЕРНАДСКОГО, 4, Г. СИМФЕРОПОЛЬ, 95007, УКРАИНА  
E-MAIL: [belan@crimea.edu](mailto:belan@crimea.edu)

**Abstract.** The properties of the stationary structures in a nonlinear optical resonator with lateral inversions transformer in feedback are investigated. The mathematical description of optical structures is based on the scalar parabolic equation with inversion spatial arguments and Neumann's condition on the segment. We determine the forms of stationary structures and investigate its stability as the diffusion coefficient decrease. parabolic equation, bifurcation, stationary structure, stability, center manifold.

### ВВЕДЕНИЕ

Оптические системы с двумерной обратной связью [1, 2] демонстрируют широкие возможности по исследованию процессов зарождения и развития диссипативных структур. Формирование и развитие оптических структур является ярким примером самоорганизации в диссипативной системе [3, 4, 5]. Богатое разнообразие как стационарных, так и вращающихся оптических структур наблюдалось уже при простейших преобразованиях (поворот, отражение).

Математической моделью оптических систем с двумерной обратной связью являются полулинейные параболические уравнения с преобразованиями пространственных переменных. Математическое обоснование наблюдаемых автоволновых явлений на основе теории бифуркации Андронова-Хопфа проведено в [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13]. Исследованию динамики бегущих волн, стационарных структур для параболического уравнения с поворотом одномерного аргумента и малой диффузии посвящены работы [14, 15, 16, 4, 17, 18]

Теория бифуркации позволяет исследовать условия возникновения вращающихся волн, стационарных структур. Однако на вопрос об их эволюции при удалении от точки бифуркации локальная теория бифуркации ответа не даёт. Согласно же экспериментальным данным и численным расчетам в нелинейном интерферометре с зеркальным отражением поля имеет место многообразие оптических структур. Количество их растет при уменьшении коэффициента диффузии [1, 20, 21, 22].

Следуя [5], в работе автора [19] для теоретического обоснования указанной динамики стационарных структур была построена иерархия упрощенных моделей. Их анализ привёл, в частности, к следующему выводу. Стационарные структуры с индексом неустойчивости 1, ответвляющиеся от пространственно однородного стационарного решения, при уменьшении коэффициента диффузии обретают устойчивость. В данной работе изучается вопрос о характере указанной бифуркации.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На промежутке  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  рассмотрим краевую задачу [1, 20, 21]

$$\partial_t u(x, t) + u(x, t) = D \partial_{xx} u(x, t) + K(1 + \gamma \cos u(-x, t)), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$\partial_x u\left(-\frac{\pi}{2}, t\right) = \partial_x u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0. \quad (2)$$

Задача (1), (2) моделирует динамику фазовой модуляции  $u(x, t)$  световой волны, прошедшей тонкий слой нелинейной среды керровского типа с преобразованием отражения координат в двумерной обратной связи в одномерном приближении. Здесь  $D > 0$  – эффективный коэффициент диффузии частиц нелинейной среды,  $0 < \gamma \leq 1$  – видность (контрастность) интерференционной картины,  $K > 0$  – коэффициент, пропорциональный интенсивности светового потока. Отметим, что родственная задача рассматривалась в [23, 2].

Обозначим  $H = L_2(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  гильбертово пространство измеримых на  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  функций. Шкалу пространств, порожденную оператором  $-\Delta$  ( $\Delta$  – одномерный оператор Лапласа) при граничных условиях (2) обозначим  $H^s$ ,  $s \in \mathbb{Z}_+$ . Норма в пространстве  $H^s$ ,  $s \in \mathbb{Z}_+$ , определяется формулой  $\|u\|_s^2 = \langle (-\Delta)^s u, u \rangle + \langle u, u \rangle$ . Здесь  $\langle *, * \rangle$  – скалярное произведение в гильбертовом пространстве  $H$ .

В данной работе рассматриваются вопросы существования, формы и устойчивости в метрике пространства  $H^1$  пространственно неоднородных стационарных решений задачи (1), (2), бифурцирующих из пространственно однородных решений  $u(t, x) = w$ , т.е. из решений уравнения

$$w = K(1 + \gamma \cos w). \quad (3)$$

Согласно [16], [4, см.12.] с ростом  $K$  количество сосуществующих корней этого уравнения неограниченно растет, причем при  $K \rightarrow \infty$  их состав постоянно обновляется: рождаются новые состояния равновесия и исчезают старые. В этой связи фиксируем какую-либо гладкую ветвь решений

$$w = w(K), \quad 1 + K\gamma \sin w(K) \neq 0 \quad (4)$$

уравнения (3). Затем линеаризуем задачу (1), (2) на  $w(K)$ :

$$\dot{u} + \mathfrak{L}u = 0,$$

где

$$\mathfrak{L} = 1 - D\Delta - \Lambda Q, \quad Qu(x) = u(-x), \quad \Lambda = \Lambda(K) = -K\gamma \sin w(K). \quad (5)$$

Линейный оператор  $\mathfrak{L}$  с областью определения  $H^2$ , рассматриваемый как неограниченный оператор в пространстве  $H$ , является самосопряженным оператором. Методом Фурье устанавливается

**Лемма 1.** *Оператор  $\mathfrak{L}$  в пространстве  $H$  имеет полную ортогональную систему собственных функций*

$$1, \sin x, \cos 2x, \sin 3x, \dots,$$

*соответствующих собственным значениям*

$$\lambda_0 = 1 - \Lambda, \quad \lambda_1 = 1 + D + \Lambda, \quad \lambda_2 = 1 + 4D - \Lambda, \quad \lambda_3 = 1 + 9D + \Lambda, \dots$$

Выберем теперь  $K$  таким образом, чтобы выполнялось следующее условие.

**Условие 1.**  $\Lambda = \Lambda(K) < -1$ .

Проблема реализуемости этого условия исследована в [16], [4, см.12.].

Пусть  $D > D_1 = -(1 + \Lambda)$ . Тогда, в силу леммы 1 и условия 1,  $w = w(K)$  – устойчивое решение задачи (1), (2). При убывании параметра  $D$  и его прохождении через значение  $D_1$  решение  $w = w(K)$  теряет устойчивость. Обозначим  $D_{2k+1} = (2k + 1)^{-2}D_1$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Если  $D_3 < D < D_1$ , то индекс неустойчивости [24, см. гл. 6. 4] решения  $w = w(K)$  равен 1. При уменьшении  $D$  и его прохождении через  $D_{2k+1}$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ , индекс неустойчивости решения  $w$  всякий раз повышается на единицу. Далее в качестве бифуркационного примем параметр  $D$ . Чтобы подчеркнуть зависимость  $\mathfrak{L}$ ,  $\lambda_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , от параметра  $D$  будем иногда обозначать их  $\mathfrak{L}(D)$ ,  $\lambda_k(D)$  соответственно.

## 2. СУЩЕСТВОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ

Преобразование  $u = w + v$  приводит задачу (1), (2) к виду

$$\dot{v} + \mathfrak{L}(D)v = \mathfrak{R}(Qv). \tag{6}$$

Справедливо следующее равенство

$$\mathfrak{R}(v) = \frac{1}{2}\Lambda_1 v^2 - \frac{1}{6}\Lambda v^3 + O(v^4), \quad \Lambda_1 = -\Lambda \operatorname{ctg} w. \tag{7}$$

В качестве фазового пространства уравнения (6), т.е. его пространства начальных условий, примем пространство  $H^1$ .

Отметим, что уравнение (6) в пространстве  $H^1$  порождает непрерывную полугруппу [2, см. гл. 3]. Имеет место следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть выполнено условие 1. Тогда существует  $\delta > 0$  такое, что задача (1), (2) имеет при  $0 < D_1 - D < \delta$  два стационарных пространственно неоднородных решения  $u_1^\pm(x, D) = w + v_1^\pm(x, D)$ , где

$$\begin{aligned} v_1^\pm(x, D) = & \pm \left( \frac{\lambda_1(D)}{c_1(D)} \right)^{\frac{1}{2}} \sin x + \left( \frac{\lambda_1(D)}{c_1(D)} \right) \frac{\Lambda_1}{4} \left( (\lambda_0 - 2\lambda_1)^{-1} - (\lambda_2 - 2\lambda_1)^{-1} \cos 2x \right) \pm \\ & \pm \frac{1}{24} \left( \frac{\lambda_1(D)}{c_1(D)} \right)^{\frac{3}{2}} \left( 3\Lambda_1^2 (\lambda_2 - 2\lambda_1)^{-1} - \Lambda (\lambda_3 - 3\lambda_1)^{-1} \right) \sin 3x + r^\pm(x, D). \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь  $r^\pm(x, D) = O((D_1 - D)^{3/2})$ ,

$$c_1(D) = -\frac{1}{4}\Lambda_1^2 \left( (\lambda_0 - 2\lambda_1)^{-1} + \frac{1}{2}(\lambda_2 - 2\lambda_1)^{-1} \right) + \frac{1}{8}\Lambda. \tag{9}$$

Решения  $u_1^\pm(x, D)$  – экспоненциально устойчивы.

Доказательство теоремы опирается на метод центральных многообразий [25, 26, 27] и проводится по схеме, примененной в [19, 12].

При уменьшении параметра  $D$  и его прохождении через  $D_{2k+1}$  от  $w$  всякий раз ответвляются пары  $u_{2k+1}^\pm$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , пространственно неоднородных стационарных решений задачи (1), (2).

Следующее равенство (**принцип подобия** [4])

$$u_{(2k+1)}^{\pm}(x, D) = u_1^{\pm}((2k+1)x, (2k+1)^2 D), k = 1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

позволяет упростить процесс построения решений  $v_{(2k+1)}^{\pm}(x, D)$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$

### 3. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ $v_1^{\pm}(x, D)$

Рассмотрим вопрос о форме  $v_1^{\pm}(x, D)$  при углублении параметра  $D$  в область надкритичности. Будем далее предполагать, что  $\Lambda_1 = 0$ . Исследование этого случая приводит к следующей модельной задаче

$$\dot{v} + \mathfrak{L}(D)v = (Qv)^3. \quad (11)$$

Для анализа динамики  $v_1^{\pm}(x, D)$  при уменьшении  $D$  от  $D_1$  построим галеркинские аппроксимации уравнения (11) в виде

$$v = \sum_{k=0}^4 z_{2k+1} \sin(2k+1)x. \quad (12)$$

В результате получим градиентную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_{2k+1} = -\frac{\partial G_{1,0}(z, D)}{\partial z_{2k+1}}, k = 0, 1, 2, 3, 4, \quad (13)$$

где  $z = (z_1, z_3, \dots, z_9)$ ,

$$\begin{aligned} G_1(z, D) = & \frac{1}{2} \sum_{k=0}^4 \lambda_{2k+1}(D) z_{2k+1}^2 + \frac{3}{16} \sum_{k=0}^4 z_{2k+1}^4 + \frac{1}{4} (z_1^3 z_3 + z_3^3 z_9) + \\ & + \frac{3}{4} \sum_{k=0}^4 z_{2k+1}^2 \sum_{s=k+1}^4 z_{2s+1}^2 - \frac{3}{4} z_1^2 (z_3 z_5 + z_5 z_7 + z_7 z_9) + \\ & + \frac{3}{4} z_1 (z_3^2 z_5 - z_3^2 z_9 + z_3 z_5 z_7 - z_3 z_5 z_9 + z_3 z_7 z_9) + \frac{3}{4} z_3 (z_5^2 z_7 + 2z_5 z_7 z_9). \end{aligned}$$

Потенциальная функция  $G_1(z, D)$  ограничена снизу. Следовательно, решения системы (13) ограничены на положительной полуоси. Аттракторами системы (13) являются её стационарные точки. Как известно, стационарные точки градиентных систем – узлы и седла.

Перейдем теперь к анализу системы (13). Из её нулевого решения при  $D = D_1$  в результате надкритической бифуркации типа *вилки* ответвляется пара устойчивых стационарных решений  $\tilde{z}^{\pm}(D) = \pm(\tilde{z}_1(D), \dots, \tilde{z}_9(D))$ ,  $\tilde{z}_1(D) > 0$ . Непрерывная ветвь  $\tilde{z}^+(D)$  существует на  $(0, D_{1,0})$ . Отметим её следующие особенности:  $\tilde{z}_1(D) > \tilde{z}_3(D) > \dots > \tilde{z}_9(D) > 0$  для всех  $D \in (0, D_{1,0})$ ;  $\tilde{z}_{2s+1}(D)$ ,  $s = 0, 1, \dots, 4$ , – монотонно убывающие ограниченные функции  $D$ .

Родившись устойчивыми, стационарные точки  $\tilde{z}^{\pm}(D)$  сохраняют устойчивость при убывании  $D$  от  $D_1$ . При этом прослеживается тенденция к сближению точек спектра семейства  $\tilde{z}^+(D)$  и отходе наибольшей её точки от нуля при уменьшении  $D$ .

Из изложенного выше следует, что имеет место следующее приближенное равенство

$$v_1^\pm(x, D) \approx \pm \sum_{k=0}^4 \tilde{z}_{2k+1}(D) \sin(2k + 1)x. \quad (14)$$

#### 4. ОБРЕТЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ $v_3^\pm(x, D)$

Обратимся теперь к вопросу о характере бифуркации семейства уравнений (13) в окрестности точки  $(D_3, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^5$ . Как и выше, в результате надкритической бифуркации типа *вилки* из нулевого решения системы (13) ответвляется пара стационарных решений  $\tilde{z}^\pm(D) = \pm(0, \tilde{z}_3(D), 0, 0, \tilde{z}_9(D))$  с индексом неустойчивости 1. Матрица устойчивости точек  $\tilde{z}^\pm(D)$  – блочно-диагональная. Один из её блоков – матрица

$$M(D) = \begin{pmatrix} \hat{\Lambda} - D - 3/2\hat{r}_3^2 & -(3/4)\hat{z}_3^2 + 3/2\hat{z}_3\hat{z}_9 & 3/4\hat{z}_3^2 - 3/2\hat{z}_3\hat{z}_9 \\ -(3/4)\hat{z}_3^2 + 3/2\hat{z}_3\hat{z}_9 & \hat{\Lambda} - 25D - 3/2\hat{r}_3^2 & -(3/2)\hat{z}_3\hat{z}_9 \\ 3/4\hat{z}_3^2 - 3/2\hat{z}_3\hat{z}_9 & -(3/2)\hat{z}_3\hat{z}_9 & \hat{\Lambda} - 49D - 3/2\hat{r}_3^2 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где  $\hat{r}_3^2 = \hat{z}_3^2 + \hat{z}_9^2$ ,  $\hat{\Lambda} = -1 - \Lambda$ . У нее при малых  $D_3 - D$  два отрицательных и одно положительное собственное значение. При уменьшении  $D$  от  $D_3$  положительное собственное значение убывает и переходит при  $D = \check{D}_3$  на отрицательную полуось. Пара стационарных решений  $\tilde{z}^\pm(D)$  обретает устойчивость в результате транскритической бифуркации (*обмена устойчивостью*). Перейдем далее к анализу указанного типа бифуркации.

Вначале, для простоты, положим в системе (13)  $z_5 = 0$ ,  $z_7 = 0$ ,  $z_9 = 0$ . В результате получим следующее однопараметрическое семейство дифференциальных уравнений на плоскости

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_1 \left( \hat{\Lambda} - D - \frac{3}{4}(z_1^2 - z_1 z_3 + 2z_3^2) \right), \\ \dot{z}_3 &= z_3 \left( \hat{\Lambda} - 9D - \frac{3}{4}(2z_1^2 + 2z_3^2) \right) + \frac{1}{4}z_1^3 \end{aligned} \quad (16)$$

В системе (16) при уменьшении параметра  $D$  и его прохождении через  $D_3$  от нулевого решения системы (13) ответвляется пара стационарных решений  $\pm(0, \check{z}_3(D))$ , где  $\check{z}_3(D) = 2 \left( \frac{\hat{\Lambda} - 9D}{3} \right)^{1/2}$ . Решения  $\pm(0, \check{z}_3(D))$  рождаются, разумеется, неустойчивыми с индексом неустойчивости 1. Индекс неустойчивости решений  $\pm(0, \check{z}_3(D))$  сохраняется при  $D \in \left( \frac{\hat{\Lambda}}{17}, \frac{\hat{\Lambda}}{9} \right)$ . Рассматриваемые ветви стационарных точек обретают устойчивость при  $\hat{D}_3 = \frac{\hat{\Lambda}}{17}$  и сохраняют её при дальнейшем уменьшении  $D$ . Для анализа характера бифуркации системы (16) в точке бифуркации  $(\hat{D}_3, 0, \check{z}_3)$  выполним в системе (15) преобразование сдвига  $z_1 = \xi_1$ ,  $z_3 = \check{z}_3(D) + \xi_3$ . В результате имеем

следующее семейство уравнений

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \mu(D)\xi_1 + \frac{3}{4}(\check{z}_3(D) + \xi_3)\xi_1^2 - \frac{3}{2}(2\check{z}_3(D) + \xi_3)\xi_1\xi_3 - \frac{3}{4}\xi_1^3, \\ \dot{\xi}_3 &= -\frac{3}{2}\check{z}_3(D)^2\xi_3 - \frac{3}{2}\check{z}_3(D)\xi_1^2 + O(\|\xi_1, \xi_3\|^3).\end{aligned}\quad (17)$$

Здесь  $\mu(D) = -\hat{\Lambda} + 17D$ . Это семейство уравнений в окрестности точки  $(\check{D}_3, 0, 0)$  имеет центральное многообразие, представимое в виде  $\xi_3 = -\frac{1}{\check{z}_3(D)}\xi_1^2 + O(\xi_1^3)$ . Ограничение системы (17) на указанном многообразии принимает вид

$$\dot{\xi}_1 = \mu(D)\xi_1 + \frac{3}{4}\check{z}_3(D)\xi_1^2 + \frac{9}{4}\xi_1^3 + O(\xi_1^4).\quad (18)$$

Очевидно, что в этом семействе уравнений в окрестности  $(\check{D}_3, 0)$  имеет место транскритическая бифуркация. При этом нулевое решение однопараметрического семейства уравнений (18) при уменьшении параметра  $D$  и его прохождении через  $\hat{D}_3$  обретает устойчивость, а семейство стационарных точек  $-\frac{4}{3\check{z}_3(D)}\mu(D) + O(|D - \hat{D}_3|^2)$  устойчивость теряет. Согласно принципу сведения [26] в семействе уравнений (17) при  $D = \hat{D}_3$  имеет место транскритическая бифуркация. При уменьшении параметра  $D$  и его прохождении через  $\hat{D}_3$  нулевое решение системы (17) обретает устойчивость и становится устойчивым узлом, а

$$\left(-\frac{4}{3\check{z}_3(D)}\mu(D) + O(|D - \hat{D}_3|^3), -\frac{16}{9\check{z}_3(D)}\mu^2(D) + O(|D - \hat{D}_3|^3)\right)$$

переходит в ветвь седловых точек.

Перейдем теперь к вопросу о характере рождения ветви

$$\left(-\frac{4}{3\hat{z}_3(D)}\mu(D) + O(|D - \hat{D}_3|^3), -\frac{16}{9\check{z}_3(D)}\mu^2(D) + O(|D - \check{D}_3|^3)\right)$$

стационарных решений семейства уравнений (17). Далее приведем результаты численного анализа этой задачи. Примем для определенности  $\Lambda = -1,85$ . Тогда бифуркационным является значение параметра  $D = 0,05$ , а  $\{0, 0, 730\}$  – особая точка типа *седло-узел*. Её спектр –  $\{0, -, 0, 8\}$ . Особая же точка  $(-0, 207, 0, 665)$  является седлом, а её спектр –  $\{-0, 924, 0, 0954\}$ . При  $D = 0,04$  особая точка  $(0, 0, 808)$  – устойчивый узел со спектром  $\{-0, 17, -, 0, 98\}$ . Точки же  $(0, 178, 0, 770)$ ,  $(-0, 362, 0, 604)$  – седловые со спектрами  $\{-1, 029, 0, 193\}$ ,  $\{-1, 203, 0, 315\}$  соответственно. Бифуркация рождения седло-узловой точки имеет место при  $D \approx 0,053$ . При  $D = 0,053$  система (16) имеет две особые точки  $(-0, 109', 0, 702)$ ,  $(-0, 108', 0, 701)$ , спектры которых равны  $\{-0, 824, -, 0, 005\}$ ,  $\{-0, 8123, 0, 002\}$  соответственно. Отметим, что  $(0, 0, 705)$  – особая точка при  $D = 0,053$ , а  $\{-0, 745, 0, 051\}$  – её спектр.

Проведенные численные эксперименты дают основания для следующего заключения. Существует такое  $D^*(\Lambda)$ ,  $D^*(L) < \hat{D}(\Lambda)$ , что в системе (17) при  $D = D^*(\Lambda)$  имеет место седло-узловая бифуркация. При уменьшении  $D$  от  $D^*(\Lambda)$  ветвь устойчивых узловых точек  $(z_1^s(D), (z_3^s(D))$  приближается к точке  $(0, \check{z}_3(D))$  и передает ей

при  $D = \check{D}_3$  устойчивость. Ветвь же  $(z_1^s(D), z_3^s(D))$  переходит затем в гладкую ветвь седловых точек. Качественно различные фазовые портреты однопараметрического семейства систем уравнений (16) схематически отражены на рис. 1–4.

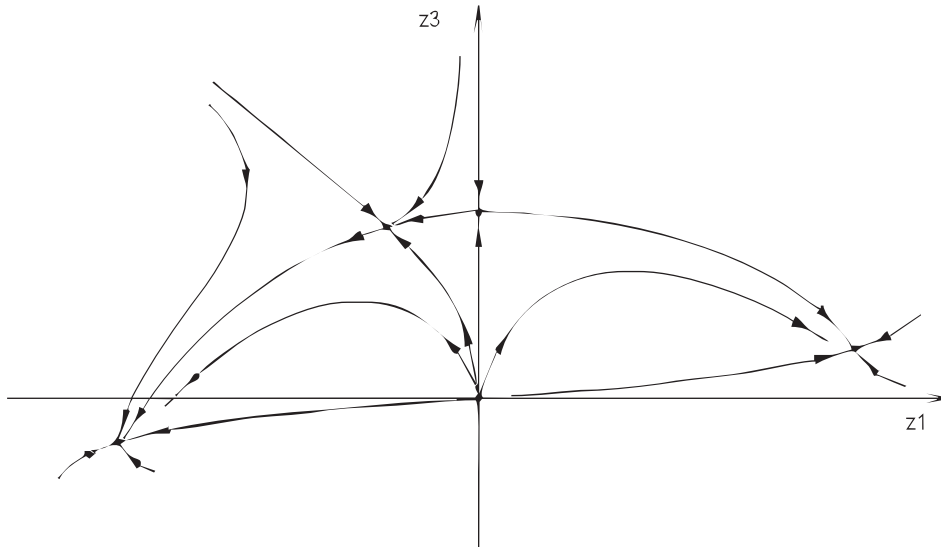


Рис. 1

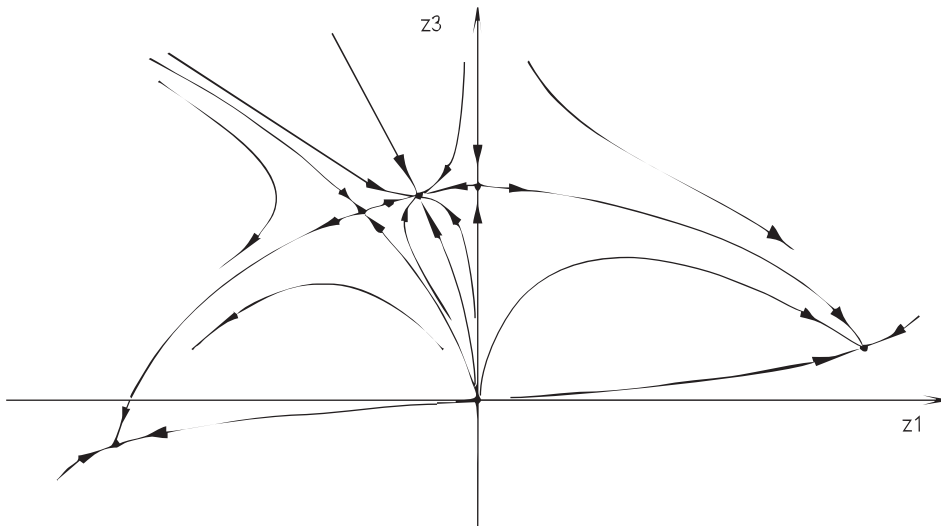


Рис. 2

Положим теперь в системе (13)  $z_7 = 0, z_9 = 0$ . В результате получим следующее семейство дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = x_1 \left( \hat{\Lambda} - D + \frac{3}{4} (-x_1^2 + x_1 x_3 - 2x_3^2 + 2x_3 x_5 - 2x_5^2) \right) - \frac{3}{4} x_3^2 x_5,$$

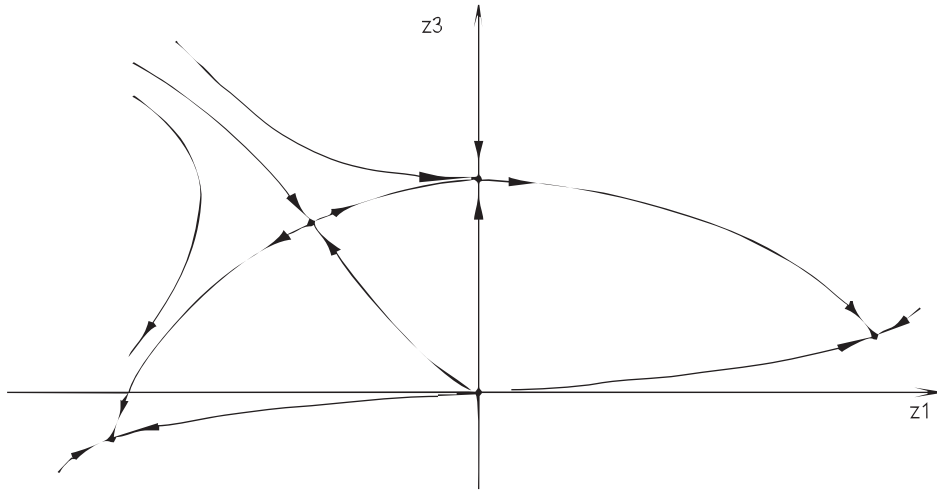


Рис. 3

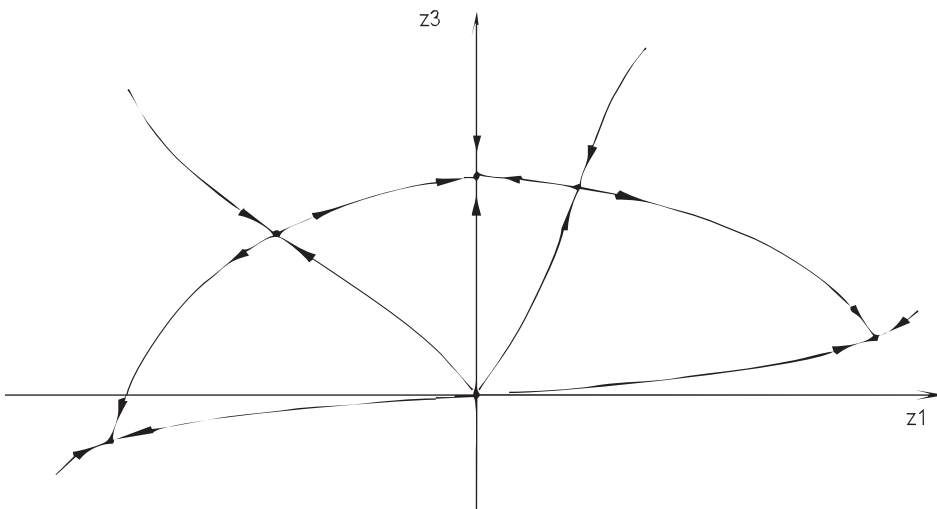


Рис. 4

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= x_3 \left( (\hat{\Lambda} - 9D + \frac{3}{4}(-2x_1^2 - x_3^2 - 2x_1x_5 - 2x_5^2)) + \frac{1}{4}(x_1^3 + 3x_1^2x_5) \right), \\ \dot{x}_5 &= x_5 \left( \hat{\Lambda} - 25D + \frac{1}{3}4(-2x_1^2 - 2x_3^2 - x_5^2) \right) + \frac{3}{4}(x_1^2x_3 - x_1x_3^2) \end{aligned} \quad (19)$$

В системе (19) при уменьшении параметра  $D$  и его прохождении через  $D_3$  из нулевого решения ответвляется пара стационарных решений  $\pm(0, \tilde{z}_3(D), 0)$  с индексом неустойчивости 1. Индекс неустойчивости  $\pm(0, \tilde{z}_3(D), 0)$  сохраняется на промежутке  $(\frac{\hat{\Lambda}}{25}, \frac{\hat{\Lambda}}{9})$  изменения параметра  $D$ . Рассматриваемые ветви обретают устойчивость при  $\hat{D}_3 = \frac{\hat{\Lambda}}{25}$  и сохраняют её при дальнейшем уменьшении  $D$ .



Метод центральных многообразий приводит, как и выше, к следующему заключению. При  $D = \hat{D}_3 = \frac{\hat{\Lambda}}{25}$  в точках  $\pm(0, \hat{z}_3(D), 0)$  имеет место обмен устойчивостью. Указанной бифуркации предшествует по параметру  $D$  седло-узловая бифуркация. Приведем в этой связи результаты численного анализа системы (19) при  $\Lambda = -1,85$ . В этом случае  $\hat{D}_3 = 0,34$ , точка  $(0, 0, 837, 0)$  является седло-узловой, а точка  $(0, 211, 0, 810, -0, 073)$  – седлом. Бифуркация рождения седло-узловой точки имеет место при  $D \approx 0,036$ . Она рождается вблизи точки  $(0, 0665, 0, 833, -0, 029)$ . При  $D = 0,033$  точка  $(0, 0, 859, 0)$  – устойчивая особая точка системы (19), а её особые точки  $(0, 236, 0, 807, -0, 078)$ ,  $(-0, 017, 0, 858, 0, 009)$  – седловые с индексом неустойчивости 1.

Положим теперь в системе (13)  $z_9 = 0$ . В полученной системе при уменьшении параметра  $D$  и его прохождении через  $\check{D}_3$  от нулевого решения ответвляется пара стационарных решений  $\pm(0, \check{z}_3(D), 0, 0)$  с индексом неустойчивости 1. Матрица устойчивости этой пары совпадает с определенной в (15) матрицей  $M(D)$ , в которой  $\check{z}_3(D) = \hat{z}_3(D)$ ,  $\hat{z}_9 = 0$ . Согласно выполненному анализу у этой симметричной матрицы одно собственное значение при уменьшении параметра  $D$  остаётся на положительной полуоси. Таким образом, индекс неустойчивости  $\pm(0, \hat{z}_3(D), 0, 0)$  не меняется.

Обратимся теперь к системе (13). Уже отмечалось, что пара её гладких ветвей стационарных решений  $\hat{z}^\pm(D) = \pm(0, \hat{z}_3(D), 0, 0, \hat{z}_9(D))$  при уменьшении параметра  $D$  обретает при  $D = \check{D}_3$  устойчивость в результате транскритической бифуркации. Пусть, как и выше,  $\Lambda = -1,85$ . Тогда  $\check{D}_3 \approx 0,029$ . При  $D = 0,029$  справедливо равенство  $\check{z}^+ = (0, 0, 916, 0, 0, 0, 070)$ . Бифуркация рождения седло-узловой точки имеет место при  $D \approx 0,032$ . Седло-узловая точка рождается вблизи точки  $(-0, 133, 0, 880, 0, 068, -0, 034, 0, 054)$ . От неё при уменьшении параметра  $D$  ответвляются две ветви стационарных точек. Устойчивая ветвь приближается к  $\check{z}^+(D)$  и обменивается с ней при  $D = \check{D}_3$  устойчивостью. Если  $D = 0,028$ , то стационарные точки  $(0, 085, 0, 918, -0, 039, 0, 029, 0, 069)$ ,  $(-0, 255, 0, 865, 0, 153, -0, 052, 0, 040)$  – седловые с индексом неустойчивости 1, а стационарная точка  $(0, 0, 924, 0, 0, 0, 073)$   $(0, 0, 893, 0)$  – устойчивый узел. Отметим, что  $\{-1, 707, -1, 243, -0, 0168\}$  – спектр матрицы  $M(0, 028)$ .

Анализ матрицы  $M(D)$  приводит к следующему заключению. Имеет место совместное воздействие стационарных структур  $v_1^+(x, D)$ ,  $v_5^+(x, D)$ ,  $v_7^+(x, D)$  на стационарную структуру  $v_3^+(x, D)$ . Совместное воздействие стационарных структур  $v_1^+(x, D)$ ,  $v_5^+(x, D)$ ,  $v_7^+(x, D)$ ,  $v_{11}^+(x, D)$ ,  $v_{13}^+(x, D)$  на стационарную структуру  $v_3^+(x, D)$  приводит к матрице, имеющей при  $D = 0,028$  следующий спектр:  $\{-5, 2575, -3, 8278, -1, 9431, -1, 3870, -0, 0004\}$ .

Отметим теперь, что стационарные решения  $\check{z}^\pm(D)$  сохраняют устойчивость при дальнейшем уменьшении  $D$  от  $D = \check{D}_3$ .

Выполненный выше анализ даёт веские основания для следующего заключения. Стационарные решения  $v_3^\pm(x, D)$  в процессе уменьшения  $D$  меняют индекс неустойчивости. Дополнительным основанием для этого заключения являются приводимые далее результаты по эволюции структуры  $v_3^+(x, D)$  при уменьшении параметра  $D$ .

### 5. О ПРЕДСТАВЛЕНИИ $v_3^+(x, D)$

Рассмотрим теперь вопрос об эволюции структуры  $v_3^+(x, D)$  при уменьшении параметра  $D$  от критического значения  $\tilde{D}_3 = \tilde{D}_3(\Lambda)$ , при котором  $v_3^+(x, D)$  входит в класс устойчивых структур. Приведем в этой связи результаты численного анализа для случая  $\Lambda = -1,85$ . Тогда  $\tilde{D}_3 \approx 0,029$ , а  $v_3^+(x, 0,029)$  аппроксимируется функцией

$$0,916 \sin 3x + 0,070 \sin 9x \quad (20)$$

Отметим, что трехмодовой аппроксимацией  $v_3^+(x, 0,029)$  является функция

$$0,917 \sin 3x + 0,071 \sin 9x + 0,004 \sin 15x \quad (21)$$

На рис. 5 графики функций (20), (21) неразличимы.

На рис. 5 имеется график функции

$$1,076 \sin 3x + 0,333 \sin 9x + 0,043 \sin 15x. \quad (22)$$

Эта функция является трехмодовой аппроксимацией решения  $v_3^+(x, 0,01)$ . Общая же тенденция в эволюции  $v_3^+(x, D)$  при уменьшении параметра  $D$  от критического значения  $\tilde{D}_3$  состоит в том, что рост амплитуды  $v_3^+(x, D)$  по существу прекращается и имеет место расширение областей изменения переменной  $x$ , на которых функция  $v_3^+(x, D)$  практически не меняется, сохраняя на них минимальное и максимальное значения. Сказанное иллюстрируют на рис.5. и графики функций

$$\begin{aligned} &1,150 \sin 3x + 0,333 \sin 9x + 0,152 \sin 15x, \\ &1,160 \sin 3x + 0,354 \sin 9x + 0,180 \sin 15x + 0,100 \sin 21x + 0,050 \sin 27x, \end{aligned}$$

Указанные функции являются аппроксимациями  $v_3^+(x, 0,001)$  порядка 3, 5 соответственно. Волнистость этих графиков означает, что значение параметра  $D = 0,001$  принадлежит той области изменения параметра  $D$ , где функция  $v_3^+(x, D)$  ведет подобно функции  $(-1 - L)^{1/2} \operatorname{sgn}(\sin 3x)$ . При аппроксимации функции  $v_3^+(x, D)$  полиномами Фурье по системе  $\sin 3x, \sin 9x, \dots, \sin 3(2k + 1)x, \dots$  наблюдается явление Гиббса. Отметим теперь, что функция  $(-1 - L)^{1/2} \operatorname{sgn}(\sin 3x)$  является решением уравнения

$$\partial_t u(x, t) + u(x, t) = Lu(-x, t)u^3(-x, t), \quad t > 0,$$

в инвариантном подпространстве  $\operatorname{span}\{\sin x, \sin 3x, \dots, \sin(2k + 1)x, \dots\}$  пространства  $H$ . Согласно [19], решение  $(-1 - L)^{1/2} \operatorname{sgn}(\sin 3x)$  в указанном пространстве – экспоненциально устойчиво.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследован вопрос о характере обретения устойчивости пары пространственно неоднородных стационарных решений уравнения (11), бифурцирующих из нулевого решения с индексом неустойчивости 1. Механизм обретения устойчивости каждого решения из этой пары реализуется по одному сценарию. В этой связи речь, для определенности, пойдет о ветви  $v_3^+(x, D)$ . На первом этапе уменьшения

коэффициента диффузии от бифуркационного значения имеет место рост амплитуды  $v_3^+(x, D)$ . Изменение формы структуры  $v_3^+(x, D)$  носит здесь фактически линейный характер – вдоль моды  $\sin 3x$ . На втором этапе уменьшения  $D$  вступает в силу синхронизм и изменение структуры  $v_3^+(x, D)$  определяется семейством функций  $z_3(D) \sin 3x + z_9(D) \sin 9x$ . Это обеспечивает структуре  $v_3^+(x, D)$  лучшие условия для преодоления совместного воздействия трех структур  $v_1^+(x, D)$ ,  $v_5^+(x, D)$ ,  $v_7^+(x, D)$ . Преодолевая указанное воздействие, структура  $v_3^+(x, D)$  обретает устойчивость. Переход структуры  $v_3^+(x, D)$  в класс устойчивых режимов осуществляется по следующему сценарию. Реализуется седло-узловая бифуркация. Возникающая при этом устойчивая ветвь стационарных решений уравнения (11) обменивается устойчивостью с ветвью стационарных решений  $v_3^+(x, D)$  при соответствующем значении  $D$ . Учитывая, что промежуток изменения  $D$  от рождения седло-узловой точки до обрыва устойчивостью относительно мал, естественно считать, что характер обретения устойчивости  $v_3^+(x, D)$  определяется связкой: седло-узловая бифуркация – транскритическая бифуркация.

На следующем этапе уменьшения  $D$  решение  $v_3^+(x, D)$  определяется тремя параметрами и представимо в виде  $z_3(D) \sin 3x + z_9(D) \sin 9x + z_{15}(D) \sin 15x$ . Рост амплитуды  $v_3^+(x, D)$  практически прекращается. К совместному давлению на структуру  $v_3^+(x, D)$  подключаются  $v_{11}^+(x, D)$ ,  $v_{13}^+(x, D)$ . Однако указанная эволюция структуры  $v_3^+(x, D)$  позволяет ей не только сохранять устойчивость, но и расширять, по видимому, область влияния. Отметим теперь, что при  $D \rightarrow 0$  по норме пространства  $H$  имеет место  $v_3^+(x, D) \rightarrow (-1 - \Lambda)^{1/2} \operatorname{sgn}(\sin 3x)$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ахманов С. А., Воронцов М. А., Иванов В. Ю.* Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических аналогов нейронных сетей // Новые принципы оптической обработки информации – М.: Наука. – 1990. – С. 263-325.
2. *Разгулин А. В.* Нелинейные модели оптической синергетики М.: Изд. отдел ф-та ВМиК МГУ, МАКС Пресс, 2008. – 201 с.
3. *Накен Г.* Синергетика— М.: Мир. – 1980. – 404 с.
4. *Мищенко Е. Ф., Садовничий В. А., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. – М.: Физматлит, 2005. – 430 с.
5. *Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А.* Структуры и хаос в нелинейных средах – М.: Физматлит. – 2007. – 485 с.
6. *Разгулин А. В.* Об автоколебаниях в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом // ЖВММФ. – 1993. – Т. 33. N. 1. – С. 69-80.
7. *Разгулин А. В.* Устойчивость бифуркационных автоколебаниях в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом // ЖВММФ.— 1993. – Т. 33. N. 10. – С. 1499-1508.
8. *Разгулин А. В.* Ротационные волны в оптической системе с двумерной обратной связью // Математическое моделирование. – 1993. – Т. 5, №4. – С. 105-119.
9. *Skubachevskii A. L.* Bifurcation of periodic solution for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics // Nonlinear Analysis. Theory. Methods & Applications. – 1998. – V. 12 No. 2. – P. 261 – 278.
10. *Скубачевский А. Л.* О бифуркации Хопфа для квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. – 1998. – Т. 34. N.10. – С. 1394-1401.

11. Белан Е. П. О взаимодействии бегущих волн в параболическом функционально-дифференциальном уравнении // Дифференциальные уравнения. – 2004. – Т. 40, N.5, – С. 645-654.
12. Белан Е. П., Лыкова О. Б. Вращающиеся структуры в параболическом функционально-дифференциальном уравнении // Дифференциальные уравнения. – 2004. – Т. 40, N.10, – С. 1348-1357.
13. Белан Е. П., Лыкова О. Б. Бифуркации вращающихся структур в параболическом функционально-дифференциальном уравнении // Нелінійні коливання. – 2006. – Т. 9, № 2. – С. 155-169.
14. Кащенко С. А. Асимптотика пространственно-неоднородных структур в когерентных нелинейно-оптических системах // ЖВММФ. – 1991. – Т. 31, №. 3. – С. 467-473.
15. Grigorieva E. V. , Haken H., Kashchenko S. A. , Pelster A. Travelling wave dynamics in a nonlinear interferometer with spatial field transformer in feedback // Physika D. – 1999. – V. 125. – P. 123-141.
16. Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Оптическая буферность и механизмы ее возникновения // Теор. и мат. физика. – 2004, – Т. 140, N 1, – С. 14-28.
17. Белан Е. П. О динамике бегущих волн в параболическом уравнении с преобразованием сдвига пространственной переменной // Ж. мат. физ., анализ, геом. – 2005. – Т. 1, № 1. – С. 3-34.
18. Белан Е. П. Оптическая буферность стационарных структур // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – Т. 44, № 5. – С. 61-75.
19. Белан Е. П. Динамика стационарных структур в параболической задаче с отражением пространственной переменной // Кибернетика и системный анализ. – 2010. – Т. 46, № 5. – С. 95-111.
20. Vorontsov M. A., Zheleznykh N. I., Ivanov V. Yu. Transverse interaction in 2-D feedback non-linear optical systems // Opt. and Quant. Electron. – 1988. – Т.22. – P. 301-318.
21. Воронцов М. А., Железных Н. И. Поперечная бистабильность и мультистабильность в нелинейных оптических системах с обратной связью // Мат. моделирование. – 1990. – Т.2, №2. – С. 31-38.
22. Железных Н. И. Исследование нелинейных управляемых оптических систем с обратной связью дисс. канд. физ.-мат. наук 05.13.16. – Москва. – 1991 – 115 с..
23. Чушкин В. А., Разгулин А. В. Стационарные структуры в функционально-дифференциальном уравнении диффузии с отраженным аргументом // Вестн. Моск. ун-та. – сер. 15, вычисл. матем. и киберн. – 2003, №2 – С. 13-20.
24. Бабин А. В., Вишик М. И. Аттракторы эволюционных уравнений. М. : Наука. – 1989. – 294 с.
25. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. – М.: Мир. – 1980. – 368 с.
26. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М.: Мир, 1985. – 376 с.
27. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркация рождения цикла. – М.: Мир, 1985. – 280 с.

Статья поступила в редакцию 14.11.2010