УДК 519.1:512.643

М.Ф. СЕМЕНЮТА, В.А. ШУЛЬГИН

МАТРИЦЫ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С *D*-ДИСТАНЦИОННЫМИ МАГИЧЕСКИМИ ГРАФАМИ, И ИХ СВОЙСТВА

Аннотация. Рассмотрены матрицы, ассоциированные с D-дистанционными магическими графами. Получены результаты относительно спектральных свойств этих матриц. Доказано, что если два графа G и H одинакового порядка имеют подобные дистанционные матрицы A_{D_1} и A_{D_2} соответственно, то граф G является D_1-дистанционным магическим тогда и только тогда, когда H будет D_2-дистанционным магическим графом. Графы G и H названы магическими дистанционно-подобными и доказано, что их дистанционные магические постоянные совпадают.

Ключевые слова: D-окрестность, D-дистанционная магическая разметка, D-дистанционная матрица, матрица разметки, D-дистанционная магическая матрица.

ВВЕДЕНИЕ

Первые публикации о разметках графов появились в середине 60-х годов прошлого столетия. Мотивацией к зарождению этого направления исследований послужил ряд причин. Одна из них, связанная с поиском методов решения гипотезы Г. Рингеля о разложении полного графа K_{2n+1} на $2n+1$ подграфов, каждый из которых изоморфен дереву размера n, обусловила возникновение понятия грациозной и ей подобной разметок графов. Магический и антимагический типы разметок первоначально введены как инструмент для использования магических квадратов, магических прямоугольников, массивов Коцига в теории графов. Полный обзор публикаций, посвященных разметкам графов, представлен Д. Галлианом в электронном журнале «A dynamic survey of graph labeling» [1]. Журнал ежегодно переиздается и пополняется сведениями о новых результатах исследований. Этот раздел теории графов продолжает интенсивно развиваться. Популярность данной тематики объясняется широким кругом применений теории разметок. Например, моделирование сложных систем графами большой размерности относится к актуальной современной проблеме. Существует способ кодировки структуры таких графов, связанный с наличием избыточной информации о локальных его частях, в том числе сведений об окрестностях вершин подграфов заданного графа. Некоторые из вершинных разметок являются полезными в этой ситуации, среди них — D-дистанционная магическая разметка.

В этой работе будем рассматривать конечные неориентированные графы, не содержащие кратных ребер и петель. В общем виде определение разметки графа можно сформулировать так: разметка f графа $G=(V, E)$ представляет собой биективное или инъективное отображение множества элементов графа G на множество чисел (чаще натуральных или целых), которое удовлетворяет определенным условиям. Эти условия зависят от типа разметки. Если она относится к магическому типу, то дополнительно на V или E вводится весовая функция, принимающая одинаковые значения для каждого элемента соответствующего множества. Кроме того, разметки разделяют на вершинные, реберные, тотальные в зависимости от области определения функции f. Далее речь пойдет о D-дистанционной магической разметке, являющейся вершинной разметкой магического типа. Она представляет собой обобщение понятия дистанционной магической разметки, известной также как Σ разметка и 1-вершинная магическая разметка [2–5]. В дистанционном магическом графе $G=(V, E)$ метками вершин служат числа от единицы до $|V|$, а вес вершины определяется как сумма меток смежных ей вершин и все вершины имеют одинаковый вес. Для D-дистанционного магического графа множество смежности вершины расширено на ее D-окрестность, где $D \subset \{0,1,2,\ldots, d\}$, $d=\operatorname{diam}(G)$ — диаметр графа G. Впервые D-дистанционная магическая разметка предложена в работе [6].

Зачастую удобно иметь дело не с размеченным графом, а с его матричными представлениями. Матрицы разметки описаны в работах [5–9]. Авторы работы [6] применили матричный анализ при решении проблемы существования D-дистанционной магической разметки (D, r)-регулярного графа. В [7] получены некоторые результаты относительно связи между закрытой дистанционной магической разметкой графа и его спектром. В этой статье исследованы свойства матриц, ассоциированных с D-дистанционными магическими графами.

ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Множество всех вершин графа $G=(V, E)$, смежных с некоторой вершиной $v \in V$, называют (открытым) множеством смежности вершины v и обозначают $N(v)$. Вершина v вместе с $N(v)$ образуют закрытое множество смежности v, которое обозначим $N[v]$, т.е. $N[v]=\{v\} \cup N(v)$.

Пусть задано множество $D \subset \{0,1,2,\ldots, d\}$, где $d=\operatorname{diam}(G)$. D-окрестность вершины $v \in V(G)$ обозначается $N_D(v)$ и представляет собой множество всех вершин $u \in V(G)$, находящихся на расстоянии $d(u, v) \in D$ от вершины v, т.е. $N_D(v)=\{u \in V(G): d(u, v) \in D\}$. Таким образом, $N_{\{1\}}(v)=N(v)$ и $N_{\{0,1\}}(v)=N[v]$.

Рассмотрим некоторое множество (или, в общем случае, мультимножество) $M=\{m_1, m_2, \ldots, m_n\} \subset R$, состоящее из действительных чисел, и вершинную разметку $f: V(G) \to M$ для графа $G=(V, E)$ порядка n, где f — биекция. Под весом подмножества $S \subset V(G)$ при разметке f понимают число $w(S)=\sum_{u \in S} f(u)$, где суммирование производится по всем $u \in S$. Вес $w(v)$ (или $w_f(v)$) вершины v для разметки f определяется как сумма меток вершин D-окрестности вершины v, то есть $w(v)=\sum_{u \in N_D(v)} f(u)$, где $v \in V(G)$. В таком случае $w(N_D(v))=w(v)$. В дальнейшем нас будет интересовать множество $M=\{1,2, \ldots, n\}$.

Определение 1 [6]. Граф G порядка n называют D-вершинно-магическим или D-дистанционным магическим, если существует биекция $f: V(G) \to \{1,2,\ldots, n\}$ и такая постоянная k, что для каждой вершины $v \in V(G)$ имеем $w(v)=k$. Число k называют D-дистанционной (или дистанционной) магической постоянной разметки f.

При $D=\{1\}$ разметку f графа G называют дистанционной магической или Σ-разметкой, а при $D=\{0,1\}$ — Σ'-разметкой. Также используют термин «l-вершинная магическая» разметка, если G является D-дистанционным магическим графом и $D=\{l\}$, где $0<l<d$.

Обозначим M_n множество $n \times n$ матриц с элементами из множества действительных чисел R. Пусть $A=(a_{ij}) \in M_n$. В следующих разделах на M_n будем использовать максимальную строчную норму, которая определяется формулой $\|A\|_\infty \equiv \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

Под спектром $\sigma(A)$ матрицы A понимают совокупность всех ее собственных значений $\lambda \in C$, где C — множество комплексных чисел. Спектральный радиус матрицы A — это неотрицательное действительное число $\rho(A)=\max\{|\lambda|: \lambda \in \sigma(A)\}$.

Одной из матричных интерпретаций графа $G=(V,E)$ порядка n является матрица смежности вершин $A_{n\times n}=(a_{ij})$, где $a_{ij}=1$, если вершины u_i, u_j смежные в G, иначе $a_{ij}=0$. Матрица смежности A — симметричная, поэтому ее спектр, а следовательно и спектр графа G содержит n действительных собственных значений $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \ldots \ge \lambda_n$, принадлежащих отрезку $[-\lambda_1, \lambda_1]$, где спектральный радиус матрицы A — наибольшее действительное собственное значение $\lambda_1=\rho(A)$, называемое индексом графа G [10]. Напомним основные свойства спектра $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ графа G порядка n:

1) $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$;

2) $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \deg(v_i)$, где $\deg(v_i)$ — степень вершины $v_i \in V(G)$;

3) $\delta \le \lambda_1 \le \Delta$, где $\delta = \min\limits_{v_i \in V(G)} \deg(v_i)$ и $\Delta = \max\limits_{v_i \in V(G)} \deg(v_i)$;

4) $\sqrt{\Delta} \le \lambda_1 \le \Delta$.

ДИСТАНЦИОННАЯ МАТРИЦА ГРАФА И ЕЕ СВОЙСТВА

Обозначим $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ множество вершин графа G порядка n. Пусть $D \subset \{0, 1, 2, \ldots, d\}$, где $d=\operatorname{diam}(G)$. Под D-дистанционной (или дистанционной) матрицей графа G понимают $n\times n$ бинарную матрицу $A_D=(a_{ij}^D)$ с элементами $a_{ij}^D=1$ тогда и только тогда, когда $d(u_i, u_j) \in D$, где $u_i, u_j \in V(G)$, в остальных случаях $a_{ij}^D=0$.

Нетрудно убедиться, что матрица A_D симметричная, т.е. $A_D = A_D^{\mathrm{T}}$, сумма ее элементов в i-й строке равна мощности множества $N_D(u_i)$ и $\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum\limits_{i=1}^{n} |N_D(u_i)|$. Если $D=\{1\}$, тогда $A_D=A$; если $D=\{0,1\}$, тогда $A_D=A+E$, где A — матрица смежности графа G, E — единичная матрица. В общем случае дистанционную матрицу представим в виде суммы специальных квадратных матриц A_s порядка n: $A_D = A + A_1 + \ldots + A_{d-1} + E$, если $0 \in D$ и $A_D = A + A_1 + \ldots + A_{d-1}$, если $0 \notin D$, где $A_s = (a_{ij}^{(s)}) \in M_n$ и $a_{ij}^{(s)}=1$ при $d(u_i, u_j) = s+1 \in D$, иначе $a_{ij}^{(s)}=0$, $s=1,2,\ldots, d-1$.

Определение 2 [6]. Граф G порядка n называют (D, r)-регулярным, если для любой вершины $v_i \in V(G)$ и каждого $i=1,2,\ldots,n$ выполняется равенство $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^D = r$, когда $0 \notin D$ и $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^D = r+1$, когда $0 \in D$, где $A_D=(a_{ij}^D)$ — дистанционная матрица графа G, т.е. все D-окрестности имеют одинаковую мощность.

Пусть задан граф G и биекция $f: V(G) \to \{1, 2, \ldots, n\}$. Рассмотрим матричное уравнение

$$A_D X = kI, \tag{1}$$

где $X = (f(u_1)\, f(u_2) \ldots f(u_n))^{\mathrm{T}}$ — матрица меток, представляющая собой перестановку чисел $1, 2, \ldots, n$, $I=(1\,1\,\ldots\,1)^{\mathrm{T}}$, $k=\mathrm{const}$ — натуральное число. Очевидно, что f будет D-дистанционной магической разметкой графа G, если существует перестановка X^0 и число k_0, удовлетворяющие уравнению (1). В [5] доказана единственность магической постоянной для любого дистанционного магического графа. Эта же техника доказательства приводит к аналогичному результату для D-дистанционного магического графа. Предположим, что граф G допускает две D-дистанционные магические разметки f и g с соответствующими дистанционными магическими постоянными k_1 и k_2. Согласно (1) имеем $A_D X = k_1 I$ и

$A_D Y = k_2 I$, где $Y = (g(u_1)\ g(u_2)\ \dots\ g(u_n))^{\mathrm{T}}$. Матрица $Y^{\mathrm{T}} A_D X$ состоит из одного элемента, поэтому $Y^{\mathrm{T}} A_D X = (Y^{\mathrm{T}} A_D X)^{\mathrm{T}} = X^{\mathrm{T}} A_D Y$. Из этого следует, что $k_1 Y^{\mathrm{T}} I = k_2 X^{\mathrm{T}} I$ или $k_1 (1+2+\dots+n) = k_2 (1+2+\dots+n)$. Таким образом, $k_1 = k_2$. Доказательство этого факта в терминах дробного доминирования представлено в [8].

Каждому помеченному графу G единственным образом ставится в соответствие матрица A_D. Однако обратное утверждение неверно. Две дистанционные матрицы A_{D_1} и A_{D_2} являются подобными, если существует матрица перестановки P такая, что $A_{D_1} = P^{-1} A_{D_2} P$. В этом случае будем говорить, что A_{D_1} и A_{D_2} принадлежат одному классу подобных матриц. Неизоморфные графы одинакового порядка могут иметь подобные дистанционные матрицы. Для них справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть G и H — графы порядка n с подобными дистанционными матрицами A_{D_1} и A_{D_2} соответственно. Граф G является D_1-дистанционным магическим тогда и только тогда, когда H — D_2-дистанционный магический граф.

Доказательство. Пусть даны два графа G и H порядка n с дистанционными матрицами A_{D_1} и A_{D_2}, принадлежащими одному и тому же классу подобных матриц. Преобразование подобия будем осуществлять посредством матрицы перестановки P. Следовательно, $A_{D_1} = P^{-1} A_{D_2} P$.

Предположим, что f — D_1-дистанционная магическая разметка графа G, т.е. существует перестановка X^0 и число k_0, удовлетворяющие уравнению (1): $A_{D_1} X^0 = k_0 I$. Воспользовавшись подобием матриц A_{D_1} и A_{D_2}, получим $P^{-1} A_{D_2} P X^0 = k_0 I$. Умножим последнее равенство слева на P, это приведет его к виду $A_{D_2} P X^0 = k_0 P I$, где $PI = I$, $PX^0 = X^{0*}$ и $(X^{0*})^{\mathrm{T}}$ — одна из перестановок чисел 1, 2, …, n. В результате имеем $A_{D_2} X^{0*} = k_0 I$. Из этого следует, что существует перестановка $(X^{0*})^{\mathrm{T}}$, которая задает D_2-дистанционную магическую разметку графа H с магической постоянной k_0. Аналогичные рассуждения приводят к доказательству обратного утверждения. Теорема доказана.

Графы с подобными дистанционными матрицами назовем дистанционно-подобными. Очевидно, для дистанционно-подобных (D_1, r_1)- и (D_2, r_2)-регулярных графов $r_1 = r_2$. Если графы G и H имеют подобные дистанционные матрицы и являются D_1-, D_2-дистанционными магическими, тогда их назовем магически-ми дистанционно-подобными.

Следствие 1. Для любых магических дистанционно-подобных графов их дистанционные магические постоянные совпадают.

Доказательство. Рассмотрим два D_1-, D_2-дистанционных магических графа G и H соответственно. Предположим, что они являются дистанционно-подобными. Из доказательства теоремы 2 следует, что для G и H существуют D_1-, D_2-дистанционные магические разметки с равными дистанционными магическими постоянными. Из единственности дистанционной магической постоянной для каждого отдельного графа вытекает верность утверждения следствия. Следствие 1 доказано.

Графы G и H, представленные на рис. 1, имеют равные соответствующие дистанционные матрицы A_{D_1} и A_{D_2}, где $D_1 = \{1\}$, $D_2 = \{1, 2\}$:

$$A_{D_1} = A_{D_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

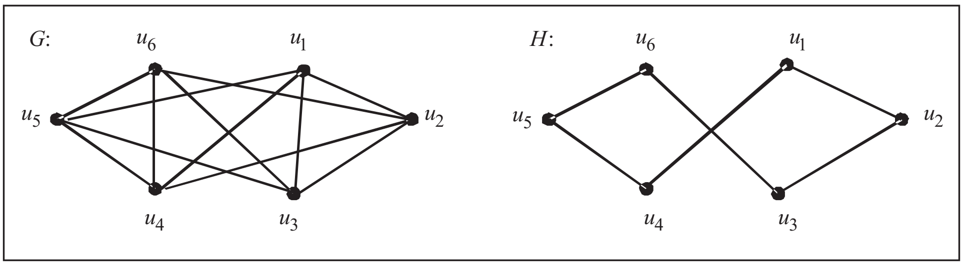

Рис. 1. Граф G — $\{1\}$-дистанционный магический, граф H — $\{1, 2\}$-дистанционный магический

Несложно заметить, что биекция $f : f(u_i) = i$, $i = 1, \ldots, 6$, порождает D_1-дистанционную магическую разметку графа G и D_2-дистанционную магическую разметку графа H. Дистанционная магическая постоянная в каждом из этих случаев равна 14. Таким образом, G и H являются магическими дистанционно-подобными графами.

Собственные значения матрицы A_D обозначим $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ и назовем дистанционным спектром графа G. Дистанционные спектры дистанционно-подобных графов совпадают, так как подобные матрицы имеют одинаковые собственные значения с учетом кратности [11]. Как уже отмечалось, D-дистанционная матрица является симметричной с действительными элементами. Следовательно, A_D — эрмитова матрица и ее спектр состоит только из действительных чисел $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$. Их можно упорядочить, пусть $\mu_1 \ge \mu_2 \ge \ldots \ge \mu_n$.

Отметим, что каждая матрица A_D, если $0 \notin D$ и $A_D - E$, если $0 \in D$, графа G порядка n, является матрицей смежности некоторого графа порядка n, который будем обозначать G_D, и называть D-надграфом графа G. Несложно заметить, что спектральный радиус $\rho(A_D)$ матрицы A_D удовлетворяет неравенствам $\min|N_D(u_i)| \le \rho(A_D) \le \max|N_D(u_i)|$, где min и max берется по всем $i = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема 3. Для коэффициентов характеристического многочлена $P_{A_D}(\mu) = c_0\mu^n + c_1\mu^{n-1} + c_2\mu^{n-2} + \ldots + c_{n-1}\mu + c_n$ дистанционной матрицы A_D графа G порядка n имеют место такие соотношения:

1) $c_0 = 1$;

2) $c_1 = 0$, если $0 \notin D$ и $c_1 = -n$, если $0 \in D$;

3) $-c_2 = q$, если $0 \notin D$ и $c_2 = \dfrac{n(n+1)}{2} - q$, если $0 \in D$, где q — число ребер в D-надграфе G_D;

4) $-c_3 = 2t$, если $0 \notin D$ и $c_3 = n(q-n) - 2t - C_n^3$, если $0 \in D$, где t — число треугольников в D-надграфе G_D.

Доказательство. Пусть $0 \notin D$, тогда D-дистанционная матрица A_D графа G является матрицей смежности вершин D-надграфа G_D. Для матрицы смежности вершин соотношения (1)–(4) верны [12].

Пусть $0 \in D$. Для матрицы A_D с собственным значением μ и суммами $E_s(A_D)$ ее главных миноров порядка s справедливо тождество [11]:

$$P_{A_D}(\mu) = \mu^n - E_1(A_D)\mu^{n-1} + E_2(A_D)\mu^{n-2} - \ldots \pm E_n(A_D). \tag{2}$$

Из разложения (2) следует, что $c_0 = 1$.

Так как диагональные элементы матрицы A_D равны единице, то $E_1(A_D) = n$. Таким образом, $c_1 = -n$.

Пусть λ — собственное значение матрицы A, где $A = A_D - E$ — матрица смежности вершин D-надграфа G_D. Характеристические многочлены A и A_D определяются соответствующими выражениями $\det(\lambda E - A)$ и $\det(\mu E - A_D)$. Так как $\det(\lambda E - A) = \det((\lambda + 1)E - A_D) = 0$, то $\mu = \lambda + 1$. Следовательно,

$$P_{A_D}(\mu) = \det(\mu E - A_D) = \det(\lambda E - A) = P_A(\lambda). \tag{3}$$

Из (3) с учетом свойств матрицы смежности A вытекает $c_2 = E_2(A_D) = \frac{n(n+1)}{2} - q$, $c_3 = -E_3(A_D) = n(q-n) - 2t - C_n^3$, где q — число ребер в G_D, t — число треугольников в G_D, C_n^3 — число комбинаций из n элементов по три. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть μ собственное значение дистанционной матрицы A_D графа G, а λ — собственное значение матрицы смежности вершин A D-надграфа G_D. Тогда $P_{A_D}(\mu) = P_A(\lambda)$, где $\mu = \lambda$, если $0 \notin D$ и $\mu = \lambda + 1$, если $0 \in D$.

Утверждение следствия вытекает из доказательства теоремы 3, а его справедливость основывается на справедливости формулы (3) для любого $D \subset \{0, 1, 2, \ldots, d\}$.

Теорема 4. Если $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_n$ — дистанционный спектр графа G порядка n, тогда $\rho(A_D) = \mu_1$ и $\mu_1^2 + \mu_2^2 + .. + \mu_n^2 = \sum_{i=1}^{n} |N_D(u_i)|$, где $u_i \in V(G)$.

Доказательство. Пусть $D \subset \{0, 1, 2, \ldots, d\}$ и $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ — множество вершин графа G порядка n. Так как матрица $A_D \in M_n$ неотрицательная, то $\rho(A_D)$ — ее собственное значение [11]. Исходя из условия данной теоремы, получим $\rho(A_D) = \mu_1$.

С учетом симметричности матрицы A_D, каждый b_{ii}-ый элемент матрицы $A_D^2 = (b_{ii})$ будет равен $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^D = |N_D(u_i)|$, т. е. $b_{ii} = |N_D(u_i)|$. Так как $\sum_{i=1}^{n} b_{ii}$ является следом матрицы A_D^2, то $\sum_{i=1}^{n} |N_D(u_i)| = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2$. Теорема доказана.

Следствие 1. Для (D, r)-регулярного графа G порядка n имеем $\mu_1^2 + \mu_2^2 + \ldots + \mu_n^2 = nr$, если $0 \notin D$ и $\mu_1^2 + \mu_2^2 + \ldots + \mu_n^2 = n(r+1)$, если $0 \in D$.

Доказательство следствия вытекает непосредственно из теоремы 4.

Теорема 5. Если G — (D, r)-регулярный граф, тогда $\rho(A_D) = r$ при $0 \notin D$ и $\rho(A_D) = r + 1$ при $0 \in D$.

Доказательство. Рассмотрим (D, r)-регулярный граф G. Пусть $\rho(A_D)$ — спектральный радиус матрицы A_D. Кроме того, имеем $A_D \in M_n$, $A_D \geq 0$, $\| A_D \|_\infty = r$, когда $0 \notin D$ и $\| A_D \|_\infty = r + 1$, когда $0 \in D$. Известно, что $\rho(A_D) = \| A_D \|_\infty$ [11]. Таким образом, $\rho(A_D) = r$, если $0 \notin D$ и $\rho(A_D) = r + 1$, если $0 \in D$. Теорема доказана.

На рис. 1 представлены два графа: $(\{1\}, 4)$-регулярный граф G и $(\{1, 2\}, 4)$-регулярный граф H с параметром $r = 4$. Найдем собственные значения $D_1 = \{1\}$-, $D_2 = \{1, 2\}$-дистанционных матриц $A_{D_1} = A_{D_2}$ этих графов. Характеристический многочлен $A_{D_1} = A_{D_2}$ имеет вид $\mu^3 (\mu + 2)^2 (\mu - 4)$. Отсюда $\mu_1 = 4 = r$, $\mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0$ и $\mu_5 = \mu_6 = -2$ и спектральный радиус $\rho = r = 4$ для матрицы $A_{D_1} = A_{D_2}$.

Теорема 6. Пусть G_i — связный (D_i, r)-регулярный граф, где $i = 1, 2, \ldots, s$ и $\bigcup_{i=1}^{s} D_i = D$. Если $G = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_s$ и $\bigcap_{i=1}^{s} G_i = \varnothing$, тогда G является (D, r)-регулярным графом и кратность собственного значения r при $0 \notin D$ и $r + 1$ при $0 \in D$ дистанционной матрицы A_D равна s.

Доказательство. Сначала рассмотрим связный (D, r)-регулярный граф G порядка n, т.е. $G = G_1$ и $D = D_1$.

Предположим, что $0 \notin D$ и D-дистанционная матрица A_D графа G есть матрица смежности D-надграфа G_D. Очевидно, что G_D — r-регулярный связный граф. Известно, что r представляет собой собственное значение кратности один для матрицы смежности r-регулярного графа. Таким образом, характеристический многочлен матрицы A_D можно представить в виде $\det(\mu E - A_D) = (\mu - r)P_{n-1}(\mu)$, где μ — собственное значение A_D, $P_{n-1}(\mu)$ — многочлен степени $n-1$.

Пусть $0 \in D$ и $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_n$ — собственные значения A_D. На основании следствия 1 из теоремы 3 и теорем 4, 5 заключаем, что $\mu_i = \lambda_i + 1$, $\rho(A_D) = \mu_1 = r + 1 = \lambda_1 + 1$ и $\lambda_1 = r = \rho(A)$, где λ_i — собственные значения матрицы смежности вершин $A = A_D - E$ r-регулярного D-надграфа G_D. Следовательно, кратность собственного значения $r+1$ равна единице. В этом случае характеристический многочлен матрицы A_D запишем так:

$$\det(\mu E - A_D) = (\mu - (r+1))P_{n-1}(\mu).$$

Рассмотрим граф G порядка n с s компонентами связности $G_1, G_2, \ldots, .. G_s$. Пусть G_i — (D_i, r)-регулярный граф и $|V(G_i)| = t_i$, где $i = 1, 2, \ldots, s$. Дистанционная матрица A_D графа G является блочно-диагональной, а граф G — (D, r)-регулярным. Обозначим A_{ii} блок, соответствующий D_i-дистанционной матрице подграфа G_i графа G. Тогда $A_D = \oplus \sum_{i=1}^{s} A_{ii}$. Для матрицы μE используем аналогичное представление $\mu E = \oplus \sum_{i=1}^{s} \mu E_{ii}$, где матрицы E_{ii} и A_{ii} имеют одинаковые порядки. Тогда

$$\det(\mu E - A_D) = \det\left(\oplus \sum_{i=1}^{s} \mu E_{ii} - \oplus \sum_{i=1}^{s} A_{ii} \right) = \det\left(\oplus \sum_{i=1}^{s} (\mu E_{ii} - A_{ii}) \right).$$

Если $0 \in D$, то на основании свойств блочно-диагональных матриц и результатов относительно кратности корня $r+1$ матрицы A_{ii} получим

$$\det(\mu E - A_D) = (\mu - (r+1))^s P_{t_1 - 1}(\mu) P_{t_2 - 1}(\mu) \ldots P_{t_s - 1}(\mu),$$

где $\det(\mu E_{ii} - A_{ii}) = P_{t_i}(\mu) = (\mu - (r+1))P_{t_i - 1}(\mu)$, $P_{t_i}(\mu)$ — многочлен степени t_i, $i = 1, 2, \ldots, s$.

Аналогичный результат получается при $0 \notin D$. Теорема доказана.

СВОЙСТВА ДИСТАНЦИОННОЙ МАГИЧЕСКОЙ МАТРИЦЫ

Будем считать, что граф G порядка n имеет вершинную разметку f, где $f : V(G) \to \{1, 2, \ldots, n\}$ — биекция. Составим квадратную матрицу $A^* = (a_{ij}^*)$ из дистанционной матрицы $A_D = (a_{ij}^D)$ графа G заменой каждого единичного элемента a_{ij}^D на число $f(u_j)$ — метку вершины $u_j \in V(G)$. Таким образом, A^* определяется так:

$$a_{ij}^* = \begin{cases} 0, \text{если } a_{ij}^D = 0, \\ f(u_j), \text{если } a_{ij}^D = 1. \end{cases}$$

Матрицу A^* называют матрицей разметки f [5]. Если f — D-дистанционная магическая разметка, то A^* будем называть D-дистанционной (или дистанционной) магической матрицей. Авторы работы [5] предлагают выяснить, какими свойствами обладает матрица разметки для дистанционного магического графа. Проведем исследование для более широкого диапазона разметок. Приведенные ниже теоремы описывают свойства дистанционных магических матриц D-дистанционных магических графов.

Теорема 7. Пусть G — D-дистанционный магический граф порядка n и $\lambda_1^*, \lambda_2^*, .., \lambda_n^*$ — собственные значения дистанционной магической матрицы A^*, тогда

1) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* = 0$, если $0 \notin D$ и $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* = \frac{n(n+1)}{2}$, если $0 \in D$;

2) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{*2} = \frac{kn(n+1)}{2}$.

Доказательство. Пусть G — D-дистанционный магический граф порядка n и $\lambda_1^*, \lambda_2^*, .., \lambda_n^*$, — собственные значения матрицы A^*.

1. По определению след $\mathrm{tr}A^*$ матрицы A^* равен сумме элементов главной диагонали, т.е. $\mathrm{tr}\, A^* = a_{11}^* + a_{22}^* + \ldots + a_{nn}^*$. Также известно, что $\mathrm{tr}\, A^* = \lambda_1^* + \lambda_2^* + \ldots + \lambda_n^*$ [11]. Очевидно, $\lambda_1^* + \lambda_2^* + \ldots + \lambda_n^* = 0$, если $0 \notin D$ и $\lambda_1^* + \lambda_2^* + \ldots + \lambda_n^* = \frac{n(n+1)}{2}$, если $0 \in D$.

2. Пусть $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ — множество вершин графа G, имеющего D-дистанционную магическую разметку f с дистанционной магической постоянной k и $D \subset \{0, 1, 2, \ldots, d\}$. Учитывая, что A_D — симметричная матрица, для матрицы $A^{*2} = (c_{ij})$ получим следующие диагональные элементы:

$$c_{11} = f(u_1) \sum_{j=1}^{n} a_{1j}^* = kf(u_1), \quad c_{22} = f(u_2) \sum_{j=1}^{n} a_{2j}^* = kf(u_2), \ldots,$$

$$c_{nn} = f(u_n) \sum_{j=1}^{n} a_{nj}^* = kf(u_n).$$

Найдем след матрицы A^{*2}: $\mathrm{tr}\, A^{*2} = c_{11} + c_{22} + \ldots c_{nn} = \frac{kn(n+1)}{2}$. Известно, что $\mathrm{tr}\, A^{*k} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{*k}$ [11], следовательно, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{*2} = \frac{kn(n+1)}{2}$. Теорема доказана.

Теорема 8. Если граф G допускает D-дистанционную магическую разметку с магической постоянной k, то число k является собственным значением дистанционной магической матрицы A^* и $\rho(A^*) = k$.

Доказательство. Строчные суммы для неотрицательной матрицы A^* постоянные и равны k. Таким образом, $\| A^* \|_\infty = k$, где $\| A^* \|_\infty$ — максимальная строчная норма. Известно, что $\rho(A^*) = \| A^* \|_\infty$ и $\rho(A^*)$ — собственное значение A^* [11]. Следовательно, k является собственным значением матрицы A^* и $\rho(A^*) = k$. Теорема доказана.

Заметим, что для D-дистанционного магического графа G с матрицей смежности A, дистанционной матрицей A_D и дистанционной магической матрицей A^* выполняется неравенство $\sqrt{\Delta} \le \rho(A) \le \rho(A_D) \le \rho(A^*) = k$, где $\rho(A)$, $\rho(A_D)$, $\rho(A^*)$ — спектральные радиусы соответствующих матриц, k — магическая постоянная.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе получен способ порождения различных магических дистанционно-подобных графов одинакового порядка из заданного D-дистанционного магического графа того же порядка. Также рассмотрены вопросы, связанные со спектральными свойствами матриц, используемых при матричных представлениях D-дистанционных магических графов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gallian J.A. A dynamic survey of graph labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics*. 2017. DS6: Dec 22. 432 p.
2. Miller M., Rodger C., Simanjuntak R. Distance magic labelings of graphs. *Australasian Journal of Combinatorics*. 2003. Vol. 28. P. 305–315.
3. Vilfred V. Sigma labelled graphs and circulant graphs. Ph.D. Thesis, Uniersity of Kerala, India, March 1994.
4. Beena S. On Σ and Σ′ labelled graphs. *Discrete Mathematics*. 2009. Vol. 309. P. 1783–1787.
5. Arumugam S., Froncek D., Kamatchi N. Distance magic graphs — a survey. *Journal of the Indonesian Mathematical Society*. Special Edition. 2011. P. 11–26.
6. O'Neal A., Slater P. An introduction to distance *D* magic graphs. *Journal of the Indonesian Mathematical Society*. Special Edition. 2011. P. 89–107.
7. Anholcer M., Cichacz S., Peterin I. Spectra of graphs and closed distance magic labelings. *Discrete Mathematics*. 2016. Vol. 339. P. 1915–1923.
8. Arumugam S., Kamatchi N. On the uniqueness of *D*-vertex magic constant. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*. 2014. Vol. 34. P. 279–286.
9. Donets G. A. Solution of the safe problem on (0, 1)-matrices. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2002. Vol. 38, N 1. P. 83–88.
10. Цветкович Д., Дуб М., Захс Х. Спектры графов. Теория и применение. Киев: Наук. думка, 1984. 384 с.
11. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. Москва: Мир, 1989. 655 с.
12. Biggs N. Algebraic graph theory. Second edition. New York: Cambridge University Press, 1993. 205 p.

Надійшла до редакції 03.10.2018

М.Ф. Семенюта, В.А. Шульгін

МАТРИЦІ, АСОЦІЙОВАНІ З *D*-ДИСТАНЦІЙНИМИ МАГІЧНИМИ ГРАФАМИ, ТА ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ

Анотація. Розглянуто матриці, асоційовані з D-дистанційними магічними графами. Отримано результати щодо спектральних властивостей цих матриць. Доведено, що в тому разі, якщо два графи G і H однакового порядку мають подібні дистанційні матриці A_{D_1} і A_{D_2} відповідно, то граф G є D_1-дистанційним магічним тоді й тільки тоді, коли H буде D_2-дистанційним магічним графом. Графи G і H названо магічними дистанційно-подібними і доведено, що їхні дистанційні магічні сталі збігаються.

Ключові слова: D-окіл, D-дистанційна магічна розмітка, D-дистанційна матриця, матриця розмітки, D-дистанційна магічна матриця.

M. Semeniuta, V. Shulhin

MATRICES ASSOCIATED WITH *D*-DISTANCE MAGIC GRAPHS AND THEIR PROPERTIES

Abstract. Matrices associated with D-distance magic graphs are considered in the paper. Results regarding the spectral properties of these matrices have been obtained. It has been proved that if two graphs G and H of the same order have similar distance matrices A_{D_1} and A_{D_2} respectively, then graph G is D_1-distance magic if and only if H is a D_2-distance magic graph. Graphs G and H are called magic distance-similar and their distance magic constants have been proved to coincide.

Keywords: D-neighborhood, D-distance magic labeling, D-distance matrix, matrix of labeling, D-distance magic matrix.

Семенюта Марина Фроловна,
кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры Летной академии Национального авиационного университета, Кропивницкий, e-mail: marina_semenyuta@ukr.net.

Шульгин Валерий Анатольевич,
кандидат техн. наук, доцент кафедры Летной академии Национального авиационного университета, Кропивницкий, e-mail: vashulgin@ukr.net.