

## ФАКТОРИЗАЦИЯ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ И ДИНАМИКИ ПРОТЯЖЕННЫХ СИСТЕМ

**Аннотация.** Разработан численный метод решения плохо обусловленных квазилинейных уравнений нелинейной динамики протяженных систем. Он основан на различных типах факторизации определяющих уравнений. В результате послойной временной декомпозиции исходная сингулярность уменьшается и численно решаются хорошо обусловленные системы уравнений. Дополнительным положительным эффектом является снижение осцилляций и монотонизация профиля численного решения, устойчивость расчета сложных переходных процессов в протяженных системах (ускорения, рывки, пространственные эволюции, нелинейные колебания и т.д.).

**Ключевые слова:** факторизация, протяженная система, управление, динамика, численное моделирование.

### ВВЕДЕНИЕ

Вопросы, связанные с оптимизацией вычислительных алгоритмов, всегда актуальны. Среди многочисленных отечественных публикаций, посвященных этой проблеме, отметим лишь основные [1–3]. Факторизация вычислительных схем и численных алгоритмов исследована в [4–7]. Сравнение высокочастотного и геометрического осреднений результатов расчета переходных режимов в протяженных системах (ПС), проведенное в [8], показало, что геометрическое осреднение неприемлемо для изучаемых задач, так как приводит к некорректным результатам вследствие увеличения погрешностей при переходе с одного временного слоя на другой. Временное осреднение сглаживает осцилляции численного решения, однако требует вдвое больше затрат времени по сравнению с геометрическим и поэтому также недостаточно эффективно [8].

Рассмотрим возможные пути оптимизации вычислительного процесса решения задач динамики и управления ПС на основе различных подходов к факторизации исходного численного алгоритма.

### 1. МЕТОД ФАКТОРИЗАЦИИ ПО НАПРАВЛЕНИЯМ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Систему уравнений, описывающую нестационарное поведение ПС в плоскости, можно представить в матричном виде

$$E \frac{\partial W}{\partial t} + B_{\xi} \frac{\partial W}{\partial S} = D_{\xi}. \quad (1)$$

Здесь  $E$  — единичная матрица размера  $4 \times 4$ ,  $B_{\xi}$  — матрица при конвективных членах размера  $4 \times 4$ ,  $D_{\xi}$  — вектор-столбец правых частей,  $W$  — вектор-столбец неизвестных. Для  $B_{\xi}$ ,  $D_{\xi}$  и  $W$  имеем [8, 9]:

$$B_{\xi} = \begin{pmatrix} \frac{-u_t}{1+eT} & \frac{-u_n}{1+eT} & \frac{-1}{m} & 0 \\ \frac{-u_n}{1+eT} & \frac{u_t}{1+eT} & 0 & \frac{u_t^2 + u_n^2}{1+eT} - \frac{T - Mu_t^2}{m+M} \\ \frac{-1}{e} & 0 & 0 & \frac{u_n}{e} \\ 0 & \frac{-1}{1+eT} & 0 & \frac{-u_t}{1+eT} \end{pmatrix},$$

$$D_{\xi} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{m} \left( \omega \sin \varphi + \frac{\pi k_f \rho d_0}{2} \sqrt{1+eT} |u_t| u_t \right) \\ \frac{-1}{m+M} \left( \omega \cos \varphi + \frac{k_n \rho d_0}{2} \sqrt{1+eT} |u_n| u_n \right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} u_t \\ u_n \\ T \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где  $d_0$  — первоначальный диаметр ПС до деформирования;  $\varphi$  — угол наклона ПС к горизонтали;  $m, M, \omega$  — погонная масса, присоединенная масса и плавучесть единицы длины ПС до деформирования соответственно;  $k_f, k_n$  — гидродинамические коэффициенты сопротивления трения и формы ПС соответственно;  $\rho$  — плотность жидкости;  $T$  — эффективное натяжение ПС;  $u_t, u_n$  — проекции относительной скорости обтекания ПС на касательную и нормаль соответственно;  $t$  — время;  $S$  — текущая координата ПС до деформирования;  $e = \frac{1}{EF}$  — эффективная растяжимость ПС;  $E$  — модуль Юнга;  $F$  — площадь поперечного сечения ПС до деформирования.

Для построения факторизованных монотонных разностных схем необходимо провести расщепление матрицы  $B_{\xi}$  на положительно и отрицательно определенную. Для собственных значений матрицы  $B_{\xi}$  имеем  $\lambda_{1(2)}$  и  $\lambda_{3(4)}$  [8]:

$$\lambda_{1(2)} = \frac{\frac{-u_t}{1+eT} \pm \sqrt{\left(\frac{u_t}{1+eT}\right)^2 + \frac{4}{em}}}{2}; \quad \lambda_{3(4)} = \pm \sqrt{\frac{T - Mu_t^2}{m+M}}. \quad (3)$$

С помощью (3) можно построить матрицы преобразования  $N$  и  $N^{-1}$ :

$$N = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} & n_{14} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} & n_{24} \\ n_{31} & n_{32} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad N^{-1} = \begin{bmatrix} n_{11}^* & 0 & n_{13}^* & n_{14}^* \\ n_{21}^* & 0 & n_{23}^* & n_{24}^* \\ n_{31}^* & n_{32}^* & n_{33}^* & n_{34}^* \\ n_{41}^* & n_{42}^* & n_{43}^* & n_{44}^* \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Значения  $n_{ij}, n_{ij}^*, i, j=1, \dots, 4$ , из [8] ввиду громоздкости записи и ограниченно-го объема статьи не приводятся. Для  $N$  и  $N^{-1}$  (4) справедливы следующие тождества:  $N \cdot N^{-1} = E$  и  $N^{-1} \cdot B_{\xi} \cdot N = K$ . Для матрицы  $K$  имеем:

$$K = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Разложим матрицу  $K$  на положительно и отрицательно определенную  $K = K^+ + K^-$  (5):

$$K^+ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad K^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Делая обратные преобразования для  $K^+$  и  $K^-$  (6), получаем

$$B_{\xi}^+ = N \cdot K^+ \cdot N^{-1}; \quad B_{\xi}^- = N \cdot K^- \cdot N^{-1}, \quad (7)$$

причем для  $B_{\xi}^+$  и  $B_{\xi}^-$  (7) выполняется тождество  $B_{\xi}^+ + B_{\xi}^- = B_{\xi}$ . Монотонная разностная схема, факторизованная по направлениям распространения возмущений, имеет вид

$$\left( E + \Delta t B_{\xi}^+ \frac{\partial}{\partial S} \right) \cdot \left( E + \Delta t B_{\xi}^- \frac{\partial}{\partial S} \right) W^{n+1} = \Delta t D_{\xi}^n + W^n. \quad (8)$$

Проведем декомпозицию (8) по временным слоям

$$\begin{aligned} \left( E + \Delta t B_{\xi}^+ \frac{\partial}{\partial S} \right) W^{n+1/2} &= \Delta t D_{\xi}^n + W^n, \\ \left( E + \Delta t B_{\xi}^- \frac{\partial}{\partial S} \right) W^{n+1} &= W^{n+1/2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Если в (9) конвективные производные аппроксимировать разделенными разностями, ориентированными против потока, придем к неявной абсолютно устойчивой схеме «бегущего счета» [10, 11]. Обозначив

$$\Lambda_{\xi}^+ W^{n+1/2} = B_{\xi}^+ \frac{W_i^{n+1/2} - W_{i-1}^{n+1/2}}{\Delta S}, \quad \Lambda_{\xi}^- W^{n+1} = B_{\xi}^- \frac{W_i^{n+1} - W_{i+1}^{n+1}}{\Delta S}, \quad (10)$$

получим

$$(E + \Delta t \Lambda_{\xi}^+) W^{n+1/2} = \Delta t D_{\xi}^n + W^n (E + \Delta t \Lambda_{\xi}^-) W^{n+1} = W^{n+1/2}, \quad (11)$$

где  $\Delta t$  — шаг по времени,  $\Delta S$  — шаг по координате.

Схема (11) абсолютно устойчивая. Определение решения на верхнем временном слое сводится к вычислениям, аналогичным для явных разностных схем. Отметим, что собственные значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  являются определяющими для продольных колебаний, а  $\lambda_3$  и  $\lambda_4$  — для поперечных. Используем это для построения монотонных разностных схем, факторизованных не только по направлениям распространения возмущений, но и по их типу (физическим факторам [10]). Разложим матрицу  $K$  на четыре матрицы:

$$\begin{aligned} K_1^+ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad K_2^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ K_1^- &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad K_2^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (12)$$

Каждая из матриц  $K_{1(2)}^{+(-)}$  (12) характеризует не только распространение определенной волны в исследуемом алгоритме, но и направление ее распространения. Делая обратные преобразования, получаем:

$$B_{1\xi}^+ = NK_1^+ N^{-1}; \quad B_{1\xi}^- = NK_1^- N^{-1}; \quad B_{2\xi}^+ = NK_2^+ N^{-1}; \quad B_{2\xi}^- = NK_2^- N^{-1}. \quad (13)$$

Для них выполняется равенство  $B_{1\xi}^+ + B_{1\xi}^- + B_{2\xi}^+ + B_{2\xi}^- = B_\xi$ . С учетом (13) монотонную разностную схему, факторизованную как по направлениям, так и по типу колебаний (физическим факторам), запишем

$$\begin{aligned} \left(E + \Delta t B_{1\xi}^+ \frac{\partial}{\partial S}\right) \left(E + \Delta t B_{1\xi}^- \frac{\partial}{\partial S}\right) \left(E + \Delta t B_{2\xi}^+ \frac{\partial}{\partial S}\right) \left(E + \Delta t B_{2\xi}^- \frac{\partial}{\partial S}\right) W^{n+1} = \\ = D_\xi^n \Delta t + W^n. \end{aligned} \quad (14)$$

Факторизуя (14) по временным слоям, получаем

$$\begin{aligned} \left(E + \Delta t B_{1\xi}^+ \frac{\partial}{\partial S}\right) W^{n+1/4} &= D_\xi \Delta t + W^n, \\ \left(E + \Delta t B_{1\xi}^- \frac{\partial}{\partial S}\right) W^{n+1/2} &= W^{n+1/4}, \\ \left(E + \Delta t B_{2\xi}^+ \frac{\partial}{\partial S}\right) W^{n+3/4} &= W^{n+1/2}, \\ \left(E + \Delta t B_{2\xi}^- \frac{\partial}{\partial S}\right) W^{n+1} &= W^{n+3/4}. \end{aligned} \quad (15)$$

Аппроксимацию конвективных производных в выражениях (15) можно осуществить подобно (10). Факторизованную монотонную разностную схему для исследования пространственных колебаний ПС можно построить аналогично.

## 2. МЕТОД ВОЛНОВОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ

Суть волновой факторизации конечно-разностного оператора системы (1) состоит в декомпозиции матрицы  $B_\xi$  таким образом, чтобы на каждом шаге по времени рассчитывался только один тип волн. Это соответствует выделению из (1) на каждом временном слое только двух уравнений, описывающих определенную волну, причем распространяющуюся как в положительном, так и в отрицательном направлениях.

Предположим, что уравнение (1) описывает шесть волн в ПС [8, 9, 11]: продольную, крутильную, две поперечные и две изгибные в направлениях нормали и бинормали. Размерность матричного уравнения в этом случае будет равна 12. Упорядочим уравнения модели согласно описываемым ими типам волн: продольной, крутильной, двум поперечным и двум изгибным. Исходя из этого, расщепление матрицы  $\tilde{B}_\xi$  проведем следующим образом:

$$\tilde{B}_\xi = \tilde{B}_{1\xi} + \tilde{B}_{2\xi} + \tilde{B}_{3\xi} + \tilde{B}_{4\xi} + \tilde{B}_{5\xi} + \tilde{B}_{6\xi}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_\xi = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{112} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{212} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{121} & b_{122} & \dots & b_{1212} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_{1\xi} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{112} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{212} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{B}_{2\xi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{31} & b_{32} & \dots & b_{312} \\ b_{41} & b_{42} & \dots & b_{412} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_{6\xi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{111} & b_{112} & \dots & b_{1112} \\ b_{121} & b_{122} & \dots & b_{1212} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (17)$$



$$\tilde{D}_1 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{m} \left( \omega \sin \varphi + \frac{\pi k_f \rho d_0}{2} \sqrt{1+eT} |u_t| u_t \right) + \frac{u_n}{1+eT} \frac{\partial u_n}{\partial S} \\ -\frac{u_n}{e} \frac{\partial \varphi}{\partial S} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{D}_2 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{m+M} \left( \omega \cos \varphi + \frac{k_n \rho d_0}{2} \sqrt{1+eT} |u_n| u_n \right) + \frac{u_n}{1+eT} \frac{\partial u_t}{\partial S} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Граничные условия в точке  $S = 0$ , которая совершает равноускоренное движение, запишем в виде

$$u_t(0, t) = V(t) \cos \varphi; \quad u_n(0, t) = V(t) \sin \varphi, \quad (25)$$

где  $u_t(0, t)$ ,  $u_n(0, t)$  — проекции относительной скорости обтекания ПС на текущую касательную и нормаль в точке  $S = 0$  соответственно,  $V(t)$  — скорость (закон движения) судна-буксировщика. На подводный буксируемый аппарат (ПБА) действуют силы веса, сила Архимеда, динамические силы сопротивления и инерции присоединенной массы жидкости, усилие  $T^*$  в точке крепления ПБА. В этом случае краевое условие при  $S = L$  примет вид

$$T^* + P^* \sin \varphi + M^* \left( \frac{\partial u_t}{\partial t} - u_n \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \frac{K^* S^* \rho}{2} \sqrt{u_t^2 + u_n^2} u_t = 0,$$

$$P^* \cos \varphi + M^* \left( \frac{\partial u_n}{\partial t} - u_t \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \frac{K^* S^* \rho}{2} \sqrt{u_t^2 + u_n^2} u_n = 0, \quad (26)$$

где  $T^*$  — контактная сила в месте крепления ПБА,  $P^*$  — разность гидростатической выталкивающей силы и силы веса, действующих на ПБА,  $M^*$  — сумма массы ПБА и его присоединенной массы,  $K^*$  — коэффициент сопротивления ПБА,  $S^*$  — площадь миделевого сечения ПБА.

Расчеты по факторизованному алгоритму проводились для следующих технических и гидродинамических характеристик ПС и ПБА [12]: диаметр ПС составлял 0.006 м; эффективная погонная масса (масса ПБА и его присоединенная масса) — 0.5 кг; плавучесть единицы длины ПС до деформирования — 4.8 Н/м; коэффициенты гидродинамического сопротивления формы и трения — 1.4 и 0.01 соответственно; эффективная растяжимость ПС —  $3.5 \times 10^{-3}$ , ее длина — 1.2 м; коэффициент гидродинамического сопротивления транспортируемого ПБА — 0.15, площадь его миделевого сечения —  $0.01 \text{ м}^2$ ; эффективная масса ПБА (сумма массы ПБА и его присоединенной массы) — 1.1 кг; ускорение —  $0.9 \text{ м/с}^2$ .

На рис. 1 и 2 приведены данные экспериментов и расчетов из [12], а также данные вычислений режима ускорения из состояния покоя до скорости 1.5 м/с и установившегося режима движения ПС по полному алгоритму и алгоритму волновой факторизации для плоского случая (1), (2).

Получено качественное и количественное совпадение для всех трех случаев. Количественные различия на отдельных участках обусловлены тем, что в [12] приведены неполные данные о технических и гидродинамических характеристиках ПС, а также условиях проведения экспериментов. Поэтому недостающие параметры определялись методом идентификации при неполных входных данных по рис. 10 из [12]. Сравнительный анализ результатов на рис. 1 и 2 показывает достаточно хорошее совпадение данных эксперимента и расчета методом волновой факторизации, что подтверждает возможность его дальнейшего использования при решении подобных задач.

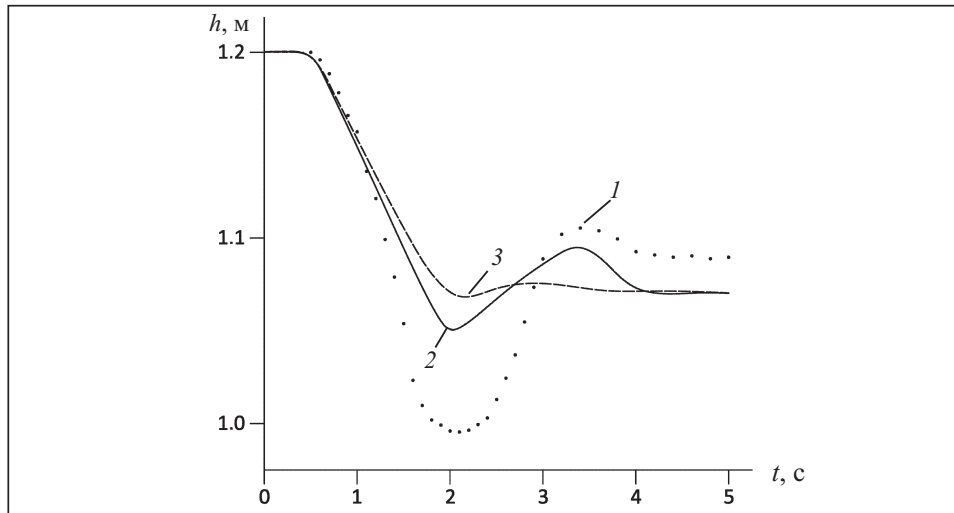


Рис. 1. Эволюция глубины погружения  $h$  буксируемого ПБА по времени: 1 — экспериментальные данные из [12]; 2 — расчет по полному алгоритму; 3 — расчет по факторизованному алгоритму

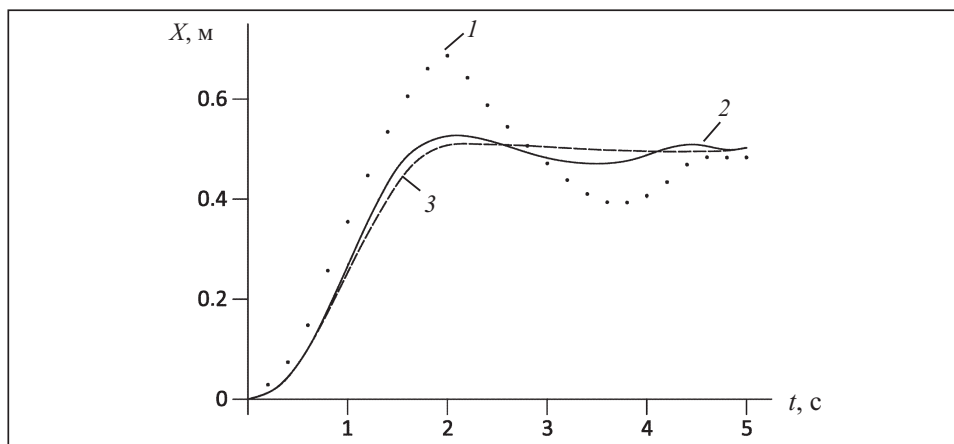


Рис. 2. Эволюция отстояния  $X$  буксируемого ПБА от кормы буксировщика по времени: 1 — экспериментальные данные из [12]; 2 — расчет по полному алгоритму; 3 — расчет по факторизованному алгоритму

#### 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИАПАЗОНА ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДА ВОЛНОВОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ПС В ПОТОКЕ

**4.1. Плоский случай.** Тестовые расчеты проведены на примере расчета нестационарных режимов движения скоростной буксируемой системы со следующими весогабаритными и гидродинамическими характеристиками ПС: длина — 80 м; коэффициент сопротивления трения обтекателя — 0.05; коэффициент сопротивления формы обтекателя по миделю — 0.032; плавучесть единицы длины ПС до деформирования — 26.4 Н/м; сумма погонной и присоединенной массы — 3.5 кг/м; эффективная масса заглубителя — 400 кг, его коэффициент сопротивления — 0.5; площадь миделевого сечения заглубителя —  $0.1 \text{ м}^2$ ; заглубляющая сила — 4000 Н. Исследовался режим перехода с ускорением  $0.01 \text{ м/с}^2$  с одной постоянной скорости движения, равной 15 узлов, на другую — 20 узлов. При конечно-разностной аппроксимации использовалась неявная схема Кранка–Никольсона [8, 9, 11].

**Таблица 1.** Результаты работоспособности метода волновой факторизации, (плоский случай)

$t, c$	$S, m$	Относительная разность, %			
		Натяжение $T \times 10^5, N$		Угол $\varphi, rad$	
		пять участков	десять участков	пять участков	десять участков
0	0	1.176	1.176	0.532	0.532
0	20	0.925	0.925	0.566	0.566
0	40	0.693	0.693	0.624	0.624
0	60	0.481	0.481	0.749	0.749
0	80	0.325	0.375	1.114	1.114
10	0	1.420	1.421	0.494	0.503
10	20	1.095	1.101	0.529	0.539
10	40	0.793	0.804	0.587	0.597
10	60	0.525	0.538	0.713	0.717
10	80	0.339	0.342	1.094	1.071
24	0	1.962	1.951	0.427	0.441
24	20	1.492	1.492	0.454	0.471
24	40	1.055	1.065	0.498	0.518
24	60	0.657	0.677	0.594	0.613
24	80	0.370	0.375	0.964	0.938

В первом тесте проверялась работоспособность факторизованного алгоритма (23), (24). Результаты расчета при уменьшении размера ячеек разностной сетки (пять и десять участков) приведены в табл. 1. Во втором тесте для этого же режима движения расчеты проводились по факторизованным (23), (24) и исходным уравнениям (1). Скорость расчета по факторизованному алгоритму для пяти и десяти участков в 1.5 и 2.5 раза соответственно превышала базовую модель (1). Различия в численных данных не превышали 2%.

Ввиду того, что при решении сеточных уравнений на каждом временном слое проводилось временное осреднение, условие безусловной устойчивости схемы Кранка–Никольсона нарушалось. В связи с этим также проводились расчеты для определения диапазона устойчивости метода волновой факторизации и реализующего его численного алгоритма в режиме ускорения. При этом ввиду того, что рассчитывались одновременно два различных волновых процесса, определялись диапазоны числа КФЛ (Куранта–Фридрикса–Леви) отдельно для продольных  $\sigma_{пр}$  и поперечных  $\sigma_{пп}$  колебаний. Численные результаты идентичны для диапазона изменения числа КФЛ и для продольных волн в диапазоне  $\sigma_{пр} \in [2.65 - 188.9]$ .

Для более низких и высоких значений числа КФЛ для продольных колебаний  $\sigma_{пр}$  наблюдалась расхожимость численного алгоритма. Причем нижняя граница  $\sigma_{пр}$  соответствовала числу модуля Юнга для деформируемых материалов, подобных резине (они практически не используются в качестве тросов для буксировки). По-видимому, свойство их значительного деформирования и явилось причиной расхожимости численного алгоритма. Изменением дискретизации расчетной области можно управлять  $\sigma_{пр}$  и, следовательно, провести динамический расчет систем, состоящих из материалов с низким и высоким значениями модуля Юнга. С помощью изменения числа КФЛ для продольных колебаний  $\sigma_{пр}$  можно управлять устойчивостью численного алгоритма.

**4.2. Пространственный случай.** Квазилинейная пространственная модель динамики ПС описывает три моды: продольную, поперечную в направлении нормали и поперечную в направлении бинормали. Упорядочим уравнения в за-



писи модели ПС согласно описываемым ими модам: продольной, поперечной в направлении нормали и поперечной в направлении бинормали. Декомпозицию матрицы  $B$  проведем следующим образом:

$$\hat{B} = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 + \hat{B}_3, \quad (27)$$

$$\hat{B}_1 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} & b_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} & b_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{B}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} & b_{56} \\ b_{61} & b_{62} & b_{63} & b_{64} & b_{65} & b_{66} \end{bmatrix}. \quad (28)$$

В каждой из матриц  $\hat{B}_i$  ненулевыми являются строки, которые описывают только одну волну. На конечно-разностном уровне алгоритм можно расщепить по трем временным слоям:

$$\begin{aligned} (E + \Delta t \gamma \hat{B}_{1\xi} \Lambda_\xi) W^{1+n} &= \Delta t \hat{D}_1^n + W^n, \\ (E + \Delta t \gamma \hat{B}_{2\xi} \Lambda_\xi) W^{2+n} &= \Delta t \hat{D}_2^{1+n} + W^{1+n}, \\ (E + \Delta t \gamma \hat{B}_{3\xi} \Lambda_\xi) W^{3+n} &= \Delta t \hat{D}_3^{2+n} + W^{2+n}. \end{aligned} \quad (29)$$

Рассмотрим также другой способ декомпозиции: разложим матрицу  $B$  на сумму только двух матриц, одна из которых описывает продольные волны, а другая — две поперечные волны в направлении нормали и бинормали. Количество факторизованных уравнений на каждом расчетном шаге по сравнению с (29) уменьшится до двух.

Краевые условия при  $S = 0$  соответствуют граничным условиям закрепления ПС на буксировщике (судне, самолете, вертолете) (25). Граничные условия для ПБА при  $S = L$  соответствовали (26). При численной реализации метода волновой факторизации необходимо также проводить декомпозицию краевых условий (матрицы  $\tilde{D}_i$ ).

Для проверки работоспособности метода волновой факторизации в пространственном случае проводились тестовые расчеты нестационарных режимов движения скоростной буксируемой системы при изменении направления движения буксировщика со следующими весогабаритными и гидродинамическими характеристиками: длина системы — 100 м; гидродинамический коэффициент сопротивления трения — 0.05; гидродинамический коэффициент сопротивления формы — 0.15; эффективная растяжимость каната —  $10^{-4}$ , его диаметр — 0.032 м, погонная и присоединенная масса — 2.3 кг/м; эффективная масса ПБА — 500 кг, его коэффициент сопротивления — 0.5; площадь миделевого сечения —  $0.1 \text{ м}^2$ ; заглубляющая сила ПБА — 5000 Н.

**Таблица 2.** Результаты расчетов по исходной модели и факторизованной для продольной и поперечной модам пяти участков (пространственный случай)

Количество итераций	$t$ , с	$S$ , м	Натяжение $T \times 10^4$ , Н		Угол $\varphi$ , рад		Угол $\theta$ , рад	
			исходная модель	факторизованная модель	исходная модель	факторизованная модель	исходная модель	факторизованная модель
1	0	0	1.422	1.372	0.567	0.473	1.570	1.571
1	0	40	0.952	0.914	0.581	0.496	1.570	1.571
1	0	100	0.270	0.270	0.780	0.780	1.570	1.571
200	10	0	0.130	0.899	0.573	0.481	1.239	1.287
200	10	40	0.856	0.579	0.587	0.510	1.395	1.472
200	10	100	0.220	0.181	0.863	0.912	1.496	1.556
700	60	0	1.625	1.437	0.586	0.519	0.038	0.130
700	60	40	1.070	0.803	0.607	0.575	0.136	0.185
700	60	100	0.264	0.247	0.844	0.944	0.236	0.246

Исследовался резкий поворот ПС с ускорением и постоянной скоростью при наличии течений и без них. При конечно-разностной аппроксимации гиперболических уравнений использовались два факторизованных алгоритма при расчете на установление (без изменения управляющих воздействий). Из результатов сравнительного анализа следует, что декомпозицию желательно проводить только на основе выделения волн различного типа. Расщепление путем выделения двух волн одного типа (27), (28) (поперечных волн в направлениях нормали и бинормали) приводит к накоплению погрешности при расчете (постоянное увеличение аддитивной погрешности вычислений  $u_b$  и  $\theta$  при переходе с одного временного слоя на другой). Поэтому дальнейшие расчеты проводились на основе декомпозиции только по типам волн (продольных и поперечных).

Во втором тесте для режима поворота на  $45^\circ$  судна-буксировщика со скоростью 5 м/с сравнивались результаты расчета по исходным уравнениям, а также факторизованным по двум модам: продольной и поперечной. Результаты расчетов приведены в табл. 2, из их сравнительного анализа следует, что относительные отличия силовых характеристик (силы натяжения  $T$ ) во время переходных этапов и на этапе установления от полной модели не превышают 10–15%; геометрические характеристики меньше отличаются от полной модели. При этом для пяти и десяти участков скорость проведения расчета по факторизованному численному алгоритму по сравнению с базовой математической моделью была выше в 1.5 и 2.5 раза соответственно.

Ввиду того, что при решении конечно-разностных уравнений на каждом слое по времени проводилась линеаризация, условие безусловной устойчивости схемы Кранка–Никольсона нарушалось. Проводились также расчеты для определения диапазона устойчивости численного алгоритма. При этом вследствие того, что рассчитывались одновременно два разнотипных волновых процесса, определялись диапазоны числа КФЛ для продольных  $\sigma_{пр}$  и поперечных  $\sigma_{пп}$  колебаний. Результаты расчета идентичны для изменения числа КФЛ по продольным колебаниям  $\sigma_{пр} \in [1-300]$ . Для более низких и высоких значений числа КФЛ по продольным колебаниям наблюдалась расхожимость вычислительного алгоритма. Причем нижняя граница соответствовала числу модуля Юнга для значительно деформируемых материалов. Изменением дискретизации расчетной области по длине ПС можно управлять значением  $\sigma_{пр}$  и, следовательно, провести динамический расчет ПС для более широкого диапазона изменения физико-механических свойств ПС и режимов управления ими.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Для численного решения системы плохо обусловленных квазилинейных уравнений в частных производных, описывающих волновые процессы в ПС, находящихся в поле массовых и поверхностных сил, предложен численный метод, основанный на волновой факторизации определяющих уравнений. Волновая факторизация позволила значительно снизить размерность решаемых на каждом временном слое системы конечно-разностных уравнений (одноволновое квазилинейное гиперболическое уравнение). Следствием этого являются монотонизация профиля численного решения и повышение устойчивости вычислений. Скорость вычислений при этом возросла в 10–100 раз.

2. Определен диапазон применимости метода волновой факторизации на примере решения плоской и пространственной задачи о буксировке ПС с ускорением и во время эволюции: устойчивый расчет наблюдался для чисел КФЛ по продольным колебаниям в диапазоне [2–200], по поперечным колебаниям — [1–10<sup>3</sup>]. Метод устойчиво работает при декомпозиции по различным типам мод. Декомпозиция по волнам одного типа (поперечные в направлениях нормали и бинормали) со временем приводит к увеличению аддитивной погрешности. Следствием этого является ограничение на декомпозицию определяющих уравнений, заключающееся в том, что порядок различия скорости волн в уравнениях модели — определяющий фактор точности и применимости метода волновой факторизации. Чем значительнее различаются скорости волн, тем лучше работает метод и наоборот. В качестве дополнительного положительного эффекта отметим снижение осцилляций и монотонизацию профиля численного решения, устойчивость расчета сложных переходных процессов в ПС (ускорения, рывки, пространственные эволюции, нелинейные колебания и т.д.).

3. Подобную процедуру волнового послойного расщепления и декомпозиции по скоростям можно применять к уравнениям динамики грунта [13], пластин, оболочек и т.д., а также к любым другим моделям физических объектов, описываемых волновыми уравнениями.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергієнко І.В., Задірака В.К., Литвин О.М. Елементи загальної теорії оптимальних алгоритмів та суміжні питання. Київ: Наук. думка, 2012. 400 с.
2. Молчанов И.Н. Машинные методы решения задач прикладной математики. Алгебра, приближение функций, обыкновенные дифференциальные уравнения. Киев: Наук. думка, 2007. 550 с.
3. Гладкий А.В., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Численно-аналитические методы исследования волновых процессов. Киев: Наук. думка, 2001. 452 с.
4. Гладкий А.В. Об исследовании алгоритмов расщепления в задачах конвекции–диффузии. *Кибернетика и системный анализ*. 2014. № 4. С. 76–88.
5. Гладкий А.В., Скопецкий В.В. О численном моделировании и оптимизации однонаправленных волновых процессов в неоднородных средах. *Кибернетика и системный анализ*. 2010. № 5. С. 177–186.
6. Попов О.В. Про паралельні алгоритми факторизації розріджених матриць. *Комп'ютерна математика*. 2013. Вып. 2. С. 115–124.
7. Баранов А.Ю. Факторизация несимметричных стрічкових матриць на комп'ютерах з графічними прискорювачами. *Матеріали VI Всеукраїнської науково-практичної конференції за міжнародною участю «Інформатика та системні науки (ІСН-2015)»* (Полтава, 19–21 берез. 2015 р.) Полтава: ПУЕТ. 2015.
8. Калюх Ю.И. Статика, динамика и оптимизация канатных систем в потоке. Дис. ... доктора техн. наук. Киев: ГПНТБ Украины, 1994. № 05 94 000783.

9. Трофимчук О.М., Калюх Ю.І., Дунін В.А., Берчун Я.О. Про можливість багатохвильової ідентифікації дефектів у палях. *Кибернетика и системный анализ*. 2018. № 4. С. 98–108.
10. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. Москва: Мир, 1980. 616 с.
11. Farenjuk G., Kaliukh I., Farenjuk E., Kaliukh T., Berchun Y., Berchun V. Experimental and theoretical diagnostics of ferroconcrete piles base on reflection of longitudinal and transverse waves). *International fib symposium "High tech concrete: Where technology and engineering meet!"*, Maastricht, The Netherlands, 12–14 June, 2017. [s.l. : s.n.], 2017. P. 1307–1317.
12. Bettles R.W., Chapman D.A. Experimental verification of a towed body and cable dynamic response theory. *Ocean Eng.* 1985. Vol. 12, N 5. P. 453–469.
13. Трофимчук А.Н., Гомилко А.М., Савицкий О.А. Динамика пористоупругих насыщенных жидкостью сред. Киев: Наук. думка, 2003. 230 с.

Надійшла до редакції 15.05.2018

**Ю.І. Калюх, А.Є. Вусатюк**

**ФАКТОРИЗАЦІЯ В ЗАДАЧАХ КЕРУВАННЯ ТА ДИНАМІКИ ПРОТЯЖНИХ СИСТЕМ**

**Анотація.** Розроблено чисельний метод розв'язання погано обумовлених квазілінійних рівнянь нелінійної динаміки протяжних систем. Метод базується на різних типах факторизації визначальних рівнянь. У результаті пошарової часової декомпозиції вихідна сингулярність зменшується і чисельно розв'язуються добре обумовлені системи рівнянь. Додатковим позитивним ефектом є зниження осциляцій і монотонізація профілю чисельного розв'язку, стійкість обчислення складних перехідних процесів у протяжних системах (прискорення, ривки, просторові еволюції, нелінійні коливання тощо).

**Ключові слова:** факторизація, протяжна система, керування, динаміка, чисельне моделювання.

**Yu.I. Kaliukh, A.Ye. Vusatiuk**

**FACTORIZATION IN PROBLEMS OF CONTROL AND DYNAMICS OF LENGTHY SYSTEMS**

**Abstract.** A numerical method for solving ill-conditioned quasilinear equations of nonlinear dynamics of lengthy systems (LS) is developed. It is based on different types of factorization of the defining equations. As a result of layer-by-layer time decomposition, the original singularity disappears, and well-conditioned systems of linear equations are solved numerically. An additional positive effect is the reduction of oscillations and monotonization of the profile of the numerical solution, stability of calculation of complex transient processes in the LS (acceleration, jerking, spatial evolution, nonlinear oscillations, etc.).

**Keywords:** factorization, lengthy system, control, dynamics, numerical modeling.

**Калюх Юрій Іванович,**

доктор техн. наук, професор, ведучий научний співробітник Інститута телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАНУ, Київ, e-mail: kalyukh2002@gmail.com.

**Вусатюк Андрій Євгенівич,**

математик, ООО «Українські інформаційні системи», Київ, e-mail: avusatiuk@gmail.com.