УДК 517.977

И.С. РАППОПОРТ

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СБЛИЖЕНИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ В ИГРОВЫХ ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ. II[1]

Аннотация. Решена задача сближения управляемых объектов на основе метода разрешающих функций. Предложены новые достаточные условия окончания игры за конечное гарантированное время в случае, когда условие Понтрягина не выполняется. Введены разрешающие функции специального типа и на их основе разработаны две схемы метода разрешающих функций, обеспечивающих завершение дифференциальной игры в классе квазистратегий и контруправлений. Приведены формулы для вычисления разрешающих функций. Результаты иллюстрируются на модельном примере.

Ключевые слова: квазилинейная дифференциальная игра, многозначное отображение, измеримый селектор, стробоскопическая стратегия, разрешающая функция.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматриваются проблемы сближения управляемых объектов в игровых задачах динамики на основе метода разрешающих функций [1]. Преимущество этого метода в том, что он позволяет эффективно использовать современную технику многозначных отображений и их селекторов в обоснованиях игровых конструкций и получении на их основе содержательных результатов. В любых формах данного метода главным является накопительный принцип, который используется в текущем суммировании резрешающей функции для оценки качества игры первого игрока вплоть до достижения некоторого порогового значения.

В отличие от основной схемы метода разрешающих функций в статье рассматривается случай, когда условие Понтрягина не имеет места. Вводятся специальные многозначные отображения, порождающие верхние и нижние разрешающие функции двух типов. С помощью этих функций получены достаточные условия разрешимости задачи сближения за некоторое гарантированное время. Приведены формулы для вычисления разрешающих функций.

Работа продолжает исследования [1, 2] и примыкает к публикациям [3–24].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим конфликтно-управляемый процесс, эволюция которого описывается равенством

$$z(t) = g(t) + \int_0^t \Omega(t,\tau)\varphi(u(\tau), v(\tau))\, d\tau, \quad t \ge 0. \tag{1}$$

Здесь $z(t) \in R^n$, функция $g(t)$, $g: R_+ \to R^n$, измерима по Лебегу [8] и ограничена при $t > 0$, матричная функция $\Omega(t,\tau)$, $t \ge \tau \ge 0$, измерима по t, а также суммируема по τ для каждого $t \in R_+$. Блок управления задается функцией $\varphi(u,v)$, $\varphi: U \times V \to R^n$, непрерывной по совокупности переменных на прямом произведении непустых компактов U и V; m, l, n — натуральные числа.

Управления игроков $u(\tau)$, $u: R_+ \to U$, и $v(\tau)$, $v: R_+ \to V$, являются измеримыми функциями времени.

---

[1]Продолжение. Начало в № 5, 2019.

Кроме процесса (1) задано терминальное множество M^*, имеющее цилиндрический вид

$$M^* = M_0 + M, \tag{2}$$

где M_0 — линейное подпространство из R^n, а M — компакт из ортогонального дополнения L к подпространству M_0 в R^n.

Цели первого (u) и второго (v) игроков противоположны. Первый (преследователь) стремится вывести траекторию процесса (1) на терминальное множество (2) за кратчайшее время, а второй (убегающий) — максимально оттянуть момент попадания траектории на множество M^* или избежать встречи.

Примем сторону первого игрока, и если игра (1), (2) продолжается на интервале $[0, T]$, то управление первого игрока в момент t выберем на основе информации о $g(T)$ и $v_t(\cdot)$, т.е. в виде измеримой функции

$$u(t) = u(g(T), v_t(\cdot)), \ t \in [0, T], \ u(t) \in U, \tag{3}$$

где $v_t(\cdot) = \{v(s) : s \in [0, t]\}$ — предыстория управления второго игрока к моменту t, или в виде контруправления

$$u(t) = u(g(T), v(\cdot)), \ t \in [0, T], \ u(t) \in U. \tag{4}$$

Если, в частности, $g(t) = e^{At} z_0$, $\Omega(t, \tau) = e^{A(t-\tau)}$, $z(0) = z_0$, а e^{At} — матричная экспонента, то считают, что управление $u(t) = u(z_0, v_t(\cdot))$ реализует квазистратегию [6], а контруправление [3] $u(t) = u(z_0, v(\cdot))$ является проявлением стробоскопической стратегии Хайека [7].

Пусть $\gamma(t, \tau)$, $\gamma : \Delta \to L$, $\Delta = \{(t, \tau) : 0 \le \tau \le t < \infty\}$, — некоторая, почти всюду ограниченная, измеримая по t и суммируемая по τ, $\tau \in [0, T]$, для каждого $t > 0$ функция, которую назовем функцией сдвига.

Обозначим π оператор ортогонального проектирования из R^n в L. Введем функцию

$$\xi(t) = \xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot)) = \pi g(t) + \int_0^t \gamma(t, \tau) d\tau.$$

В силу предположений селектор $\gamma(t, \tau)$ является суммируемой по τ, $\tau \in [0, t]$, функцией при любом $t > 0$.

Рассмотрим многозначное отображение

$$\mathfrak{B}(t, \tau, v) = \{\beta \ge 0 : \beta[M - \xi(t)] \subset \pi\Omega(t, \tau)\varphi(U, v) - \gamma(t, \tau)\}.$$

Условие 1. Многозначное отображение $\mathfrak{B}(t, \tau, v)$ принимает непустые значения на множестве $\Delta \times V$.

Замечание 1. Если выполнено условие Понтрягина [4], то $0 \in \mathfrak{B}(t, \tau, v)$ на множестве $\Delta \times V$ и поэтому выполнено условие 1.

Пусть выполнено условие 1. Введем разрешающие функции

$$\beta^*(t, \tau, v) = \sup\{\beta : \beta \in \mathfrak{B}(t, \tau, v)\},$$

$$\beta_*(t, \tau, v) = \inf\{\beta : \beta \in \mathfrak{B}(t, \tau, v)\}, \ \tau \in [0, t], \ v \in V.$$

Можно показать [1], что многозначное отображение $\mathfrak{B}(t, \tau, v)$ замкнутозначно, $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримо по совокупности (τ, v), $\tau \in [0, t]$, $v \in V$, а разрешающие функции $\beta^*(t, \tau, v)$ и $\beta_*(t, \tau, v)$ $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримы по совокупности (τ, v), $\tau \in [0, t]$, $v \in V$. Пусть $V(0, t)$ — совокупность измеримых функций $v(\tau)$, $\tau \in [0, t]$, со значениями из V.

Поскольку при фиксированном t функции $\beta^*(t,\tau,\upsilon)$ и $\beta_*(t,\tau,\upsilon)$ $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримы по совокупности (τ,υ), $\tau\in[0,t]$, $\upsilon\in V$, они суперпозиционно измеримы [1], т.е. $\beta^*(t,\tau,\upsilon(\tau))$ и $\beta_*(t,\tau,\upsilon(\tau))$ измеримы по τ, $\tau\in[0,t]$, при любой измеримой функции $\upsilon(\cdot)\in V(0,t)$, а функции $\inf\limits_{\upsilon\in V}\beta^*(t,\tau,\upsilon)$ и $\inf\limits_{\upsilon\in V}\beta_*(t,\tau,\upsilon)$ измеримы по τ, $\tau\in[0,t]$.

Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие 1. Рассмотрим при $\upsilon\in V$, $\tau\in[0,t]$, $t>0$, функцию

$$\beta(t,\tau,\upsilon)=\begin{cases}\beta^*(t,\tau,\upsilon), \text{ если } 0\notin M-\xi(t,g(t),\gamma(t,\cdot)),\\ \beta_*(t,\tau,\upsilon), \text{ если } 0\in M-\xi(t,g(t),\gamma(t,\cdot)),\end{cases}$$

и компактнозначное многозначное отображение

$$U_\beta(\tau,\upsilon)=\{u\in U:\pi\Omega(t,\tau)\varphi(u,\upsilon)-\gamma(t,\tau))\in\beta(t,\tau,\upsilon)[M-\xi(t)]\}.$$

В силу свойств параметров процесса (1) и разрешающей функции $\beta(t,\tau,\upsilon)$ компактнозначное отображение $U_\beta(\tau,\upsilon)$ $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримо [1] при $\upsilon\in V$, $\tau\in[0,t]$.

Рассмотрим многозначные отображения

$$W_\beta(t,\tau,\upsilon)=\pi\Omega(t,\tau)\varphi(U_\beta(\tau,\upsilon),\upsilon)-\gamma(t,\tau),\; W_\beta(t,\tau)=\bigcap_{\upsilon\in V}W_\beta(t,\tau,\upsilon)$$

на множествах $\Delta\times V$ и Δ соответственно, где $\Delta=\{(t,\tau):0\le\tau\le t<\infty\}$.

Условие 2. Многозначное отображение $W_\beta(t,\tau)$ принимает непустые значения на множестве Δ.

С учетом предположений о матричной функции $\Omega(t,\tau)$ заключаем, что при любом фиксированном $t>0$ вектор-функция $\pi\Omega(t,\tau)\varphi(u,\upsilon)$ $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измерима по $(\tau,\upsilon)\in[0,t]\times V$ и непрерывна по $u\in U_\beta(\tau,\upsilon)$. Поэтому на основании теоремы о прямом образе [8] при любом фиксированном $t>0$ многозначное отображение $W_\beta(t,\tau,\upsilon)$ имеет замкнутые значения и $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримо по $(\tau,\upsilon)\in[0,t]\times V$. Тогда в силу леммы 5 [1] многозначное отображение $W_\beta(t,\tau)$ будет измеримым по τ, $\tau\in[0,t]$, замкнутозначным отображением.

Рассмотрим множество

$$\mathrm{P}_\beta(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=\{t\ge0:0\in M-\xi(t,g(t),\gamma(t,\cdot)),\;\int_0^t\inf_{\upsilon\in V}\beta_*(t,\tau,\upsilon)d\tau<1\}.\quad(5)$$

Если условия в фигурных скобках соотношения (5) не выполняются ни для каких $t\ge0$, то положим $\mathrm{P}_\beta(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=\varnothing$.

Теорема 1. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнены условия 1, 2, множество M выпукло, для соответствующей функции сдвига $\gamma(\cdot,\cdot)$ множество $\mathrm{P}_\beta(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$ не пусто и $\mathrm{P}_\beta\in\mathrm{P}_\beta(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$. Тогда игра может быть закончена в момент P_β с использованием управления вида (4).

Доказательство. Пусть $\upsilon(\tau)$ — произвольный измеримый селектор компакта V, $\tau\in[0,\mathrm{P}_\beta]$. Из условия 2 и теоремы об измеримом выборе селектора [8] вытекает, что существует хотя бы один измеримый селектор $\gamma_\beta(\mathrm{P}_\beta,\tau)$ такой, что $\gamma_\beta(\mathrm{P}_\beta,\tau)\in W_\beta(\mathrm{P}_\beta,\tau)$, $\tau\in[0,\mathrm{P}_\beta]$. Поэтому имеем $\gamma_\beta(\mathrm{P}_\beta,\tau)\in$ $\in\beta_*(\mathrm{P}_\beta,\tau,\upsilon)[M-\xi(\mathrm{P}_\beta)]$ при любом $\upsilon\in V$ для $\tau\in[0,\mathrm{P}_\beta]$. Следовательно, справедливо включение $\gamma_\beta(\mathrm{P}_\beta,\tau)\in\inf\limits_{\upsilon\in V}\beta_*(\mathrm{P}_\beta,\tau,\upsilon)[M-\xi(\mathrm{P}_\beta)]$. Проинтегрировав его от 0 до P_β, получим включение

$$\int_0^{P_\beta} \gamma_\beta(P_\beta,\tau)d\tau \in \int_0^{P_\beta} \inf_{v\in V} \beta_*(P_\beta,\tau,v)[M-\xi(P_\beta)]\,d\tau,$$

которое в терминах опорных функций запишем в виде

$$\left(\int_0^{P_\beta} \gamma_\beta(P_\beta,\tau)d\tau,\psi\right) \le C\left(\int_0^{P_\beta} \inf_{v\in V} \beta_*(t,\tau,v)[M-\xi(P_\beta)]d\tau,\psi\right) =$$

$$= \int_0^{P_\beta} \inf_{v\in V} \beta_*(t,\tau,v)d\tau C(M-\xi(P_\beta),\psi) \le C(M-\xi(P_\beta),\psi).$$

Здесь учтены условия соотношения (5) и свойства опорных функций $C(X,\psi)$ [9]. Таким образом, имеем

$$\int_0^{P_\beta} \gamma_\beta(P_\beta,\tau)d\tau \in M-\xi(P_\beta). \tag{6}$$

Рассмотрим при $v \in V$, $\tau \in [0, P_\beta^*]$ компактнозначное многозначное отображение

$$U_\beta(\tau,v) = \{u \in U: \pi\Omega(P_\beta,\tau)\varphi(u,v) - \gamma(P_\beta,\tau)) = \gamma_\beta(P_\beta,\tau)\}. \tag{7}$$

В силу свойств параметров процесса (1) компактнозначное отображение $U_\beta(\tau,v)$ $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримо [1] при $v \in V$, $\tau \in [0, P_\beta]$. Поэтому по теореме об измеримом выборе селектора [8] многозначное отображение $U_\beta(\tau,v)$ содержит $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримый селектор $u_\beta(\tau,v)$, который является суперпозиционно измеримой функцией [1].

Положим управление первого игрока $u_\beta(\tau) = u_\beta(\tau, v(\tau))$, $\tau \in [0, P_\beta]$. С учетом формулы (1) получим

$$\pi z(P_\beta) = \xi(P_\beta) + \int_0^{P_\beta} (\pi\Omega(P_\beta,\tau)\varphi(u_\beta(\tau), v(\tau)) - \gamma(P_\beta,\tau))d\tau. \tag{8}$$

Тогда из соотношений (6)–(8) имеем $\pi z(P_\beta) \in \xi(P_\beta) + M - \xi(P_\beta) = M$ и, следовательно, $z(P_\beta) \in M^*$, что завершает доказательство теоремы.

КВАЗИСТРАТЕГИЯ СБЛИЖЕНИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ

Рассмотрим многозначное отображение

$$\mathfrak{A}(t,\tau,v) = \{\alpha \ge 0 : \pi\Omega(t,\tau)\varphi(U,v) - \gamma(t,\tau) \cap \alpha[M-\xi(t)] \ne \varnothing\}. \tag{9}$$

Если выполнено условие 1, то многозначное отображение $\mathfrak{A}(t,\tau,v)$ принимает непустые значения на множестве $\Delta \times V$. Введем разрешающие функции

$$\alpha^*(t,\tau,v) = \sup\{\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}(t,\tau,v)\},$$

$$\alpha_*(t,\tau,v) = \inf\{\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}(t,\tau,v)\},\ \tau \in [0,t],\ v \in V.$$

Покажем [1], что многозначное отображение $\mathfrak{A}(t,\tau,v)$ замкнутозначно, $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримо по совокупности (τ,v), $\tau \in [0,t]$, $v \in V$, а разрешающие функции $\alpha^*(t,\tau,v)$ и $\alpha_*(t,\tau,v)$ $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримы по совокупности (τ,v), $\tau \in [0,t]$, $v \in V$. Поскольку при фиксированном t функции $\alpha^*(t,\tau,v)$ и $\alpha_*(t,\tau,v)$ $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримы по совокупности (τ,v), $\tau \in [0,t]$, $v \in V$, они суперпозиционно измеримы [1], т.е. $\alpha^*(t,\tau,v(\tau))$ и $\alpha_*(t,\tau,v(\tau))$ измеримы по τ, $\tau \in [0,t]$, при любой измеримой функции $v(\cdot) \in V(0,t)$, а функции $\inf_{v\in V} \alpha^*(t,\tau,v)$ и $\inf_{v\in V} \alpha_*(t,\tau,v)$ измеримы по τ, $\tau \in [0,t]$.

Рассмотрим множество

$$T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=\left\{t\ge 0:\int\limits_0^t \inf_{v\in V}\alpha^*(t,\tau,v)d\tau\ge 1,\ \int\limits_0^t \inf_{v\in V}\beta(t,\tau,v)d\tau<1\right\}. \quad (10)$$

Если при некотором $t>0$ $\alpha^*(t,\tau,v)\equiv+\infty$ для $\tau\in[0,t]$, $v\in V$, то в этом случае значение соответствующего интеграла в фигурных скобках соотношения (10) естественно положить равным $+\infty$ и $t\in T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$, если для этого t справедливо другое неравенство в фигурных скобках данного соотношения. В случае, когда неравенства в соотношении (10) не выполняются при всех $t>0$, положим $T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=\varnothing$.

Теорема 2. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнены условия 1, 2, множество M выпукло, для некоторой функции сдвига $\gamma(\cdot,\cdot)$ множество $T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$ не пусто и $T\in T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$. Тогда игра может быть закончена в момент T с использованием управления вида (3).

Доказательство. Пусть $v(\tau)$ — произвольный измеримый селектор компакта V, $\tau\in[0,T]$.

Рассмотрим вначале случай $\xi(T,g(T),\gamma(T,\cdot))\notin M$ и введем контрольную функцию

$$h(t)=1-\int\limits_0^t \alpha^*(T,\tau,v(\tau))d\tau-\int\limits_t^T \inf_{v\in V}\beta^*(t,\tau,v)d\tau,\ t\in[0,T].$$

По определению T имеем

$$h(0)=1-\int\limits_0^T \inf_{v\in V}\beta^*(t,\tau,v)d\tau>0,$$

$$h(T)=1-\int\limits_0^T \alpha^*(T,\tau,v(\tau))d\tau\le 1-\int\limits_0^T \inf_{v\in V}\alpha^*(t,\tau,v)d\tau\le 0.$$

Поэтому в силу непрерывности функции $h(t)$ существует такой момент времени t_*, $t_*\in(0,T]$, что $h(t_*)=0$. Отметим, что момент переключения t_* зависит от предыстории управления второго игрока $v_{t_*}(\cdot)=\{v(s):s\in[0,t_*]\}$.

Промежутки времени $[0,t_*)$, $[t_*,T]$ назовем «активным» и «пассивным» соответственно. Опишем способ управления первым игроком на каждом промежутке.

На «активном» промежутке $\tau\in[0,t_*)$ рассмотрим компактнозначное отображение

$$U_\alpha^*(\tau,v)=\{u\in U:\pi\Omega(T,\tau)\varphi(u,v)-\gamma(T,\tau))\in\alpha^*(T,\tau,v)[M-\xi(T)]\}. \quad (11)$$

Из построения отображения $\mathfrak{A}(t,\tau,v)$ следует, что многозначное отображение $U_\alpha^*(\tau,v)$ имеет непустые образы. В силу свойств параметров процесса (1) и разрешающей функции $\alpha^*(T,\tau,v)$ компактнозначное отображение $U_\alpha^*(\tau,v)$ при $v\in V$, $\tau\in[0,t_*)$ $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримо [1]. Поэтому по теореме об измеримом выборе селектора [8] в каждом отображении существует хотя бы один $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримый селектор $u_\alpha^*(\tau,v)$, который является суперпозиционно измеримой функцией [1]. Положим управление первого игрока на «активном» промежутке равным $u_\alpha^*(\tau)=u_\alpha^*(\tau,v(\tau))$.

Рассмотрим «пассивный» промежуток $[t_*,T]$. Из условия 2 и теоремы об измеримом выборе селектора [8] вытекает, что существует хотя бы один измеримый селектор $\gamma_\beta^*(T,\tau)$ такой, что $\gamma_\beta^*(T,\tau)\in W_\beta^*(T,\tau)$, $\tau\in[t_*,T]$. Поэтому имеем

$\gamma_\beta^*(T,\tau) \in \beta^*(T,\tau,\upsilon)[M - \xi(T)]$ при любом $\upsilon \in V$ для $\tau \in [t_*, T]$. Следовательно, справедливо включение $\gamma_\beta^*(T,\tau) \in \inf\limits_{\upsilon \in V} \beta^*(T,\tau,\upsilon)[M - \xi(T)]$. Проинтегрировав его от t_* до T, получим включение

$$\int_{t_*}^{T} \gamma_\beta^*(T,\tau)d\tau \in \int_{t_*}^{T} \inf_{\upsilon \in V} \beta^*(T,\tau,\upsilon)[M - \xi(T)]d\tau. \tag{12}$$

На «пассивном» промежутке $[t_*, T]$ рассмотрим компактнозначное отображение

$$U_\beta^*(\tau,\upsilon) = \{u \in U : \pi\Omega(T,\tau)\varphi(u,\upsilon) - \gamma(T,\tau) = \gamma_\beta^*(T,\tau)\}. \tag{13}$$

Многозначные отображения $U_\beta^*(\tau,\upsilon)$ имеют непустые образы. В силу свойств параметров процесса (1) компактнозначное отображение $U_\beta^*(\tau,\upsilon)$ при $\upsilon \in V$, $\tau \in [t_*, T]$ $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримо [1]. Поэтому согласно теореме об измеримом выборе селектора [8] существует хотя бы один $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримый селектор $u_\beta^*(\tau,\upsilon)$, который является суперпозиционно измеримой функцией [1]. Положим управление первого игрока на «пассивном» промежутке равным $u_\beta^*(\tau) = u_\beta^*(\tau, \upsilon(\tau))$.

С учетом формулы (1) при выбранных управлениях получаем

$$\pi z(T) = \xi(T) + \int_0^{t_*} (\pi\Omega(T,\tau)\varphi(u_\alpha^*(\tau), \upsilon(\tau)) - \gamma(T,\tau))d\tau +$$
$$+ \int_{t_*}^{T} (\pi\Omega(T,\tau)\varphi(u_\beta^*(\tau), \upsilon(\tau)) - \gamma(T,\tau))d\tau. \tag{14}$$

Из соотношений (11)–(14) имеем

$$\pi z(T) \in \xi(T) + \int_0^{t_*} \alpha^*(T,\tau,\upsilon(\tau))[M - \xi(T)]d\tau + \int_{t_*}^{T} \gamma_\beta^*(T,\tau)d\tau \subset$$
$$\subset \xi(T) + \int_0^{t_*} \alpha^*(T,\tau,\upsilon(\tau))[M - \xi(T)]d\tau + \int_{t_*}^{T} \inf_{\upsilon \in V} \beta^*(T,\tau,\upsilon)[M - \xi(T)]d\tau =$$
$$= \xi(T)\left[1 - \int_0^{t_*} \alpha^*(T,\tau,\upsilon(\tau))d\tau - \int_{t_*}^{T} \inf_{\upsilon \in V} \beta^*(T,\tau,\upsilon)d\tau\right] +$$
$$+ \int_0^{t_*} \alpha^*(T,\tau,\upsilon(\tau))Md\tau + \int_{t_*}^{T} \inf_{\upsilon \in V} \beta^*(T,\tau,\upsilon)M\,d\tau =$$
$$= \left[\int_0^{t_*} \alpha^*(T,\tau,\upsilon(\tau))d\tau + \int_{t_*}^{T} \inf_{\upsilon \in V} \beta^*(T,\tau,\upsilon)d\tau\right]M = M.$$

Здесь учтено равенство $h(t_*) = 0$, а переход при интегрировании многозначных отображений с множеством M может быть подтвержден использованием аппарата опорных функций [9].

Для случая $\xi(T, g(T), \gamma(T,\cdot)) \in M$ достаточно применить теорему 1.

Если для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие 1, то в силу соотношения (9) многозначное отображение $\mathfrak{A}(t,\tau,v)$ принимает непустые значения на множестве $\Delta\times V$. Рассмотрим при $v\in V$, $\tau\in[0,t]$, $t>0$, компактнозначное многозначное отображение

$$U_\alpha^*(\tau,v)=\{u\in U:\pi\Omega(t,\tau)\varphi(u,v)-\gamma(t,\tau)\in\alpha^*(t,\tau,v)[M-\xi(t)]\}.$$

В силу свойств параметров процесса (1) и разрешающей функции $\alpha^*(t,\tau,v)$ компактнозначное отображение $U_\alpha^*(\tau,v)$ $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримо [1] при $v\in V$, $\tau\in[0,t]$.

Рассмотрим многозначные отображения

$$W_\alpha^*(t,\tau,v)=\pi\Omega(t,\tau)\varphi(U_\alpha^*(\tau,v),v)-\gamma(t,\tau),\ W_\alpha^*(t,\tau)=\bigcap_{v\in V}W_\alpha^*(t,\tau,v)$$

на множествах $\Delta\times V$ и Δ соответственно, где $\Delta=\{(t,\tau):0\le\tau\le t<\infty\}$.

Условие 3. Многозначное отображение $W_\alpha^*(t,\tau)$ принимает непустые значения на множестве Δ.

С учетом предположений о матричной функции $\Omega(t,\tau)$ можно сделать вывод, что при любом фиксированном $t>0$ вектор-функция $\pi\Omega(t,\tau)\varphi(u,v)$ $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измерима по $(\tau,v)\in[0,t]\times V$ и непрерывна по $u\in U_\alpha^*(\tau,v)$. Поэтому на основании теоремы о прямом образе [8] при любом фиксированном $t>0$ многозначное отображение $W_\alpha^*(t,\tau,v)$ имеет замкнутые значения и является $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримым по $(\tau,v)\in[0,t]\times V$. Тогда в силу леммы 5 [1] многозначное отображение $W_\alpha^*(t,\tau)$ будет измеримым по τ, $\tau\in[0,t]$, замкнутозначным отображением.

Теорема 3. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнены условия 1–3, множество M выпукло, для некоторой функции сдвига $\gamma(\cdot,\cdot)$ множество $T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$ не пусто и $T\in T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$. Тогда игра может быть закончена в момент T с использованием управления вида (4).

Доказательство. Пусть $v(\tau)$ — произвольный измеримый селектор компакта V, $\tau\in[0,T]$.

Рассмотрим вначале случай $\xi(T,g(T),\gamma(T,\cdot))\notin M$ и введем контрольную функцию

$$h(t)=1-\int_0^t\inf_{v\in V}\alpha^*(T,\tau,v)d\tau-\int_t^T\inf_{v\in V}\beta^*(T,\tau,v)d\tau,\ t\in[0,T].$$

По определению T имеем

$$h(0)=1-\int_0^T\inf_{v\in V}\beta^*(T,\tau,v)d\tau>0,\ h(T)=1-\int_0^T\inf_{v\in V}\alpha^*(T,\tau,v)d\tau\le 0.$$

Поэтому в силу непрерывности функции $h(t)$ существует такой момент времени t_*, $t_*\in(0,T]$, что $h(t_*)=0$. Отметим, что момент переключения t_* не зависит от предыстории управления второго игрока $v_{t_*}(\cdot)=\{v(s):s\in[0,t_*]\}$.

Рассмотрим «активный» промежуток $[0,t_*)$. Из условия 3 и теоремы об измеримом выборе селектора [8] вытекает, что существует хотя бы один измеримый селектор $\gamma_\alpha^*(T,\tau)$ такой, что $\gamma_\alpha^*(T,\tau)\in W_\alpha^*(T,\tau)$, $\tau\in[0,t_*)$. Поэтому имеем $\gamma_\alpha^*(T,\tau)\in\alpha^*(T,\tau,v)[M-\xi(T)]$ при любом $v\in V$ для $\tau\in[0,t_*]$. Следовательно, справедливо включение $\gamma_\alpha^*(T,\tau)\in \inf_{\upsilon\in V} \alpha^*(T,\tau,\upsilon)[M-\xi(T)]$. Проинтегрировав его от 0 до t_*, получим включение

$$\int_0^{t_*}\gamma_\alpha^*(T,\tau)d\tau \in \int_0^{t_*}\inf_{\upsilon\in V}\alpha^*(T,\tau,\upsilon)[M-\xi(T)]d\tau. \tag{15}$$

Рассмотрим «пассивный» промежуток $[t_*,T]$. Из условия 2 и теоремы об измеримом выборе селектора [8] вытекает, что существует хотя бы один измеримый селектор $\gamma_\beta^*(T,\tau)$ такой, что $\gamma_\beta^*(T,\tau)\in W_\beta^*(T,\tau)$, $\tau\in[t_*,T]$. Поэтому имеем $\gamma_\beta^*(T,\tau)\in\beta^*(T,\tau,\upsilon)[M-\xi(T)]$ при любом $\upsilon\in V$ для $\tau\in[t_*,T]$. Следовательно, справедливо включение $\gamma_\beta^*(T,\tau)\in \inf_{\upsilon\in V}\beta^*(T,\tau,\upsilon)[M-\xi(T)]$. Проинтегрировав его от t_* до T, получим включение

$$\int_{t_*}^{T}\gamma_\beta^*(T,\tau)d\tau \in \int_{t_*}^{T}\inf_{\upsilon\in V}\beta^*(T,\tau,\upsilon)[M-\xi(T)]d\tau. \tag{16}$$

Обозначим

$$\hat\gamma^*(T,\tau)=\begin{cases}\gamma_\alpha^*(T,\tau), & \tau\in[0,t_*),\\ \gamma_\beta^*(T,\tau), & \tau\in[t_*,T].\end{cases}$$

Тогда с учетом равенства $h(t_*)=0$ и соотношений (15), (16) имеем

$$\int_0^T\hat\gamma^*(T,\tau)d\tau=\int_0^{t_*}\gamma_\alpha^*(T,\tau)d\tau+\int_{t_*}^T\gamma_\beta^*(T,\tau)d\tau\in$$

$$\in\int_0^{t_*}\inf_{\upsilon\in V}\alpha^*(T,\tau,\upsilon)[M-\xi(T)]d\tau+\int_{t_*}^T\inf_{\upsilon\in V}\beta^*(T,\tau,\upsilon)[M-\xi(T)]d\tau=$$

$$=\left[\int_0^{t_*}\inf_{\upsilon\in V}\alpha^*(T,\tau,\upsilon)d\tau+\int_{t_*}^T\inf_{\upsilon\in V}\beta^*(T,\tau,\upsilon)d\tau\right]M-$$

$$-\left[\int_0^{t_*}\inf_{\upsilon\in V}\alpha^*(T,\tau,\upsilon)\,d\tau+\int_{t_*}^T\inf_{\upsilon\in V}\beta^*(T,\tau,\upsilon)\,d\tau\right]\xi(T)d\tau=M-\xi(T).$$

Таким образом, справедливо соотношение

$$0\in M-\xi(T)-\int_0^T\hat\gamma^*(T,\tau)d\tau. \tag{17}$$

Рассмотрим при $\upsilon\in V$, $\tau\in[0,T]$ компактнозначное многозначное отображение

$$\hat U^*(\tau,\upsilon)=\{u\in U:\pi\Omega(T,\tau)\varphi(u,\upsilon)-\gamma(T,\tau)-\hat\gamma^*(T,\tau)=0\}. \tag{18}$$

В силу свойств параметров процесса (1) компактнозначное отображение $\hat U^*(\tau,\upsilon)$ $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримо [1] при $\upsilon\in V$, $\tau\in[0,T]$. Поэтому согласно теореме об измеримом выборе селектора [8] многозначное отображение $\hat U^*(\tau,\upsilon)$ содержит $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримый селектор $\hat u(\tau,\upsilon)$, который является суперпозиционно измеримой функцией [1].

Положим управление первого игрока $\hat{u}^*(\tau) = \hat{u}^*(\tau, v(\tau))$, $\tau \in [0, T]$. Использовав формулу (1), получим

$$\pi z(T) = \xi(T) + \int_0^T \hat{\gamma}^*(T,\tau)d\tau + \int_0^T (\pi\Omega(T,\tau)\varphi(\hat{u}^*(\tau), v(\tau)) - \gamma(T,\tau) - \hat{\gamma}^*(T,\tau))d\tau. \quad (19)$$

Тогда из соотношений (17)–(19) имеем

$$\pi z(T) \in \xi(T) + \int_0^T \hat{\gamma}^*(T,\tau)d\tau + M - \xi(T) - \int_0^T \hat{\gamma}^*(T,\tau)d\tau = M$$

и, следовательно, $z(T) \in M^*$.

Для случая $\xi(T, g(T), \gamma(T,\cdot)) \in M$ достаточно применить теорему 1.

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ РАЗРЕШАЮЩИХ ФУНКЦИЙ

Условие 4. Для некоторой функции сдвига $\gamma(\cdot,\cdot)$ $\xi(t, g(t), \gamma(t,\cdot)) \notin M$, $t \ge 0$, а $C(\pi\Omega(t,\tau)\varphi(U,v),\psi) - (\gamma(t,\tau),\psi) \ge 0$ для всех $\psi \in L$, $||\psi|| = 1$, $\tau \in [0,t]$, $v \in V$ и многозначное отображение $\mathfrak{A}(t,\tau,v)$ принимает непустые значения на множестве $\Delta \times V$.

Используя аппарат опорных функций [9], нетрудно получить следующий результат.

Лемма 1. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) множество M выпукло и выполнено условие 4. Тогда имеем

$$\alpha^*(t,\tau,v) = \inf_{\psi \in \Psi_\alpha(t)} \left\{ \frac{C(\pi\Omega(t,\tau)\varphi(U,v),\psi) - (\gamma(t,\tau),\psi)}{-C(M,-\psi) - (\xi(t),\psi)} \right\},$$

$$\beta^*(t,\tau,v) = \inf_{\psi \in \Psi_\alpha(t)} \left\{ \frac{C(\pi\Omega(t,\tau)\varphi(U,v),\psi) - (\gamma(t,\tau),\psi)}{C(M,\psi) - (\xi(t),\psi)} \right\},$$

где

$$\Psi_\alpha(t) = \{\psi \in L : ||\psi|| = 1,\ C(M,-\psi) + (\xi(t),\psi) < 0\},$$

$$\Psi_\beta(t) = \{\psi \in L : ||\psi|| = 1,\ C(M,\psi) - (\xi(t),\psi) > 0\}.$$

Замечание 2. В работе [23] введено понятие лексикографического максимума по ортогональному базису $e_1,\dots,e_n$ от компакта $A \in K(R^n)$ по формуле

$$\operatorname*{lex\,max}_{e_1,\dots,e_n} A = \bigcap_{k=0}^{n} A_k,$$

где $A_0 = A$, $A_k = \{x \in A_{k-1} : (x, e_k) = c(A_{k-1},\psi)\}$, $c(A_{k-1},\psi)$ — опорная функция множества A_{k-1} [24], $k = 1,\dots,n$. Множество $\operatorname*{lex\,max}_{e_1,\dots,e_n} A$ состоит из одной точки, принадлежащей множеству крайних точек выпуклой оболочки множества A. При этом, если взять $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримое многозначное отображение $U(\tau,v)$ и ортогональный базис такой, что $e_1 = \psi$, $\psi \in R^m$, $\psi \ne 0$, то выполняется [24] равенство $(\operatorname*{lex\,max}_{e_1,\dots,e_m} U(\tau,v),\psi) = c(U(\tau,v),\psi)$. Поэтому согласно теореме об опорной функции [8] многозначное отображение $U(\tau,v)$ содержит $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримый селектор $u(\tau,v) = \operatorname*{lex\,max}_{e_1,\dots,e_m} U(\tau,v)$, который является суперпозиционно измеримой функцией [1].

Рассмотрим на множестве $\Delta \times V$ многозначное отображение

$$\widetilde{W}(t, \tau, \upsilon) = \mathrm{co}\, \pi\Omega(t, \tau)\varphi(U, \upsilon).$$

Здесь $\mathrm{co}\, A$ — овыпукление множества A [9].

С учетом предположений о матричной функции $\Omega(t, \tau)$ заключаем, что при любом фиксированном $t > 0$ вектор-функция $\pi\Omega(t, \tau)\varphi(u, \upsilon)$ будет $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримой по $(\tau, \upsilon) \in [0, t] \times V$ и непрерывной по $u \in U$. Поэтому при любом фиксированном $t > 0$ многозначное отображение $\widetilde{W}(t, \tau, \upsilon)$ имеет замкнутые значения и является $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримым по $(\tau, \upsilon) \in [0, t] \times V$ [8].

Рассмотрим многозначные отображения

$$\widetilde{\mathfrak{A}}(t, \tau, \upsilon) = \{\alpha \ge 0 : \mathrm{co}\, \pi\Omega(t, \tau)\varphi(U, \upsilon) - \gamma(t, \tau) \bigcap \alpha[M - \xi(t)] \ne \varnothing\},$$

$$\widetilde{\mathfrak{B}}(t, \tau, \upsilon) = \{\beta \ge 0 : \beta[M - \xi(t)] \subset \mathrm{co}\, \pi\Omega(t, \tau)\varphi(U, \upsilon) - \gamma(t, \tau)\}.$$

Условие 5. Многозначные отображения $\widetilde{\mathfrak{A}}(t, \tau, \upsilon)$ и $\widetilde{\mathfrak{B}}(t, \tau, \upsilon)$ принимают непустые значения на множестве $\Delta \times V$.

Замечание 3. Условие $C(\pi\Omega(t, \tau)\varphi(U, \upsilon), \psi) - (\gamma(t, \tau), \psi) \ge 0$ для всех $\psi \in L$, $||\psi|| = 1$, $\tau \in [0, t]$, $\upsilon \in V$ эквивалентно включению $0 \in \mathrm{co}\, \pi\Omega(t, \tau)\varphi(U, \upsilon) - \gamma(t, \tau)$ для всех $\tau \in [0, t]$, $\upsilon \in V$, которое, вообще говоря, не гарантирует выполнения условия Понтрягина, но при котором справедливо условие 5.

Введем разрешающие функции

$$\widetilde{\alpha}^*(t, \tau, \upsilon) = \sup\{\alpha : \alpha \in \widetilde{\mathfrak{A}}(t, \tau, \upsilon)\}, \ \widetilde{\alpha}_*(t, \tau, \upsilon) = \inf\{\alpha : \alpha \in \widetilde{\mathfrak{A}}(t, \tau, \upsilon)\},$$

$$\widetilde{\beta}^*(t, \tau, \upsilon) = \sup\{\beta : \beta \in \widetilde{\mathfrak{B}}(t, \tau, \upsilon)\},$$

$$\widetilde{\beta}_*(t, \tau, \upsilon) = \inf\{\beta : \beta \in \widetilde{\mathfrak{B}}(t, \tau, \upsilon)\}, \ \tau \in [0, t], \ \upsilon \in V.$$

Нетрудно показать [1], что многозначные отображения $\widetilde{\mathfrak{A}}(t, \tau, \upsilon)$, $\widetilde{\mathfrak{B}}(t, \tau, \upsilon)$ замкнутозначны, $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримы по совокупности (τ, υ), $\tau \in [0, t]$, $\upsilon \in V$, а разрешающие функции $\widetilde{\alpha}^*(t, \tau, \upsilon)$, $\widetilde{\alpha}_*(t, \tau, \upsilon)$, $\widetilde{\beta}^*(t, \tau, \upsilon)$ и $\widetilde{\beta}_*(t, \tau, \upsilon)$ $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримы по совокупности (τ, υ), $\tau \in [0, t]$.

Замечание 4. Легко заметить, что если для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие 4, то справедливо условие 5 и для $\tau \in [0, t]$, $\upsilon \in V$ имеют место соотношения $\widetilde{\alpha}^*(t, \tau, \upsilon) = \alpha^*(t, \tau, \upsilon)$, $\widetilde{\alpha}_*(t, \tau, \upsilon) = \beta_*(t, \tau, \upsilon) = 0$. Если дополнительно справедливо условие 1, то $\widetilde{\beta}^*(t, \tau, \upsilon) = \beta^*(t, \tau, \upsilon)$.

Теорема 4. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнены условия 4, 2, множество M выпукло, для некоторой функции сдвига $\gamma(\cdot, \cdot)$ множество $T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$ не пусто и $T \in T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$. Тогда игра может быть закончена в момент T с использованием управления вида (3).

Доказательство можно провести по схеме доказательства теоремы 2 с учетом леммы 1 и замечаний 3, 4.

Теорема 5. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнены условия 4, 2, 3, множество M выпукло, для некоторой функции сдвига $\gamma(\cdot, \cdot)$ множество $T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$ не пусто и $T \in T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$. Тогда игра может быть закончена в момент T с использованием управления вида (4).

Доказательство можно провести по схеме доказательства теоремы 3 с учетом леммы 1 и замечаний 3, 4.

Вычисление разрешающих функций согласно лемме 1 достаточно сложная задача. Для линейного конфликтно-управляемого процесса (1), (2) и некоторых дополнительных предположениях она может быть существенно упрощена [22]. Отметим, что для линейного конфликтно-управляемого процесса (1), (2) $g(t) = e^{At} z_0$, $\Omega(t,\tau) = e^{A(t-\tau)}$, $\varphi(u,v) = u - v$, $z(0) = z_0$, а e^{At} — матричная экспонента.

Лемма 2. Пусть для линейного конфликтно-управляемого процесса (1), (2) множество M выпукло, существует непрерывная положительная функция $r(t)$ и число $l \geq 0$ такие, что $\pi e^{At} U = r(t) S^0$, $M = lS$ и выполнено условие 4, где S — единичный шар пространства L с центром в нуле, а S^0 — его граница. Тогда при $\xi(t) \notin lS$, $t \geq 0$, разрешающая функция $\alpha^*(t,\tau,v)$ является большим положительным корнем квадратного уравнения

$$\left\| \pi e^{A(t-\tau)} v + \gamma(t,\tau) - \alpha \xi(t) \right\| = r(t-\tau) + \alpha l, \ \tau \in [0,t], \ v \in V,$$

относительно $\alpha > 0$, а разрешающая функция $\beta^*(t,\tau,v)$ — большим положительным корнем квадратного уравнения

$$\left\| \pi e^{A(t-\tau)} v + \gamma(t,\tau) - \beta \xi(t) \right\| = r(t-\tau) - \beta l, \ \tau \in [0,t], \ v \in V,$$

относительно $\beta > 0$.

ПРОСТОЕ ДВИЖЕНИЕ

Рассмотрим простое движение

$$\dot{z} = u - v, \ z \in R^n, \ z(0) = z_0, \ v \in V = S,$$

$$u \in U = S^0 \bigcup aS^0, \ a > 1, \ M^* = M = lS, \ M_0 = 0.$$

Здесь S — единичный шар с центром в нуле, S^0 — его граница. Выберем функцию сдвига $\gamma(t,\tau) \equiv 0$. Поскольку $\Omega(t,\tau) = E$, E — единичная матрица, и $\pi = E$, $L = R^n$, имеем $\xi(t) = z_0$. При этом для всех $\psi \in L$, $||\psi|| = 1$, $v \in S$ получаем

$$C(\pi\Omega(t,\tau)\varphi(U,v),\psi) - (\gamma(t,\tau),\psi) = C(U - v,\psi) = C(aS - v,\psi) = a||\psi|| - (v,\psi) > 0.$$

Многозначное отображение $\mathfrak{A}(t,\tau,v)$ не зависит от t, τ и имеет вид

$$\mathfrak{A}(t,\tau,v) = \mathfrak{A}(v, z_0) = \{\alpha \geq 0 : [U - v] \bigcap \alpha[M - z_0] \neq \varnothing\}.$$

Очевидно, что это отображение имеет непустые образы и, таким образом, условие 4 выполнено.

Многозначное отображение $\widetilde{\mathfrak{B}}(t,\tau,v)$ также не зависит от t, τ и имеет вид

$$\widetilde{\mathfrak{B}}(v, z_0) = \{\beta \geq 0 : \beta[lS - z_0] \subset [aS - v]\}.$$

Данное отображение имеет непустые образы.

С учетом леммы 2 для вычисления верхних разрешающих функций $\alpha^*(t,\tau,v) = \alpha^*(v, z_0)$ и $\beta^*(t,\tau,v) = \beta^*(v, z_0)$ воспользуемся соотношениями

$$\alpha^*(v, z_0) = \widetilde{\alpha}^*(v, z_0) = \sup\{\alpha > 0 : ||v - \alpha z_0|| = [a + \alpha l]\},$$

$$\beta^*(v, z_0) = \widetilde{\beta}^*(v, z_0) = \sup\{\beta > 0 : ||v - \beta z_0|| = [a - \beta l]\}.$$

Определив больший положительный корень соответствующего квадратного уравнения, получим

$$\alpha^*(v, z_0) = \frac{(v, z_0) + al + \sqrt{[(v, z_0) + al]^2 + (||z_0||^2 - l^2)(a^2 - ||v||^2)}}{||z_0||^2 - l^2},$$

при этом $\min\limits_{v \in S} \alpha^*(v, z_0) = \dfrac{a-1}{||z_0|| - l}$ достигается для $v = -\dfrac{z_0}{||z_0||}$.

Аналогично найдем формулу для определения $\beta^*(v, z_0)$:

$$\beta^*(v, z_0) = \frac{(v, z_0) - al + \sqrt{[(v, z_0) - al]^2 + (||z_0||^2 - l^2)(a^2 - ||v||^2)}}{||z_0||^2 - l^2},$$

при этом $\min\limits_{v \in S} \beta^*(v, z_0) = \dfrac{a-1}{||z_0|| + l}$ достигается для $v = -\dfrac{z_0}{||z_0||}$.

Легко проверить, что селектор $\gamma_\beta^* = \min\limits_{v \in S} \beta^*(v, z_0)[m_0 - z_0]$, где $m_0 = -l \dfrac{z_0}{||z_0||} \in M$, удовлетворяет условию 2.

В данном примере имеем

$$\int_0^T \inf_{v \in V} \alpha^*(v, z_0) d\tau = \frac{a-1}{||z_0|| - l} T = 1, \; T = \frac{||z_0|| - l}{a-1},$$

$$\int_0^T \inf_{v \in V} \beta^*(v, z_0) d\tau = \frac{a-1}{||z_0|| + l} T = \frac{a-1}{||z_0|| + l} \frac{||z_0|| - l}{a-1} = \frac{||z_0|| - l}{||z_0|| + l} < 1.$$

Следовательно, в силу теоремы 4 игра может быть закончена в момент T.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассматривается проблема сближения управляемых объектов в игровых задачах динамики. Сформулированы достаточные условия окончания игры за конечное гарантированное время в случае, когда условие Понтрягина не выполняется. Введены верхние и нижние разрешающие функции специального типа и на их основе предложены две схемы метода разрешающих функций, обеспечивающих завершение конфликтно-управляемого процесса в классе квазистратегий и контруправлений. Приведен иллюстративный пример.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Метод разрешающих функций в теории конфликтно-управляемых процессов. *Кибернетика и системный анализ*. 2012. Т. 48, № 4. С. 40–64.
2. Чикрий А.А. Верхняя и нижняя разрешающие функции в игровых задачах динамики. *Тр. ИММ УрО РАН*. 2017. Т. 23, № 1. С. 293–305.
3. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. Москва: Наука, 1974. 455 с.
4. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. Москва: Наука, 1988. Т. 2. 576 с.
5. Никольский М.С. Первый прямой метод Л.С. Понтрягина в дифференциальных играх. Москва: Изд-во МГУ, 1984. 65 с.
6. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. Москва: Наука, 1981. 288 с.
7. Hajek O. Pursuit games. New York: Academic Press, 1975. Vol. 12. 266 p.
8. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-valued analysis. Boston; Basel; Berlin: Birkhauser, 1990. 461 p.
9. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. Москва: Мир, 1973. 470 с.
10. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. Москва: Наука, 1974. 480 с.
11. Chikrii A. A. An analytical method in dynamic pursuit games. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.* 2010. Vol. 271. P. 69–85.
12. Chikrii A.A. Multivalued mappings and their selections in game control problems. *Journal of Automation and Information Sciences*. 1995. Vol. 27, N 1. P. 27–38.

13. Pittsyk M.V., Chikrii A.A. On group pursuit problem. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1982. Vol. 46, N 5. P. 584–589.
14. Chikrii A. A., Dzyubenko K. G. Bilinear Markov processes of searching for moving targets. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2001. Vol. 33, N 5–8. P. 62–74.
15. Chikrii A. A., Eidelman S. D. Game problems for fractional quasilinear systems. *Journal Computers and Mathematics with Applications*. 2002. Vol. 44. P. 835–851.
16. Chikrii A. A. Game dynamic problems for systems with fractional derivatives. *Springer Optimization and its Applications*. 2008. Vol. 17. P. 349–387.
17. Пилипенко Ю.В., Чикрий А.А. Колебательные конфликтно-управляемые процессы. *Прикл. математика и механика*. 1993. Т. 57, № 3. С. 3–14.
18. Chikrii A.A. Quasilinear controlled processes under conflict. *Journal of Mathematical Sciences*. 1996. Vol. 80, N 3. P. 1489–1518.
19. Чикрий А.А., Эйдельман С.Д. Игровые задачи управления для квазилинейных систем с дробными производными Римана–Лиувилля. *Кибернетика и системный анализ*. 2001. № 6. С. 66–99.
20. Chikrii A.A. Optimization of game interaction of fractional-order controlled systems. *Optimization Methods and Software*. 2008. Vol. 23, N 1. P. 39–72.
21. Раппопорт И.С. О стробоскопической стратегии в методе разрешающих функций для игровых задач управления с терминальной функцией платы. *Кибернетика и системный анализ*. 2016. Т. 52, № 4. С. 90–102.
22. Chikrii A.A. Conflict controlled processes. Dordrecht; Boston; London: Springer Science and Business Media, 2013. 424 p.
23. Филиппов А.Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования. *Вестн. МГУ. Сер. математика, механика, астрономия, физика, химия*. 1959. № 2. С. 25–32.
24. Половинкин Е.С. Элементы теории многозначных отображений. Москва: Изд-во МФТИ, 1982. 127 с.

Надійшла до редакції 28.03.2019

Й.С. Раппопорт

ДОСТАТНІ УМОВИ ЗБЛИЖЕННЯ КЕРОВАНИХ ОБ’ЄКТІВ В ІГРОВИХ ЗАДАЧАХ ДИНАМІКИ. II

Анотація. Розв’язано задачу зближення керованих об’єктів на основі методу розв’язувальних функцій. Запропоновано нові достатні умови закінчення гри за скінченний гарантований час в разі, коли умова Понтрягіна не виконується. Уведено розв’язувальні функції спеціального типу і на їхній основі розроблено дві схеми методу розв’язувальних функцій, що забезпечують завершення диференціальної гри в класі квазістратегій і контркерувань. Наведено формули для обчислення розв’язувальних функцій. Результати ілюструються на модельному прикладі.

Ключові слова: квазілінійна диференціальна гра, багатозначне відображення, вимірний селектор, стробоскопічна стратегія, розв’язувальна функція.

I.S. Rappoport

SUFFICIENT CONDITIONS OF APPROACH OF THE CONTROLLED OBJECTS IN DYNAMIC GAME PROBLEMS. II

Abstract. The problem of approach of control objects is solved on the basis of the method of resolving functions. New sufficient conditions for game termination in a finite guaranteed time are proposed for the case where the Pontryagin condition is not satisfied. Resolving functions of special type are introduced and are used to develop two schemes of the method of resolving functions that ensure termination of the differential game in the class of quasi-strategies and counter-controls. The formulas for calculating the resolving functions are given. The results are illustrated by a model example.

Keywords: quasilinear differential game, multivalued mapping, measurable selector, stroboscopic strategy, resolving function.

Раппопорт Иосиф Симович,
кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: jeffrappoport@gmail.com.