УДК 517.988

С.В. ДЕНИСОВ, В.В. СЕМЁНОВ, П.И. СТЕЦЮК

БРЭГМАНОВСКИЙ ЭКСТРАГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД С МОНОТОННОЙ РЕГУЛИРОВКОЙ ШАГА[1]

Аннотация. Предложен новый вариант экстраградиентного метода для приближенного решения вариационных неравенств с псевдомонотонными и липшицевыми операторами, действующими в конечномерном линейном нормированном пространстве. В методе использовано расхождение (расстояние) Брэгмана вместо евклидового расстояния и новая регулировка величины шага, не требующая знания константы Липшица для оператора. В отличие от применявшихся ранее правил выбора величины шага в предлагаемом методе не требуется дополнительных вычислений значений оператора и прокс-отображения. Доказана теорема сходимости метода.

Ключевые слова: вариационное неравенство, псевдомонотонность, условие Липшица, экстраградиентный метод, расхождение Брэгмана, сходимость.

ВВЕДЕНИЕ

Многие задачи исследования операций и математической физики можно записать в форме вариационных неравенств [1, 2]. Особенно они популярны в математической экономике, математическом моделировании транспортных потоков и теории игр [2]. Для их решения к настоящему времени предложено множество методов [3–11]. Заметим, что с появлением генерирующих состязательных нейронных сетей (generative adversarial network, GAN) интерес к алгоритмам решения вариационных неравенств возник и в среде специалистов в области машинного обучения [12].

Наиболее известным обобщением метода проекции градиента для вариационных неравенств является экстраградиентный метод Г.М. Корпелевич [13]. Исследованию этого алгоритма посвящено большое количество публикаций [14–19]. В частности, предлагались модификации алгоритма Г.М. Корпелевич с одним метрическим проектированием на допустимое множество [16, 17]. Для вариационных неравенств одним из современных вариантов экстраградиентного метода является проксимальный зеркальный метод А.С. Немировского [18], который можно интерпретировать как вариант экстраградиентного метода с проектированием, понимаемым в смысле расхождения Брэгмана. Он позволяет иногда хорошо учитывать структуру допустимого множества задачи. Например, для симплекса в качестве расстояния можно выбрать расхождение Кульбака–Лейблера (расхождение Брэгмана, построенное по отрицательной энтропии) и получить явно вычисляемый оператор проектирования на симплекс.

Также заслуживает внимания метод двойственной экстраполяции для решения вариационных неравенств, предложенный Ю.Е. Нестеровым [6]. Отметим и обобщенный метод эллипсоидов [5] для решения конечномерных дуальных вариационных неравенств с характером сходимости, зависящим только от размерности пространства. В публикациях [20–22] исследованы двухэтапные проксимальные зеркальные методы — модификации двухэтапного проксимального алгоритма [23] с использованием расхождения Брэгмана вместо евклидового расстояния.

Настоящая работа является продолжением статей [19–22] и посвящена изучению брэгмановского экстраградиентного метода [18] с новой экономной регулировкой шага, не требующей знания константы Липшица для оператора. В отли-

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке МОН Украины № ГР 0116U004777), ГФФИ Украины (№ ГР 0118U002258) и Volkswagen Foundation (грант № 90306).

чие от применявшихся ранее правил выбора величины шага [14, 16–18] в предлагаемом методе не проводится дополнительных вычислений значений оператора и прокс-отображения. Для вариационных неравенств с псевдомонотонными и липшицевыми операторами, действующими в конечномерном линейном нормированном пространстве, доказана теорема сходимости метода.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА

Пусть E — конечномерное действительное линейное пространство с нормой $||\cdot||$ (не обязательно евклидовой). Двойственное пространство обозначим E^*. Для $a \in E^*$ и $b \in E$ будем обозначать (a, b) значение линейной функции a в точке b. Двойственная норма $||\cdot||_*$ на E^* определена стандартным способом: $||a||_* = \max\{(a, b): ||b|| = 1\}$, обеспечивающим выполнение неравенства Шварца $(a, b) \le ||a||_* \, ||b||$ для всех $a \in E^*$, $b \in E$.

Пусть C — непустое подмножество пространства E, A — оператор, действующий из E в E^*. Рассмотрим вариационное неравенство

$$\text{найти } x \in C : (Ax, y - x) \ge 0 \quad \forall\, y \in C, \tag{1}$$

множество решений которого обозначим S.

Предположим, что выполнены следующие условия:

- множество $C \subseteq E$ выпуклое и замкнутое;
- оператор $A: E \to E^*$ псевдомонотонный и липшицевый с константой $L > 0$ на C;
- множество S не пусто.

Замечание 1. Псевдомонотонность оператора A на множестве C заключается в том, что для всех x, $y \in C$ из $(Ax, y - x) \ge 0$ следует $(Ay, y - x) \ge 0$.

Введем необходимые для формулировки алгоритма конструкции. Пусть функция $\varphi: E \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ удовлетворяет условиям:

- $\operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi \subseteq E$ — непустое выпуклое множество;
- φ непрерывно дифференцируема на $\operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi$;
- если $\operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi \ni x_n \to x \in \operatorname{bd}\operatorname{dom}\varphi$, то $||\nabla\varphi(x_n)||_* \to +\infty$;
- φ сильно выпукла относительно нормы $||\cdot||$ с константой сильной выпуклости $\sigma > 0$:

$$\varphi(a) \ge \varphi(b) - (\nabla\varphi(b), a - b) + \frac{\sigma}{2}||a - b||^2 \quad \forall a \in \operatorname{dom}\varphi,\ b \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi.$$

Соответствующее функции φ расхождение Брэгмана задается формулой [24]

$$V(a, b) = \varphi(a) - \varphi(b) - (\nabla\varphi(b), a - b) \quad \forall a \in \operatorname{dom}\varphi,\ b \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi.$$

Замечание 2. Иногда расхождение Брэгмана называют расстоянием [18, 20, 24], однако это жаргон: из аксиом метрики для V в общем случае выполняется только $V(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

Примеры практически важных расхождений Брэгмана приведены в [24]. Рассмотрим только два основных. При $\varphi(\cdot) = \frac{1}{2}||\cdot||_2^2$, где $||\cdot||_2$ — евклидова норма, имеем $V(x, y) = \frac{1}{2}||x - y||_2^2$. А для неотрицательного ортанта $\mathbb{R}_+^m = \{x \in \mathbb{R}^m : x_i \ge 0\}$ и функции отрицательной энтропии $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i \ln x_i$ (она сильно выпукла с константой 1 относительно ℓ_1-нормы на симплексе $S_m = \{x \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1\}$) получаем расхождение (расстояние) Кульбака–Лейблера

$$V(x, y) = \sum_{i=1}^m x_i \ln (x_i / y_i) - \sum_{i=1}^m (x_i - y_i), \ x \in \mathbb{R}_+^m, \ y \in \mathbb{R}_{++}^m = \operatorname{int} (\mathbb{R}_+^m).$$

Имеет место полезное трехточечное тождество [24]:

$$V(a, c) = V(a, b) + V(b, c) + (\nabla\varphi(b) - \nabla\varphi(c), a - b). \tag{2}$$

Из сильной выпуклости функции φ следует оценка

$$V(a, b) \geq \frac{\sigma}{2} || a - b ||^2 \quad \forall a \in \operatorname{dom} \varphi, \ b \in \operatorname{int} \operatorname{dom} \varphi. \tag{3}$$

Пусть $K \subseteq \operatorname{dom} \varphi$ — непустое замкнутое выпуклое множество, причем $K \cap \operatorname{int} \operatorname{dom} \varphi \neq \varnothing$. Рассмотрим сильно выпуклые задачи минимизации вида

$$P_x^K(a) = \arg \min_{y \in K} \{-(a, y - x) + V(y, x)\} \quad \forall a \in E^*, \ x \in \operatorname{int} \operatorname{dom} \varphi. \tag{4}$$

Известно [24], что задача (4) имеет единственное решение $z \in K \cap \operatorname{int} \operatorname{dom} \varphi$, причем

$$-(a, y - z) + (\nabla\varphi(z) - \nabla\varphi(x), y - z) \geq 0 \quad \forall y \in K. \tag{5}$$

Отображение $P_x^K : E^* \to K \cap \operatorname{int} \operatorname{dom} \varphi$ называют прокс-отображением.

Замечание 3. Точка $P_x^K(a)$ в евклидовом случае совпадает с евклидовой метрической проекцией $P_K(x + a) = \arg \min_{y \in K} || y - (x + a) ||_2$.

Замечание 4. Для симплекса $S_m = \{x \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1\}$ и расхождения Кульбака–Лейблера имеем [24]

$$P_x^{S_m}(a) = \left(\frac{x_1 e^{a_1}}{\sum_{j=1}^m x_j e^{a_j}}, \frac{x_2 e^{a_2}}{\sum_{j=1}^m x_j e^{a_j}}, \ldots, \frac{x_m e^{a_m}}{\sum_{j=1}^m x_j e^{a_j}} \right), \ a \in \mathbb{R}^m, \ x \in \operatorname{ri}(S_m).$$

Опишем предлагаемый алгоритм для решения вариационного неравенства (1).

Алгоритм 1. Экстраградиентный метод с расхождением Брэгмана и монотонной регулировкой величины шага.

Выбираем элемент $x_1 \in \operatorname{int} \operatorname{dom} \varphi$, $\tau \in (0, \sigma)$ и положительное число λ_1. Полагаем $n = 1$.

Шаг 1. Вычислить $y_n = P_{x_n}^C(-\lambda_n A x_n)$.

Шаг 2. Если $y_n = x_n$, то СТОП, иначе вычислить $x_{n+1} = P_{x_n}^C(-\lambda_n A y_n)$.

Шаг 3. Вычислить

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \min \left\{ \lambda_n, \tau \sqrt{\dfrac{2}{\sigma}} \dfrac{\sqrt{V(y_n, x_n)}}{|| A y_n - A x_n ||_*} \right\}, & \text{если } A x_n \neq A y_n, \\ \lambda_n & \text{иначе.} \end{cases} \tag{6}$$

Положить $n := n + 1$ и перейти к шагу 1.

Замечание 5. В отличие от правил выбора λ_n из [14, 16–18] в (6) не проводится дополнительных вычислений значений оператора A и прокс-отображения $P_{x_n}^C$.

Замечание 6. Последовательность (λ_n) неубывающая и ограничена снизу числом $\min\left\{\lambda_1, \frac{\tau}{L}\right\}$. Следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n > 0$.

Замечание 7. Если $\varphi(\cdot) = \frac{1}{2}\|\cdot\|_2^2$, то алгоритм 1 принимает вид экстраградиентного метода с простой монотонной регулировкой величины шага:

$$y_n = P_C(x_n - \lambda_n Ax_n),$$

$$x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda_n Ay_n),$$

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \min\left\{\lambda_n, \tau \dfrac{\|x_n - y_n\|_2}{\|Ax_n - Ay_n\|_2}\right\}, & \text{если } Ax_n \neq Ay_n, \\ \lambda_n & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $\tau \in (0,1)$, $\lambda_1 > 0$. Данная регулировка предложена в [11] для алгоритма Tseng'а [3].

Если для некоторого $n \in \mathbb{N}$ в алгоритме 1 имеем $y_n = x_n$, то $x_n \in S$. Действительно, тогда $y_n = P_{x_n}^C(-\lambda_n Ax_n)$. Из неравенства (5) следует

$$(Ax_n, y - x_n) + \frac{(\nabla\varphi(x_n) - \nabla\varphi(x_n), y - x_n)}{\lambda_n} = (Ax_n, y - x_n) \geq 0 \quad \forall\, y \in C,$$

т.е. $x_n \in S$.

Предположим, что для всех $n \in \mathbb{N}$ условие останова на шаге 2 не выполняется, и перейдем к обоснованию сходимости алгоритма 1.

ОСНОВНОЕ НЕРАВЕНСТВО

Докажем важную оценку, связывающую расхождения Брэгмана между порожденными алгоритмом 1 точками и произвольным элементом множества решений S.

Лемма 1. Для последовательностей (x_n), (y_n), порожденных алгоритмом 1, имеет место неравенство

$$V(z, x_{n+1}) \leq V(z, x_n) - \left(1 - \frac{\mu_n}{\sigma}\right) \cdot V(y_n, x_n) - \left(1 - \frac{\mu_n}{\sigma}\right) \cdot V(x_{n+1}, y_n), \tag{7}$$

где $z \in S$, $\mu_n = \tau(\lambda_n / \lambda_{n+1})$.

Доказательство. Пусть $z \in S$. Запишем трехточечное тождество (2)

$$V(z, x_{n+1}) = V(z, x_n) - V(x_{n+1}, x_n) + (\nabla\varphi(x_{n+1}) - \nabla\varphi(x_n), x_{n+1} - z). \tag{8}$$

Из определения точек x_{n+1} и (5) следует

$$\lambda_n(Ay_n, z - x_{n+1}) + (\nabla\varphi(x_{n+1}) - \nabla\varphi(x_n), z - x_{n+1}) \geq 0. \tag{9}$$

Используя неравенство (9) для оценки скалярного произведения в (8), получаем

$$V(z, x_{n+1}) \leq V(z, x_n) - V(x_{n+1}, x_n) + \lambda_n(Ay_n, z - x_{n+1}). \tag{10}$$

Второе слагаемое в правой части (10) представим в виде

$$V(x_{n+1}, x_n) = V(x_{n+1}, y_n) + V(y_n, x_n) + (\nabla\varphi(y_n) - \nabla\varphi(x_n), x_{n+1} - y_n).$$

Получаем

$$V(z, x_{n+1}) \leq V(z, x_n) - V(x_{n+1}, y_n) - V(y_n, x_n) +$$

$$+ (\nabla\varphi(x_n) - \lambda_n Ay_n - \nabla\varphi(y_n), x_{n+1} - y_n) + \lambda_n(Ay_n, z - y_n).$$

Из псевдомонотонности оператора A следует $(Ay_n, z - y_n) \leq 0$. Таким образом,

$$V(z, x_{n+1}) \leq V(z, x_n) - V(x_{n+1}, y_n) - V(y_n, x_n) +$$
$$+ (\nabla\varphi(x_n) - \lambda_n Ay_n - \nabla\varphi(y_n), x_{n+1} - y_n). \tag{11}$$

Поскольку $x_{n+1} \in C$, то

$$(\nabla\varphi(x_n) - \lambda_n Ay_n - \nabla\varphi(y_n), x_{n+1} - y_n) = \underbrace{(\nabla\varphi(x_n) - \lambda_n Ax_n - \nabla\varphi(y_n), x_{n+1} - y_n)}_{\leq 0} +$$
$$+ \lambda_n (Ax_n - Ay_n, x_{n+1} - y_n) \leq \lambda_n (Ax_n - Ay_n, x_{n+1} - y_n). \tag{12}$$

Учитывая (12) в (11), получаем

$$V(z, x_{n+1}) \leq V(z, x_n) - V(x_{n+1}, y_n) - V(y_n, x_n) + \lambda_n (Ax_n - Ay_n, x_{n+1} - y_n). \tag{13}$$

Теперь оценим слагаемое $\lambda_n (Ax_n - Ay_n, x_{n+1} - y_n)$ с помощью неравенства (3). Имеем

$$\lambda_n (Ax_n - Ay_n, x_{n+1} - y_n) \leq \lambda_n || Ax_n - Ay_n ||_* || x_{n+1} - y_n || \leq$$
$$\leq \frac{2}{\sigma} \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \tau \sqrt{V(y_n, x_n)} \sqrt{V(x_{n+1}, y_n)} \leq \frac{\mu_n}{\sigma} V(y_n, x_n) + \frac{\mu_n}{\sigma} V(x_{n+1}, y_n). \tag{14}$$

Применив (14) в (13), получим

$$V(z, x_{n+1}) \leq V(z, x_n) - V(x_{n+1}, y_n) - V(y_n, x_n) +$$
$$+ \frac{\mu_n}{\sigma} V(y_n, x_n) + \frac{\mu_n}{\sigma} V(x_{n+1}, y_n) =$$
$$= V(z, x_n) - \left(1 - \frac{\mu_n}{\sigma}\right) V(x_{n+1}, y_n) - \left(1 - \frac{\mu_n}{\sigma}\right) V(y_n, x_n),$$

что и требовалось доказать. ■

СХОДИМОСТЬ АЛГОРИТМА

Для доказательства сходимости метода потребуется элементарная лемма о числовых последовательностях.

Лемма 2. Пусть (a_n), (b_n) — две последовательности неотрицательных чисел, удовлетворяющих неравенству $a_{n+1} \leq a_n - b_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда существует предел $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ и $(b_n) \in \ell_1$.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. Пусть множество $C \subseteq E$ выпуклое и замкнутое, оператор $A : E \to E^*$ — псевдомонотонный и липшицевый с константой $L > 0$ и $S \neq \varnothing$. Тогда последовательности (x_n) и (y_n), порожденные алгоритмом 1, сходятся к некоторой точке $\bar{z} \in S$.

Доказательство. Пусть $z \in S$. Положим

$$a_n = V(z, x_n), \ b_n = \left(1 - \frac{\mu_n}{\sigma}\right) V(x_{n+1}, y_n) + \left(1 - \frac{\mu_n}{\sigma}\right) V(y_n, x_n).$$

Неравенство (7) принимает вид $a_{n+1} \leq a_n - b_n$.

Поскольку

$$1 - \mu_n / \sigma = 1 - (\tau / \sigma)(\lambda_n / \lambda_{n+1}) \to 1 - \tau / \sigma \in (0, 1) \ \text{при} \ n \to \infty,$$

из леммы 2 можем сделать вывод, что существует предел $\lim_{n\to\infty} V(z, x_n)$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} (V(x_{n+1}, y_n) + V(y_n, x_n)) < +\infty .$$

Откуда, в частности, получаем

$$\lim_{n\to\infty} V(x_{n+1}, y_n) = \lim_{n\to\infty} V(y_n, x_n) = 0 . \tag{15}$$

Из (15) следует

$$\lim_{n\to\infty} \| x_{n+1} - y_n \| = \lim_{n\to\infty} \| y_n - x_n \| = 0 . \tag{16}$$

Из неравенства $V(z, x_n) \geq \frac{\sigma}{2} \| z - x_n \|^2$ и (16) следует ограниченность последовательностей (x_n), (y_n).

Теперь рассмотрим подпоследовательность (y_{n_k}), сходящуюся к некоторой точке $\bar{z} \in C$. Тогда из (16) следует, что $x_{n_k} \to \bar{z}$. Покажем, что $\bar{z} \in S$. Имеем

$$(Ax_{n_k}, y - y_{n_k}) + \frac{(\nabla\varphi(y_{n_k}) - \nabla\varphi(x_{n_k}), y - y_{n_k})}{\lambda_{n_k}} \geq 0 \quad \forall y \in C . \tag{17}$$

Совершив в (17) предельный переход с учетом (16), получим $(A\bar{z}, y - \bar{z}) \geq 0$ $\forall y \in C$, т.е. $\bar{z} \in S$.

Покажем, что $x_n \to \bar{z}$ и $y_n \to \bar{z}$. Известно, что существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} V(\bar{z}, x_n) = \lim_{n\to\infty} (\varphi(\bar{z}) - \varphi(x_n) - (\nabla\varphi(x_n), \bar{z} - x_n)).$$

Поскольку $\lim_{n\to\infty} V(\bar{z}, x_{n_k}) = 0$, то и $\lim_{n\to\infty} V(\bar{z}, x_n) = 0$. Откуда $\| x_n - \bar{z} \| \to 0$. Из (16) следует, что и $\| y_n - \bar{z} \| \to 0$. ■

Замечание 8. Как видно из доказательства теоремы 1, для последовательности (x_n), начиная с некоторого номера N, выполняется фейеровское условие в расхождении Брэгмана относительно множества решений S.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложен новый метод экстраградиентного типа для приближенного решения вариационных неравенств с псевдомонотонными и липшицевыми операторами, действующими в конечномерном линейном нормированном пространстве. В методе используется расхождение Брэгмана вместо евклидового расстояния и новая экономная регулировка величины шага, не требующая знания константы Липшица для оператора. В отличие от применявшихся ранее правил выбора величины шага в предлагаемом методе не проводится дополнительных вычислений значений оператора и прокс-отображения.

Для вариационных неравенств с псевдомонотонными и липшицевыми операторами, действующими в конечномерном линейном нормированном пространстве, доказана теорема сходимости метода.

В дальнейшем планируется рассмотреть рандомизированную версию алгоритма 1 и провести соответствующий анализ сходимости. Это поможет использовать данный вариант экстраградиентного метода для решения вариационных неравенств большого размера и для обучения генерирующих состязательных нейронных сетей (GANs) [12].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Байокки К., Капело А. Вариационные и квазивариационные неравенства. Москва: Наука, 1988. 448 с.
2. Nagurney A. Network economics: A variational inequality approach. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. 325 p.
3. Tseng P. A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings. *SIAM J. Control Optim*. 2000. Vol. 38. P. 431–446.
4. Facchinei F., Pang J.-S. Finite-dimensional variational inequalities and complementarily problem. Vol. 2. New York: Springer, 2003. 666 p.
5. Stetsyuk P.I., Fesiuk O.V., Khomyak O.N. The generalized ellipsoid method. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2018. Vol. 54, N 4. P. 576–584.
6. Nesterov Yu. Dual extrapolation and its applications to solving variational inequalities and related problems. *Mathematical Programming.* 2007. Vol. 109, Iss. 2–3. P. 319–344.
7. Нурминский Е.А. Использование дополнительных малых воздействий в фейеровских моделях итеративных алгоритмов. *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2008. Т. 48, № 12. С. 2121–2128.
8. Semenov V.V. On the parallel proximal decomposition method for solving the problems of convex optimization. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2010. Vol. 42, Iss. 4. P. 13–18.
9. Semenov V.V. A Strongly convergent splitting method for systems of operator inclusions with monotone operators. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2014. Vol. 46, Iss. 5. P. 45–56.
10. Semenov V.V. Hybrid splitting methods for the system of operator inclusions with monotone operators. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2014. Vol. 50, N 5. P. 741–749.
11. Yang J., Liu H.W. Strong convergence result for solving monotone variational inequalities in Hilbert space. *Numerical Algorithms.* 2018. DOI: https://doi.org/10.1007/s11075-018-0504-4.
12. Gidel G., Berard H., Vincent P., Lacoste-Julien S. A Variational inequality perspective on generative adversarial networks. arXiv preprint arXiv:1802.10551. 2018.
13. Корпелевич Г.М. Экстраградиентный метод для отыскания седловых точек и других задач. *Экономика и математические методы*. 1976. Т. 12, № 4. С. 747–756.
14. Хоботов Е.Н. О модификации экстраградиентного метода для решения вариационных неравенств и некоторых задач оптимизации. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1987. Т. 27, № 10. С. 1462–1473.
15. Semenov V.V. Strongly convergent algorithms for variational inequality problem over the set of solutions the equilibrium problems. In: C*ontinuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications.* Zgurovsky M.Z., Sadovnichiy V.A. (Eds.). Springer International Publishing, 2014. Vol. 211. P. 131–146.
16. Denisov S.V., Semenov V.V., Chabak L.M. Convergence of the modified extragradient method for variational inequalities with non-Lipschitz operators. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2015. Vol. 51, N 5. P. 757–765.
17. Verlan D.A., Semenov V.V., Chabak L.M. A Strongly convergent modified extragradient method for variational inequalities with non-Lipschitz operators. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2015. Vol. 47, Iss. 7. P. 31–46.
18. Nemirovski A. Prox-method with rate of convergence O(1/t) for variational inequalities with Lipschitz continuous monotone operators and smooth convex-concave saddle point problems. *SIAM Journal on Optimizatio*n. 2004. Vol. 15. P. 229–251.
19. Semenov V.V. Modified extragradient method with bregman divergence for variational inequalities. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2018. Vol. 50, Iss. 8. P. 26–37.
20. Semenov V.V. A Version of the mirror descent method to solve variational inequalities. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2017. Vol. 53, N 2. P. 234–243.

21. Chabak L., Semenov V., Vedel Y. A new non-Euclidean proximal method for equilibrium problems. In: *Recent Developments in Data Science and Intelligent Analysis of Information: Proc. XVIII ICDSIAI 2018. Advances in Intelligent Systems and Computing.* Chertov O., Mylovanov T., Kondratenko Y., Kacprzyk J., Kreinovich V., Stefanuk V. (Eds.) Cham: Springer, 2019. Vol. 836. P. 50–58.

22. Номировский Д.А., Рублев Б.В., Семёнов В.В. Сходимость двухэтапного метода с расхождением Брэгмана для вариационных неравенств. *Кибернетика и системный анализ*. 2019. Т. 55, № 3. С. 17–27.

23. Lyashko S.I., Semenov V.V. A new two-step proximal algorithm of solving the problem of equilibrium programming. In: *Optimization and Its Applications in Control and Data Sciences. Springer Optimization and Its Applications.* Goldengorin B. (Ed.). Cham: Springer, 2016. Vol. 115. P. 315–325.

24. Beck A. First-order methods in optimization. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2017. 479 p.

Надійшла до редакції 14.12.2018

С.В. Денисов, В.В. Семенов, П.І. Стецюк

БРЕГМАНІВСЬКИЙ ЕКСТРАГРАДІЄНТНИЙ МЕТОД З МОНОТОННИМ РЕГУЛЮВАННЯМ КРОКУ

Анотація. Запропоновано новий варіант екстраградієнтного методу для наближеного розв'язання варіаційних нерівностей з псевдомонотонними та ліпшицевими операторами, що діють в скінченновимірному лінійному нормованому просторі. У методі використано розбіжність (відстань) Брегмана замість евклідової відстані та нове регулювання величини кроку, що не вимагає знання константи Ліпшиця для оператора. На відміну від правил вибору величини кроку, що застосовувалися раніше, в запропонованому методі не потрібно додатково обчислювати значення оператора та проксвідображення. Доведено теорему збіжності методу.

Ключові слова: варіаційна нерівність, псевдомонотонність, умова Липшиця, екстраградієнтний метод, розбіжність Брегмана, збіжність.

S.V. Denisov, V.V. Semenov, P.I. Stetsyuk

BREGMAN EXTRAGRADIENT METHOD WITH MONOTONE RULE OF STEP SIZE TUNING

Abstract. A new extragradient-type method for the approximate solution of variational inequalities with pseudo-monotone and Lipschitz-continuous operators acting in a finite-dimensional linear normed space is proposed. The method uses the Bregman divergence (distance) instead of the Euclidean distance and the new adjustment of the step size which does not require knowledge of the Lipschitz constant of operator. In contrast to the previously used rules for choosing the step size, the proposed method does not perform additional calculations for the operator values and prox-map. A theorem on the convergence of the method is proved.

Keywords: variational inequality, pseudo-monotonicity, Lipschitz condition, extragradient method, Bregman divergence, convergence.

Денисов Сергей Викторович,
ассистент кафедры Киевского национального университета имени Тараса Шевченко,
e-mail: sireukr@gmail.com.

Семёнов Владимир Викторович,
доктор. физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, e-mail: semenov.volodya@gmail.com.

Стецюк Петр Иванович,
доктор. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, заведующий отделом Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: stetsyukp@gmail.com.