

МЕТОД ЛОКАЛИЗАЦИИ НУЛЕЙ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НА ОСНОВЕ ОПЕРАТОРА КРАВЧИКА

Аннотация. Рассмотрена задача локализации нулей аналитических функций с помощью оператора Кравчика. Получены формулы для вычисления образа оператора Кравчика для аналитических функций. На основании этого предложен новый алгоритм локализации нулей. Применение метода продемонстрировано на численных примерах, включая поиск нулей дзета-функции Римана.

Ключевые слова: нелинейное уравнение, аналитическая функция, локализация корней, оператор Кравчика, разложение в ряд Тейлора.

ВВЕДЕНИЕ

Задача локализации корней систем нелинейных уравнений имеет большое практическое значение для поиска точек экстремумов функций, приближенного решения нелинейных дифференциальных и интегральных уравнений, определения параметров акустических сигналов, исследования устойчивости динамических систем. Для решения этой задачи не существует общих (универсальных) методов. Критерий Кравчика [1] зарекомендовал себя в качестве эффективного критерия для локализации нулей нелинейных отображений [2]. Так, методы ветвей и границ, основанные на операторе Кравчика, являются более эффективными по вычислительным затратам в сравнении с модификациями, основанными на теореме Канторовича [3]. В настоящей статье рассмотрено применение оператора Кравчика к локализации нулей аналитических функций.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим уравнение

$$f(z) = 0, \quad (1)$$

где f — аналитическая функция на двумерном интервале $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$.

Положим $z = x_1 + ix_2$. Тогда уравнение (1) эквивалентно системе уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0, \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

на интервале $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, где $f_1(x_1, x_2) = \operatorname{Re} f(z)$ и $f_2(x_1, x_2) = \operatorname{Im} f(z)$. Используем для двумерных векторов обозначения $x = (x_1, x_2)$ и $F(x) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$, а для сторон и диагонали прямоугольника (интервала) D — обозначения $l_1 = 0.5(b_1 - a_1)$, $l_2 = 0.5(b_2 - a_2)$, $l = \sqrt{l_1^2 + l_2^2}$.

Согласно определению из [1] оператор Кравчика на интервале D задается следующей формулой:

$$K(D) = x^{(0)} - [F'(x^{(0)})]^{-1} F(x^{(0)}) + (I - [F'(x^{(0)})]^{-1} F(x^{(0)}, D))(D - x^{(0)}), \quad (3)$$

где $x^{(0)}$ — некоторая точка внутри D ; $F(x^{(0)}, D)$ — интервальная функция приращения [3] отображения F для n -мерного интервала D по отношению к точке $x^{(0)}$.

Как известно [3], оператор Кравчика (3) может быть использован для проверки наличия нуля отображения $F(x)$ внутри заданной области. Например, выполнение условия

$$K(D) \subset D$$

гарантирует наличие единственного нуля отображения $F(x)$ в области D . Аналогично выполнение условия $K(D) \cap D = \emptyset$ означает отсутствие корней внутри D .

Цель настоящей статьи — получение формул для вычисления образа оператора Кравчика $K(D)$ для уравнения (1) и последующее применение полученных формул оператора Кравчика для локализации нулей функции $f(z)$.

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПЕРАТОРА КРАВЧИКА

Теорема 1. Пусть аналитическая функция $f(z)$ задана на интервале $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ с центром $z_0 = x_1^{(0)} + ix_2^{(0)}$, а L_p является ограничением для p -й производной функции $f(z)$:

$$|f^{(p)}(z)| \leq L_p \quad \forall z \in D \quad (4)$$

для некоторого p . Тогда образ оператора Кравчика может быть вычислен следующим образом:

$$K(D) = \begin{pmatrix} [x'_1 - \sigma, x'_1 + \sigma] \\ [x'_2 - \sigma, x'_2 + \sigma] \end{pmatrix},$$

где

$$x'_1 = \operatorname{Re} \{z_0 - f(z_0) / f'(z_0)\}, \quad x'_2 = \operatorname{Im} \{z_0 - f(z_0) / f'(z_0)\},$$

$$\sigma = \frac{M(|\operatorname{Re} f'(z_0)| + |\operatorname{Im} f'(z_0)|)(l_1 + l_2)}{|f'(z_0)|^2},$$

$$M = \sum_{k=1}^{p-2} \frac{|f^{(k+1)}(z_0)| l^k}{(k+1)!} + \frac{|L_p| l^{p-1}}{p!}.$$

Доказательство выполняется в несколько этапов.

Этап 1. Ключевым моментом является вычисление интервального приращения $F(x^{(0)}, D)$. Согласно [3] $F(x^{(0)}, D)$ является интервальным расширением матрицы $G(x^{(0)}, x)$, где

$$F(x) - F(x^{(0)}) = G(x^{(0)}, x)(x - x^{(0)}).$$

Благодаря специфике рассматриваемой системы имеем

$$G(x^{(0)}, x) = \begin{bmatrix} \operatorname{Re} g(z_0, z) & \operatorname{Im} g(z_0, z) \\ -\operatorname{Im} g(z_0, z) & \operatorname{Re} g(z_0, z) \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где

$$g(z_0, z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Таким образом, необходимо найти интервальные расширения функций $\operatorname{Re} g(z_0, z)$ и $\operatorname{Im} g(z_0, z)$. Используя разложение Тейлора, получаем

$$\operatorname{Re} g(z_0, z) \in [\operatorname{Re} g(z_0, z) - M, \operatorname{Re} g(z_0, z) + M],$$

где

$$M = \sum_{k=1}^{p-2} \frac{|g^{(k)}(z_0, z_0)| l^k}{k!} + \frac{\max_{z \in D} |g^{(p-1)}(z, z_0)| l^{p-1}}{(p-1)!}.$$

Используя определение $g(z, z_0)$ и применяя разложение в ряд Тейлора функции $f(z)$, нетрудно показать, что

$$\frac{g^{(k)}(z_0, z_0)}{k!} = \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}.$$

С учетом этой формулы получим искомые выражения

$$\operatorname{Re} g(z_0, z) \in [\operatorname{Re} f'(z_0) - M, \operatorname{Re} f'(z_0, z) + M]$$

и

$$\operatorname{Im} g(z_0, z) \in [\operatorname{Im} f'(z_0) - M, \operatorname{Im} f'(z_0, z) + M],$$

где

$$M = \sum_{k=1}^{p-2} \frac{|f^{(k+1)}(z_0)| l^k}{(k+1)!} + \frac{L_p l^{p-1}}{p!}. \quad (6)$$

Таким образом, найдено выражение для интервального расширения (5):

$$F(x^{(0)}, D) = \begin{pmatrix} I_1 & -I_2 \\ I_2 & I_1 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где

$$I_1 = [\operatorname{Re} f'(z_0) - M, \operatorname{Re} f'(z_0) + M],$$

$$I_2 = [\operatorname{Im} f'(z_0) - M, \operatorname{Im} f'(z_0) + M]$$

и M задается формулой (6).

Этап 2. Обратную матрицу Якоби отображения $F(x)$ представим как

$$[F'(x^{(0)})]^{-1} = \frac{1}{|f'(z_0)|^2} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f'(z_0) & \operatorname{Im} f'(z_0) \\ -\operatorname{Im} f'(z_0) & \operatorname{Re} f'(z_0) \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Этап 3. Объединив (7) и (8), с учетом правил интервальной арифметики [5] получим следующее выражение:

$$[F'(x^{(0)})]^{-1} F(x^{(0)}, D) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{M(|\operatorname{Re} f'(z_0)| + |\operatorname{Im} f'(z_0)|)}{|f'(z_0)|^2} \times [-1, 1] & \frac{M(|\operatorname{Re} f'(z_0)| + |\operatorname{Im} f'(z_0)|)}{|f'(z_0)|^2} \times [-1, 1] \\ \frac{M(|\operatorname{Re} f'(z_0)| + |\operatorname{Im} f'(z_0)|)}{|f'(z_0)|^2} \times [-1, 1] & 1 + \frac{M(|\operatorname{Re} f'(z_0)| + |\operatorname{Im} f'(z_0)|)}{|f'(z_0)|^2} \times [-1, 1] \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Этап 4. Поскольку

$$D - x^{(0)} = \begin{pmatrix} [-l_1, l_1] \\ [-l_2, l_2] \end{pmatrix},$$

с учетом формулы (9) получим

$$\begin{aligned} (I - [F'(x^{(0)})]^{-1} F(x^{(0)}, D))(D - x^{(0)}) &= \\ &= \frac{M(|\operatorname{Re} f'(z_0)| + |\operatorname{Im} f'(z_0)|)(l_1 + l_2)}{|f'(z_0)|^2} \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10)$$

Отметим, что

$$x^{(0)} - [F'(x^{(0)})]^{-1} F(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \{z_0 - f(z_0)/f'(z_0)\} \\ \operatorname{Im} \{z_0 - f(z_0)/f'(z_0)\} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Объединив формулы (9) и (10), получим утверждение доказываемой теоремы. Заметим, что параметр M соотносится с параметром M_0 , определяемым по формуле

$$M_0 = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{|f^{(k)}(z_0)| l^k}{k!} + \frac{L_p l^p}{p!}. \quad (12)$$

Выполнение условия (см. [6])

$$|f(z_0)| > M_0 \quad (13)$$

является достаточным для утверждения отсутствия нулей у функции $f(z)$ на интервале D .

Из сопоставления (6) и (12) видно, что параметр M может быть выражен через M_0 по формуле

$$M = \frac{M_0}{l} - |f'(z_0)|. \quad (14)$$

Во многих практических задачах достаточно ограничиться поиском только действительных корней уравнения (1). Поэтому переформулируем основной результат применительно к поиску действительных корней уравнения (1).

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ задана на интервале $D = [a, b]$ с центром x_0 и длиной $b - a = 2l$. Пусть также L_p — ограничение для p -й производной функции $f(x)$:

$$|f^{(p)}(x)| \leq L_p \quad \forall x \in D$$

для некоторого p . Тогда образ оператора Кравчика может быть вычислен как

$$K(D) = [x'_1 - \sigma, x'_1 + \sigma],$$

где

$$x'_1 = x_0 - f(x_0) / f'(x_0),$$

$$\sigma = \frac{Ml}{|f'(x_0)|}, \quad M = \sum_{k=1}^{p-2} \frac{|f^{(k+1)}(x_0)| l^k}{(k+1)!} + \frac{L_p l^{p-1}}{p!}.$$

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 1.

3. АЛГОРИТМ ПОИСКА КОРНЕЙ

Для локализации и вычисления всех корней уравнения (1) на интервале $D = [a_1; b_1] \times [a_2; b_2]$ используем следующий алгоритм.

Входные данные: константа L_p в ограничении (4); ε — минимальный размер анализируемого интервала.

Выходные данные: список List1 интервалов, содержащих изолированные корни уравнения (1); список List2 интервалов с размером меньше ε , содержащих корни, которые не попали в список List1 (данный список предназначен для близких и кратных корней).

В начале работы алгоритма выполняется присвоение $D_0 = D$.

1. Если размер интервала D_0 меньше ε , то он заносится в список List2.

2. Вычисляется параметр M_0 по формуле (12). Проверяется условие (13). Если оно выполнено, интервал D_0 исключается из рассмотрения. В противном случае происходит переход к п. 3.

3. Вычисляется параметр M по формуле (14). Затем находится образ оператора Кравчика $K(D_0)$. Если выполнено условие $K(D_0) \cap D_0 = \emptyset$, интервал D_0 исключается из рассмотрения. В противном случае происходит переход к п. 4.

4. Проверяется условие $K(D_0) \subset D_0$. Если оно выполнено, интервал D_0 заносится в список List1. Значение корня уточняется одним из итеративных методов, например методом Ньютона. Начальным значением является $z_1' = z_0 - f(z_0)/f'(z_0)$, которое вычислялось при подсчете образа оператора Кравчика.

5. Интервал D_0 заменяется следующим образом: $D_0 \cap K(D_0)$.

6. Интервал D_0 разбивается на две части: $D_{0,1}$ и $D_{0,2}$ вдоль стороны интервала с наибольшей длиной. Пусть индекс k_0 соответствует наибольшей стороне интервала D_0 , т.е. $k_0 = \operatorname{argmax}_{k=1,2} \{b_k - a_k\}$. Тогда

$$D_{0,1} = [a_1; b_1] \times \dots \times [a_{k_0}; 0.5(a_{k_0} + b_{k_0})] \times \dots \times [a_2; b_2],$$

$$D_{0,2} = [a_1; b_1] \times \dots \times [0.5(a_{k_0} + b_{k_0}); b_{k_0}] \times \dots \times [a_2; b_2].$$

7. Для каждого интервала ($D_{0,1}$ и $D_{0,2}$) выполняется возврат к п. 1 с последующими действиями.

3.1. Поиск корней полиномиального уравнения. Рассмотрим пример из работы [4]. Ставится задача нахождения комплексных корней полиномиального уравнения порядка $p = 20$:

$$f(z) = a_1 z^p + a_2 z^{p-1} + a_3 z^{p-2} + \dots + a_p z + a_{p+1}$$

на интервале $[-1; 1] \times [-1; 1]$ при значениях коэффициентов $a_1, \dots, a_{p+1} = \{1, -1.1393, 0.5349, -0.0410, -0.2504, 0.1918, 0.2011, -0.1661, 0.2718, -0.2167, -0.0258, -0.1373, 0.0553, 0.1214, 0.0603, 0.0735, -0.2053, 0.1263, -0.0060, -0.0707, 0.0761\}$. Очевидно, что в этом случае ограничение (4) принимает вид $L_p = a_1 p!$.

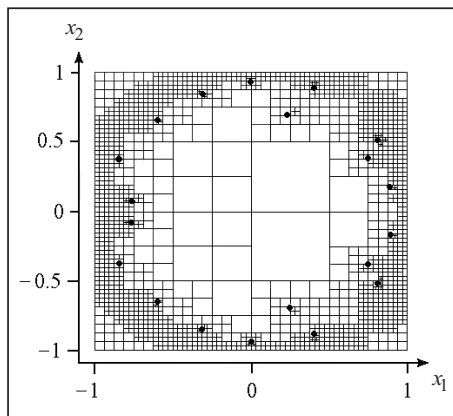


Рис. 1. Разбиение исходного интервала предложенным методом для нахождения корней полинома 20-го порядка

Следует отметить, что поиск сугубо действительных корней, основанный на теореме 2, диагностировал их отсутствие на интервале $[-1; 1]$ с использованием 10 разбиений.

3.2. Поиск корней дзета-функции Римана. Рассмотрим поиск корней дзета-функции Римана

$$\zeta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z}. \quad (15)$$

Функция $\zeta(z)$ является аналитической при $\operatorname{Re}(z) > 1$. Известно, что она может быть аналитически продолжена на всю комплексную плоскость, за исключением точки $z = 1$, в которой эта функция имеет полюс первого порядка.

Для локализации корней данного уравнения использовался описанный выше алгоритм. Для применения предложенного алгоритма потребовалось 1159 разбиений исходного интервала (по сравнению с 1203 разбиениями при использовании теста, основанного на теореме Канторовича [4]). Такой результат согласуется с выводами работы [3], где показано, что тест Кравчика обладает более высокой точностью локализации корней по сравнению с тестом Канторовича. Разбиение исходного интервала, полученного предложенным алгоритмом локализации корней, отражено на рис. 1. Пустые прямоугольники соответствуют областям, в которых корни отсутствуют, а найденные корни отмечены точками в соответствующих прямоугольниках.

Вначале рассмотрим поиск нулей функции $\zeta(z)$ на интервале $[0.4; 0.6] \times [1000; 1100]$. Для применения предложенного метода выбрано ограничение второго порядка, $p=2$. Ввиду сложности аналитической оценки представим параметр L_2 следующим образом:

$$L_2 = \alpha \{ |\zeta(c_1 + id_1)|, |\zeta(c_1 + id_2)|, |\zeta(c_2 + id_1)|, |\zeta(c_2 + id_2)| \},$$

где $\alpha > 1$ — эмпирически подобранная константа. Это значит, что для каждого текущего двумерного интервала D_0 в качестве ограничения берется максимальное значение модуля второй производной по вершинам интервала, увеличенное в α раз. Отметим, что значение $\alpha = 5$ является достаточным, т.е. дальнейшее увеличение параметра L_2 не приводит к нахождению дополнительных корней. Подобный способ уже использовался нами в работе [6].

Применение предложенного алгоритма поиска корней позволило определить 81 нуль функции $\zeta(z)$ (см. (15)) на интервале $[0.4; 0.6] \times [1000; 1100]$. Для этого потребовалось выполнить 4217 разбиений исходного интервала, что меньше числа аналогичного разбиений (4303), необходимого для локализации нулей на основе теоремы Канторовича [4]. Мнимые части найденных корней приведены в табл. 1. Найденные нули находятся в соответствии с известными списками нулей дзета-функции Римана (см., например, <http://www.lmfdb.org/zeros/zeta/> или http://www.dtc.umn.edu/~odlyzko/zeta_tables/index.html).

Таблица 1

Номера корней	Мнимые части корней дзета-функции Римана на интервале $[0.4; 0.6] \times [1000; 1100]$									
	1–9	1001.349	1002.404	1003.268	1004.675	1005.543	1008.007	1008.796	1009.807	1010.570
10–18	1012.410	1013.059	1014.690	1016.060	1017.266	1018.606	1019.912	1020.917	1021.544	
19–27	1022.885	1025.266	1025.708	1027.468	1028.129	1029.227	1030.897	1031.833	1032.813	
28–36	1034.613	1036.196	1037.025	1038.088	1039.077	1040.264	1041.622	1043.624	1044.515	
37–45	1045.107	1047.090	1047.987	1048.954	1049.996	1051.577	1053.246	1054.781	1055.002	
46–54	1056.689	1057.100	1059.134	1060.140	1061.501	1062.915	1064.072	1065.122	1066.463	
55–63	1067.419	1067.990	1070.535	1071.619	1072.544	1073.570	1074.748	1076.267	1076.924	
64–72	1078.647	1079.810	1081.171	1082.953	1083.295	1084.183	1085.648	1086.912	1088.756	
73–81	1089.795	1090.863	1091.728	1093.441	1094.284	1095.433	1096.402	1098.841	1099.361	

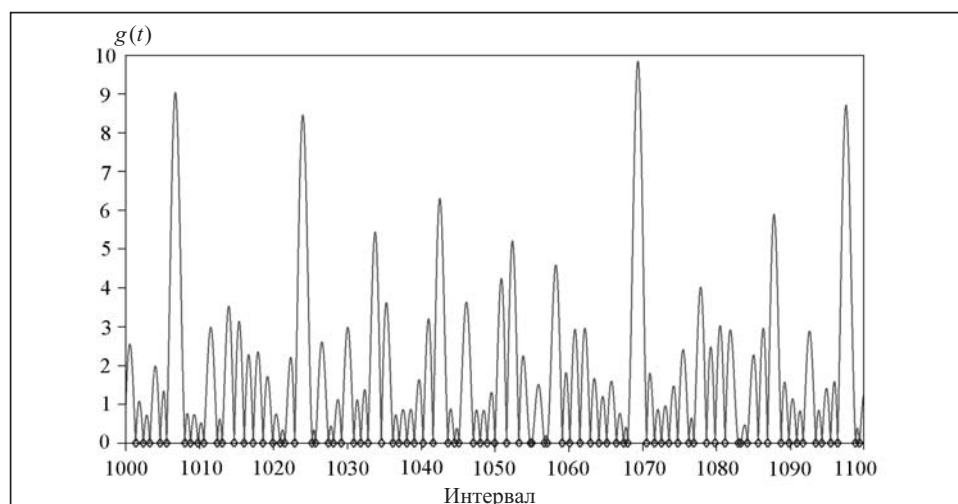


Рис. 2. График функции $g(t) = |\zeta(0.5 + it)|$ с нанесенными нулями

На рис. 2 показан график функции $g(t) = |\zeta(0.5 + it)|$ на интервале [1000; 1100] с нанесенными нулями, найденными предложенным алгоритмом.

Заметим, что в данном исследовании не анализировалось влияние погрешностей округления на качество локализации корней. Это является предметом для дальнейшего исследования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье рассмотрено применение оператора Кравчика к локализации корней аналитических функций. Основным результатом статьи — получение эффективного численного алгоритма локализации корней, основанного на операторе Кравчика. Эффективность применения предложенного метода продемонстрировано на примерах поиска комплексных нулей полиномиальной функции и дзета-функции Римана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Moore R.E. A test for existence of solutions to nonlinear systems. *SIAM J. Numer. Anal.* 1977. Vol. 14. P. 611–615.
2. Семенов В.Ю. Метод нахождения всех корней системы нелинейных алгебраических уравнений, основанный на операторе Кравчика. *Кибернетика и системный анализ*. 2015. Т. 51, № 5. С. 169–175.
3. Neumaier A., Zuhe S. The Krawczyk operator and Kantorovich theorem. *J. Math. Anal. Applications*. 1990. Vol. 149, N 2. P. 437–443.
4. Semenov V. Method for the calculation of all zeros of an analytic function based on the Kantorovich theorem. *Comput. Methods Appl. Math.* 2014. N 3. P. 385–392.
5. Kearfott R.B. Rigorous global search: Continuous problems. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996. 264 p.
6. Semenov V. Method for the calculation of all non-multiple zeros of an analytic function. *Comput. Methods Appl. Math.* 2011. N 1. P. 67–74.

Надійшла до редакції 04.04.2018

В.Ю. Семенов, Є.В. Семенова

МЕТОД ЛОКАЛІЗАЦІЇ НУЛІВ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ НА ОСНОВІ ОПЕРАТОРА КРАВЧИКА

Анотація. Розглянуто задачу локалізації нулів аналітичних функцій. Для її розв'язання застосовано оператор Кравчика. Отримано формули для обчислення образу оператора Кравчика для аналітичних функцій. Запропоновано новий алгоритм локалізації нулів. Застосування методу продемонстровано на чисельних прикладах включно з пошуком нулів дзета-функції Рімана.

Ключові слова: нелінійне рівняння, аналітична функція, локалізація коренів, оператор Кравчика, розвинення у ряд Тейлора.

V.Yu. Semenov, E.V. Semenova

METHOD FOR LOCALIZATION OF ZEROS OF ANALYTIC FUNCTIONS BASED ON KRAWCZYK OPERATOR

Abstract. Localization of zeros of analytic functions is considered. For this purpose, Krawczyk operator is used. The formulas for calculation of Krawczyk operator are derived. As a result, algorithm for localization of zeros is proposed. Application of the method is shown by numerical examples including search of zeros for Riemann zeta function.

Keywords: nonlinear equation, analytic function, root localization, Krawczyk operator, Taylor's expansion.

Семенов Василий Юрьевич,

кандидат физ.-мат. наук, начальник отдела Научно-производственного предприятия «ДЕЛЬТА СПЕ», Киев, e-mail: vasy1.delta@gmail.com.

Семенова Евгения Викторовна,

кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института математики НАН Украины, Киев, e-mail: semenovaevgen@gmail.com.