УДК 517.977

В.А. Пепеляев, Ал.А. Чикрий, К.А. Чикрий

О НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ В КОНФЛИКТНОЙ СИТУАЦИИ

Ключевые слова: конфликтно-управляемый процесс, метод разрешающих функций, многозначное отображение, условие Понтрягина, измеримый селектор, стробоскопическая стратегия.

В теории конфликтно-управляемых процессов наряду с методами, вскрывающими структуру игры и отображающими идеологию динамического программирования, разработаны методы, обеспечивающие гарантированный результат. Такие методы дают условия выигрыша игрока, не заботясь об оптимальности, что с практической точки зрения, по-видимому, более оправданно. В этом смысле, прежде всего, следует указать первый прямой метод Л.С. Понтрягина [1] и метод разрешающих функций [2]. Работа посвящена развитию, изучению и сравнению этих методов для достаточно общих нестационарных процессов. Следует отметить, что привлекательной стороной методов является тот факт, что они позволяют эффективно использовать современную технику многозначных отображений и их селекторов [3, 4] в обосновании игровых конструкций и получении на их основе содержательных результатов. В частности, метод разрешающих функций дает полное теоретическое обоснование правила параллельного преследования и метода сближения по лучу [5], хорошо известных проектировщикам ракетной и космической техники.

В развитие общей идеологии метода разрешающих функций [6–10] рассматривается игровая ситуация, когда не имеет места условие Понтрягина. В этом случае введены верхние и нижние разрешающие функции двух типов, роль верхних разрешающих функций первого типа — накапливать выигрыш первого игрока, нижние разрешающие функции второго типа, по существу, подменяют условие Понтрягина. В результате получены достаточные условия разрешимости задачи сближения за конечное время в классе стробоскопических и квазистратегий.

1. Нестационарный конфликтно-управляемый процесс

Динамика конфликтно-управляемого процесса в конечномерном евклидовом пространстве R^n задается соотношением

$$z(t) = g(t, t_0) + \int_{t_0}^{t} \Omega(t, \tau)\, \varphi(\tau, u(\tau), v(\tau))\, d\tau, \quad t \ge t_0 \ge 0. \tag{1}$$

При этом функция $g(t, t_0)$, действующая из R_{t_0} в R^n, $R_{t_0} = \{t : t \geq t_0\}$, измерима по Лебегу и ограничена при $t > t_0$, матричная функция $\Omega(t, \tau)$, $t \geq \tau \geq t_0$, измерима по t и суммируема по τ для каждого $t \in R_{t_0}$.

Блок управления задается функцией $\varphi(t, u, v)$, которая удовлетворяет условиям Каратеодори: она измерима по t и непрерывна по совокупности (u,v). Управляющие параметры игроков u и v в каждый момент времени выбираются из областей управления $U(\tau)$ и $V(t)$, которые являются измеримыми компактнозначными отображениями с образами в R^n при $t \in [t_0, +\infty)$.

Кроме того, предполагается, что имеет место неравенство

$$\|\varphi(t, u, v)\| \leq c(t) \text{ при } u \in U(t),\ v \in V(t),\ t \in [t_0, +\infty), \tag{2}$$

где $c(t)$ — некоторая локально суммируемая функция.

Вместе с динамикой (1) задано цилиндрическое терминальное множество

$$M^*(t) = M_0 + M(t),\ t \in [t_0, +\infty), \tag{3}$$

где M_0 — линейное подпространство из R^n, а $M(t)$ — измеримое компактнозначное отображение, образы которого принадлежат ортогональному дополнению L к M_0 в R^n.

В качестве допустимого управления второй игрок (v) выбирает произвольные измеримые селекторы многозначного отображения $V(t)$. Поскольку это отображение измеримо и замкнутозначно, в силу теоремы об измеримом выборе [11] такие селекторы существуют.

Если первый игрок (u) в момент $\tau, \tau \geq t_0$, располагает информацией о начальном состоянии процесса (t_0, z_0), $z_0 = g(t_0, t_0)$, и предыстории управления второго игрока

$$v_\tau(\cdot) = \{v(s) : v(s) \in V(s),\ s \in [t_0, t]\},$$

т.е. $u(\tau) = u(t_0, z_0, \tau, v_\tau(\cdot))$, то говорят, что это управление предписано квазистратегией [12]. При этом управление $u(\tau)$ обязано быть измеримым селектором отображения $U(\tau)$.

Если первый игрок принимает решение в момент τ лишь на основе информации о начальном состоянии (t_0, z_0) и мгновенном значении управления второго игрока, т.е. $u(\tau) = u(t_0, z_0, \tau, v(\tau))$, то говорят о контруправлении по Н.Н. Красовскому [12], которое предписано стробоскопической стратегией О. Хайека [13]. Конечно же, и в этом случае $u(\tau)$ обязано быть измеримым селектором отображения $U(\tau)$.

Цель первого игрока — вывести траекторию процесса (1) на терминальное множество (3), второй игрок этому препятствует.

Необходимо найти достаточные условия разрешимости задачи (1)–(3) в пользу первого игрока за некоторое гарантированное время, указав управление, которое обеспечивает ему этот результат.

Следует заметить, что представление решения в виде (1) позволяет в единой схеме рассмотреть широкий круг функционально-дифференциальных систем в условиях конфликтного противостояния и неопределенности.

Конкретный вид функций $g(t, t_0)$ и $\Omega(t, \tau)$ определяет тип конфликтно-управляемого процесса, его динамику.

2. Схема первого прямого метода Л.С. Понтрягина

Обозначим π ортопроектор, действующий из R^n в L. Положив

$$\varphi(\tau, U(\tau), v) = \{\varphi(\tau, u, v) : u \in U(\tau)\},\ v \in V(\tau),\ \tau \geq t_0,$$

рассмотрим многозначные отображения

$$W(t, \tau, v) = \pi\Omega(t, \tau)\varphi(\tau, U(\tau), v),\ W(t, \tau) = \bigcap_{v \in V(\tau)} W(t, \tau, v).$$

В силу предположений о параметрах процесса (1) и теоремы о прямом образе [11] отображение $\varphi(\tau, U(\tau), v)$ измеримо по τ и непрерывно по v в метрике Хаусдорфа.

В свою очередь, многозначное отображение $W(t, \tau, v)$ также является измеримым по τ и предполагается замкнутозначным. Соответственно, отображение $W(t, \tau)$ измеримо по τ и замкнутозначно [11]. Обозначим

$$\Delta = \{(t, \tau) : t_0 \leq \tau \leq t < +\infty\}.$$

Условие Понтрягина. Многозначное отображение $W(t, \tau)$ имеет непустые образы на множестве Δ.

Из условия Понтрягина и теоремы измеримого выбора [11] вытекает, что существует хотя бы один измеримый по τ селектор $\gamma(t, \tau)$, $\gamma(t, \tau) \in W(t, \tau)$, — селектор Понтрягина.

В этих условиях рассмотрим функцию Понтрягина

$$p(g(\cdot, t_0)) = \inf\{t \geq t_0 : t \in P(g(\cdot, t_0))\},$$

где

$$P(g(\cdot, t_0)) = \{t \geq t_0 : \pi\, g(t, t_0) \in M(t) - \int_{t_0}^{t} W(t, \tau) d\tau\}. \quad (4)$$

Здесь под интегралом от многозначного отображения $W(t, \tau)$ понимается интеграл Ауманна [14]. Если включение в (4) не выполняется для всех $t \in R_{t_0}$, то положим

$$P(g(\cdot, t_0)) = \varnothing, \text{ а } p(g(\cdot, t_0)) = +\infty.$$

Следующее утверждение раскрывает содержательный смысл функции $p(g(\cdot, t_0))$ как наименьшего времени в схеме первого прямого метода Л.С. Понтрягина.

Теорема 1. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1)–(3) выполнено условие Понтрягина, причем отображение $W(t, \tau)$ является выпуклозначным, а число $p \in P(g(\cdot, t_0)) = \varnothing$.

Тогда траектория процесса (1) может быть приведена на множество (3) в момент P с помощью подходящей стробоскопической стратегии Хайека.

Доказательство. Из условия Понтрягина и включения в (4) следует, что

$$\pi\, g(P, t_0) \in M(P) - \int_{t_0}^{P} W(P, \tau) d\tau.$$

 ISSN 0572-2691

Это означает, что существует такая точка $m \in M(P)$ и с учетом выпуклозначности отображения $W(t,\tau)$ и свойств интеграла Ауманна такой измеримый селектор Понтрягина $\gamma(P,\tau)$, $\gamma(P,\tau) \in W(t,\tau)$, $\tau \in [t_0, P]$, что

$$\pi\, g(P,t_0) \in m - \int_{t_0}^{P} \gamma(P,\tau)d\tau . \tag{5}$$

Рассмотрим многозначное отображение

$$U_0(\tau, v) = \{u \in U(\tau) : \pi\Omega(P,\tau)\varphi(\tau,u,v) - \gamma(P,\tau) = 0\},\ \tau \in [t_0, P],\, v \in V(\tau). \tag{6}$$

Отображение $U_0(\tau, v)$ является замкнутозначным и $L \times B$-измеримым [6]. Поэтому по теореме измеримого выбора [11] в нем существует хотя бы один $L \times B$-измеримый селектор $u_0(\tau, v)$, который является суперпозиционно измеримой функцией [6]. Для конструктивного построения функции $u_0(\tau, v)$ может быть использована процедура лексикографического минимума [15]. Выберем управление первого игрока в виде измеримой функции

$$u(\tau) = u_0(\tau, v(\tau)),\ \tau \in [t_0, P],$$

где $v(\tau)$ — допустимое управление второго игрока.

Из представления (1) с использованием соотношения (5) и равенства в (6) немедленно следует $\pi z(P) = m \in M(P)$.

3. Метод разрешающих функций

Далее не предполагается выполненным условие Понтрягина. Исследования будут сосредоточены на получении более слабых предположений, обеспечивающих тем не менее завершение игры (1)–(3) за конечное время.

Вместо селекторов Понтрягина введем некоторые специальные функции, которым отведена, по существу, та же роль. Пусть теперь $\gamma(t,\tau)$, $\gamma : \Delta \to L$, — некоторая почти везде ограниченная измеримая по t и суммируемая по τ, $\tau \in [t_0, t]$, для каждого $t \in R_{t_0}$ функция, которую назовем функцией сдвига.

Обозначим

$$\xi(t) = \xi(t, g(t,t_0), \gamma(t,\cdot)) = \pi g(t,t_0) + \int_{t_0}^{t} \gamma(t,\tau)d\tau$$

и рассмотрим многозначное отображение

$$\mathfrak{A}(t,\tau,v) = \{\alpha \geq 0 : [\pi\Omega(t,\tau)\varphi(\tau, U(\tau), v) - \gamma(t,\tau)] \cap \alpha[M(t) - \xi(t)] \neq \varnothing\}, \tag{7}$$

$$v \in V(\tau),\ t_0 \leq \tau \leq t < +\infty.$$

Условие 1. Многозначное отображение $\mathfrak{A}(t,\tau,v)$ имеет непустые образы в области своего определения.

По аналогии с [16] введем верхнюю и нижнюю разрешающие функции первого типа

$$\alpha^*(t,\tau,v) = \sup\{\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}(t,\tau,v)\},$$

$$\alpha_*(t,\tau,v) = \inf\{\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}(t,\tau,v)\}.$$

Так как образы отображения $\mathfrak{A}(t,\tau,v)$ — числовые множества полуоси R_+, то верхняя разрешающая функция является опорной функцией отображения

$\mathfrak{A}(t,\tau,v)$ в направлении + 1. Учитывая свойства конфликтно-управляемого процесса (1)–(3), теоремы о характеризации и обратном образе [11], можно показать [6], что замкнутозначное отображение $\mathfrak{A}(t,\tau,v)$ является $L\times B$-измеримым по совокупности (τ, v), $v\in V(\tau)$, $\tau\in[t_0, t]$, а верхняя и нижняя разрешающая функции — $L\times B$-измеримы по совокупности (τ, v) в силу теоремы об опорной функции [11].

Обозначим $V(\cdot)$ совокупность измеримых селекторов $v(\tau)$ отображения $V(\tau)$, $\tau\in[t_0,+\infty)$. Так как при каждом $t, t\geq t_0$, функция $\alpha^*(t,\tau,v)$ является $L\times B$-измеримой по совокупности (τ, v), она суперпозиционно измерима [6]. Аналогичным свойством обладает и нижняя разрешающая функция.

Введем множество

$$T(g(\cdot,t_0),\ \gamma(\cdot,\cdot))=\{t>t_0:\inf_{v(\cdot)\in V(\cdot)}\int_{t_0}^{t}\alpha^*(t,\tau,v(\tau))\,d\tau\geq 1\} \tag{8}$$

и функцию

$$t(g(\cdot,t_0),\gamma(\cdot,\cdot))=\inf\{t:t\in T(g(\cdot,t_0),\gamma(\cdot,\cdot))\}.$$

Если для некоторого $t, t>t_0$, $\alpha^*(t,\tau,v)\equiv+\infty$ для $v\in V(\tau)$, $\tau\in[t_0,t]$, то значение интеграла в (8) естественно положить равным $+\infty$, а соответствующее неравенство выполнено автоматически и, следовательно, $t\in T(g(\cdot,t_0),\ \gamma(\cdot,\cdot))$. Если же неравенство в (8) не имеет места при всех $t>t_0$, то положим $T(g(\cdot,t_0),\ \gamma(\cdot,\cdot))=\varnothing$, а $t(g(\cdot,t_0),\ \gamma(\cdot,\cdot))=+\infty$.

Далее положим

$$\mathsf{A}(t,\tau)=\bigcap_{v\in V(\tau)}\mathsf{A}(t,\tau,v),\ (t,\tau)\in\Delta.$$

Условие 2. Многозначное отображение $\mathfrak{A}(t,\tau)$ имеет непустые образы на конусе Δ.

При этом условии введем верхнюю и нижнюю разрешающие функции второго типа

$$\alpha^*(t,\tau)=\sup\{\alpha\geq 0:\alpha\in\mathfrak{A}(t,\tau)\},$$

$$\alpha_*(t,\tau)=\inf\{\alpha\geq 0:\alpha\in\mathfrak{A}(t,\tau)\}.$$

Они порождают числовые функции

$$\alpha^*(t)=\int_{t_0}^{t}\alpha^*(t,\tau)\,d\tau,\ \alpha_*(t)=\int_{t_0}^{t}\alpha_*(t,\tau)\,d\tau.$$

4. Основной результат

Теорема 2. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1)–(3) существует такая функция сдвига $\gamma(t,\tau)$, что выполнено условие 2, отображение $M(t)$ является выпуклозначным, а отображение $T\in T(g(\cdot,t_0),\ \gamma(\cdot,\cdot))$ имеет непустой образ и T — один из его элементов.

Тогда при $\alpha_*(T)<1$ траектория процесса (1) может быть приведена на терминальное множество в момент T с помощью подходящей квазистратегии. Если, к тому же, $\alpha^*(T)\geq 1$, то — в классе контруправлений.

Доказательство. Пусть $v(\tau)$, $v(\tau)\in V(\tau)$, $\tau\in[t_0,T]$, — произвольная измеримая функция. Предположим, что $\alpha^*(T,\tau,v)\neq+\infty$ для $v\in V(\tau)$, $\tau\in[t_0,T]$.

 ISSN 0572-2691

Рассмотрим контрольную функцию

$$h(t,t_0)=1-\int_{t_0}^{t}\alpha^*(T,\tau,v)d\tau-\int_{t}^{T}\alpha_*(T,\tau)\,d\tau,\ \ t\in[t_0,T]\,.$$

Функция $\alpha^*(T,\tau,v(\tau))$, как уже отмечалось ранее, суперпозиционно измерима, а $\alpha_*(T,\tau)$ измерима по τ в силу условия 2 и теоремы об опорной функции [11]. Поэтому $h(t,t_0)$ является абсолютно непрерывной на интервале $[t_0,T]$. Так как

$$h(t_0,t_0)=1-\int_{t_0}^{T}\alpha_*(T,\tau)\,d\tau=1-\alpha_*(T)>0$$

по условию теоремы 2, а

$$h(T,t_0)=1-\int_{t_0}^{T}\alpha^*(T,\tau,v(\tau))\,d\tau\le 0$$

по определению момента T, то в силу известной теоремы анализа существует момент времени $t_*,\ t_*\in[t_0,T],\ t_*=t(v(\cdot))$, что $h(t_*,t_0)=0$. Заметим, что момент t_* полностью зависит от предыстории управления второго игрока $v_{t_*}(\cdot)$.

Промежутки времени $[t_0,t_*)$ и $[t_*,T]$ называют обычно активным и пассивным [6]. Опишем способ управления первым игроком на каждом из них. Для этого рассмотрим компактнозначные отображения

$$U_1(\tau,v)=\{u\in U(\tau):\pi\Omega(T,\tau)\varphi\,(\tau,u,v)-\gamma(T,\tau)\in\alpha^*(T,t,v)\times$$

$$\times[M(T)-\xi(T)]\},\ \ \tau\in[0,t_*),\tag{9}$$

$$U_2(\tau,v)=\{u\in U(\tau):\pi\Omega(T,\tau)\varphi(\tau,u,v)-\gamma(T,\tau)\in\alpha_*(T,\tau)[M(T)-\xi(T)]\},\tau\in[t_*,T].$$

Здесь $v\in V(\tau)$. Из построения отображений $\mathrm{A}(T,\tau,v)$ и $\mathrm{A}(T,\tau)$ следует, что $u_i(\tau,v),\ i=1,2$, имеют непустые образы. В силу теоремы об обратном образе [11] многозначные отображения $U_1(\tau,v)$, $U_2(\tau,v)$ $L\times B$-измеримы [6], а следовательно, согласно теореме измеримого выбора [11] в каждом из них существует хотя бы по одному $L\times B$-измеримому селектору $u_1(\tau,v)$, $u_2(\tau,v)$, которые являются суперпозиционно измеримыми функциями.

Обозначим $u_1(\tau)=u_1(\tau,v(\tau)),\ u_2(\tau)=u_2(\tau,v(\tau))$ и выберем эти управления на активном и пассивном участках соответственно. Таким образом, на каждом из участков первый игрок использует контруправления, а предыстория управления второго игрока необходима лишь для определения момента переключения t_*.

Из представления (1) получим при $t=T$

$$\pi z(T)=\pi g(T,t_0)+\int_{t_0}^{T}\pi\Omega(T,\tau)\,\varphi(\tau,u(\tau),v(\tau))d\tau=\pi g(T,t_0)+$$

$$+\int_{t_0}^{t_*}\pi\Omega(T,\tau)\,\varphi(\tau,u_1(\tau),v(\tau))d\tau+\int_{t_*}^{T}\pi\Omega(T,\tau)\,\varphi(\tau,u_2(\tau),v(\tau))d\tau\pm\int_{t_0}^{T}\gamma(T,\tau)d\tau\,.$$

Далее с учетом соотношений (9) имеем

$$\pi z(T)\in\pi g(T,t_0)+\int_{t_0}^{t_*}\alpha^*(T,\tau,v(\tau))[M(T)-\xi(T)]d\tau+\int_{t_*}^{T}\alpha_*(T,\tau)[M(T)-\xi(T)]d\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{T}\gamma(T,\tau)d\tau=\xi(T)\left(1-\int_{t_0}^{t^*}\alpha^*(T,\tau,v(\tau))d\tau-\int_{t_*}^{T}\alpha_*(T,\tau)d\tau\right)+\int_{t_0}^{t^*}\alpha^*(T,\tau,v(\tau))M(T)d\tau+$$

$$+\int_{t_*}^{T}\alpha_*(T,\tau)M(T)d\tau=\left[\int_{t_0}^{t^*}\alpha^*(T,\tau,v(\tau))d\tau+\int_{t_*}^{T}\alpha_*(T,\tau)d\tau\right]M(T)=M(T).$$

При этом учтено равенство $h(t_*,t_0)=0$, а также закон выбора управлений первого игрока.

Случай $\alpha^*(T,\tau,v)=+\infty$ для некоторых $\tau\in[t_0,T]$, $v\in V(\tau)$, как следует из выражения (7), возможен лишь при условиях

$$0\in M(T)-\xi(T),\ \ 0\in\Omega(T,\tau)\varphi(\tau,U(\tau),v)-\gamma(T,t),$$

а в этом случае, очевидно,

$$\mathrm{A}(T,\tau,v)=[0,+\infty)\ \text{и}\ \alpha_*(T,\tau)=0.$$

Это дает возможность выбирать разрешающую функцию в тех точках $\tau\in[t_0,+\infty)$, где $\alpha^*(T,\tau,v(\tau))=+\infty$, произвольную конечную суперпозиционно измеримую функцию с одним лишь условием, чтобы в итоге обеспечивалось соотношение $h(t_*,t_0)=0$ для некоторого момента переключения $t_*, t_*\in[t_0,T]$. Тем самым построение управления первого игрока сведено к предыдущему случаю.

Если же $\alpha^*(T,\tau,v)=+\infty$ для всех $v\in V(\tau)$, $\tau\in[t_0,T]$, то этот случай соответствует первому прямому методу Понтрягина [6]. Действительно, включение

$$0\in\Omega(T,\tau)\varphi(\tau,U,v)-\gamma(T,\tau)\,\forall v\in V(\tau),\ \ \tau\in[t_0,T],$$

обеспечивает непустоту образов отображения $W(T,\tau)$ на игровом интервале $[t_0,T]$, а функция сдвига $\gamma(T,\tau)$ является измеримым селектором отображения $W(T,\tau)$ — селектором Понтрягина.

Из включения $0\in M(T)-\xi(T)$ вытекает соотношение

$$\pi g(T,t_0)\in M(T)-\int_{t_0}^{T}W(T,\tau)\,d\tau,$$

из которого в силу теоремы 1 следует возможность закончить игру (1)–(3) в момент T в классе стробоскопических стратегий.

Отдельно рассмотрим лишь случай $\alpha^*(T)\geq 1$, $\alpha_*(T)<1$. Введем контрольную функцию

$$h_1(t,t_0)=1-\int_{t_0}^{t}\alpha^*(T,\tau)\,d\tau-\int_{t}^{T}\alpha_*(T,\tau)\,d\tau.$$

Естественно рассмотреть лишь случай $\alpha^*(T,\tau)\neq+\infty$, $\tau\in[t_0,T]$. Тогда

$$h_1(t_0)=1-\alpha_*(T)>0,\ \ h_1(T)=1-\alpha^*(T)\leq 0.$$

В силу непрерывности функции $h_1(t)$ существует такой момент $t_*^1, t_*^1\in[t_0,T]$, что $h_1(t_*^1)=0$. При этом момент t_*^1 уже не зависит от $v(\cdot)$. Дальнейшие рассуждения аналогичны предыдущим ситуациям. На участках $[t_0,t_*^1)$ и $[t_*^1,T]$ рассмотрим многозначные отображения (9), причем в выражении для $U_1(\tau,v)$ вместо верхней разрешающей функции первого типа $\alpha^*(T,\tau,v)$ фигурирует верхняя разрешающая функция второго типа $\alpha^*(T,\tau)$. Используя свойство

ISSN 0572-2691

$L \times B$-измеримости компактнозначных отображений $U_1(\tau, v)$, $U_2(\tau, v)$, выберем в них $L \times B$-измеримые селекторы, которые и определяют допустимые управления на обоих участках, и обеспечивают необходимый результат.

5. Связь гарантированных времен первого прямого метода Понтрягина и метода разрешающих функций

Установим несколько утверждений, связывающих два упомянутых метода. Их доказательства аналогичны [6, 16].

Утверждение 1. Пусть задана игровая задача (1)–(3). Тогда для того, чтобы имело место условие Понтрягина $W(t, \tau) \neq \varnothing$, $(t, \tau) \in \Delta$, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая функция сдвига $\gamma(t, \tau)$, что

$$0 \in \mathrm{A}(t, \tau, v) \,\forall v \in V(\tau),\ (t, \tau) \in \Delta .$$

В этом случае функция сдвига является селектором Понтрягина.

Утверждение 2. Пусть для некоторого $t, t > t_0$, $W(t, \tau) \neq 0$, $\tau \in [t_0, t]$. Тогда включение

$$\pi g(t, t_0) \in M(t) - \int_{t_0}^{t} W(t, \tau) d\tau$$

выполнено тогда и только тогда, когда существует такой измеримый по τ селектор Понтрягина $\gamma(t, \tau)$, что $\xi(t, g(t, t_0), \gamma(t, \cdot)) \in M(t)$.

Из приведенных утверждений при выполнении условия Понтрягина автоматически вытекает неравенство

$$\inf_{\gamma(\cdot,\cdot)} t(g(\cdot, t_0), \gamma(\cdot,\cdot)) \le p(g(\cdot, t_0)) .$$

Утверждение 3. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1)–(3) выполнено условие Понтрягина, для некоторого селектора Понтрягина $\gamma(\cdot,\cdot)$ отображение $\mathrm{A}(t, \tau, v)$, $v \in V(\tau), (t, \tau) \in \Delta$, является выпуклозначным и $M(t)$ также выпуклозначно.

Тогда, если для всех T, $T \in T(g(\cdot, t_0), \gamma(\cdot,\cdot)) \neq \varnothing$, выполнено условие

$$\bigcap_{v \in V(\tau)} [W(T, \tau, v) - \alpha(T, \tau) M(T)] = W(T, \tau) - \alpha(T, \tau) M(T),\ \tau \in [t_0, T],$$

где

$$\alpha(T, \tau) = 1 \Big/ \alpha(T) \inf_{v \in V(\tau)} \alpha^*(T, \tau, v) ,\ \alpha(T) = \int_{t_0}^{T} \inf_{v \in V(\tau)} \alpha^*(T, \tau, v) d\tau ,$$

то

$$\inf_{\gamma(\cdot,\cdot)} t(g(\cdot, t_0), \gamma(\cdot,\cdot)) = p(g(\cdot, t_0)) .$$

Иллюстративные примеры игровых задач для нестационарных процессов приведены, например, в работах [17,18], развитие этих игровых задач и другие модели рассмотрены в работах [19–28].

Заключение

Математическая теория управления в условиях конфликта и неопределенности содержит широкий круг фундаментальных методов для управления динамическими процессами различной природы. В этой статье изучена игровая задача преследования для нестационарных управляемых процессов общего вида с цилиндрическим терминальным множеством. Исследование тесно связано с первым прямым методом Л.С. Понтрягина и методом разрешающих функций. Целью работы является вывод достаточных условий завершения игры за некоторое гарантированное время в пользу первого игрока и выбор управления, реализующего этот результат.

В развитие метода разрешающих функций введены верхняя и нижняя разрешающие функции двух типов в форме опорных функций специальных многозначных отображений. Это сделало возможным получение условий завершения игры в классе квази- и стробоскопических стратегий.

Глубокий анализ свойств многозначных отображений и их селекторов позволил выбрать измеримые управления благодаря теореме измеримого выбора. Дано сравнение гарантированных времен вышеупомянутых методов.

В.А. Пепеляєв, Ол.А. Чикрій, К.А. Чикрій

ПРО НЕСТАЦІОНАРНУ ЗАДАЧУ КЕРУВАННЯ РУХОМ У КОНФЛІКТНІЙ СИТУАЦІЇ

Математична теорія керування в умовах конфлікту та невизначеності нараховує широке коло фундаментальних методів для керування динамічними процесами різної природи. В даній роботі вивчається ігрова задача переслідування для нестаціонарних керованих процесів загального виду з циліндричною термінальною множиною. Дослідження тісно пов'язано з першим прямим методом Л.С. Понтрягіна та методом розв'язуючих функцій. Ціллю роботи є виведення достатніх умов закінчення гри за деякий гарантований час на користь першого гравця та вибір керування, що реалізує цей результат. У розвиток методу розв'язуючих функцій введені верхня та нижня розв'язуючі функції двох типів у формі опорних функцій спеціальних многозначних відображень. Це дало можливість отримати умови закінчення гри в класі квазі- та стробоскопічних стратегій. Глибокий аналіз властивостей многозначних відображень та їх селекторів дозволив вибирати вимірні керування на основі теореми вимірного вибору. Дано порівняння гарантованих часів вищезгаданих методів. При цьому використано властивості $L \times B$-вимірності ключових многозначних відображень та відповідних розв'язуючих функцій — опорних функцій цих відображень. Істотну роль у конструкції методу відіграє властивість суперпозиційної вимірності вищезгаданих об'єктів. У конкретних модельних прикладах, як правило, розв'язуючі функції є більшими позитивними коренями певних квадратних рівнянь, що дозволяє отримати розв'язок в аналітичному вигляді.

Ключові слова: конфліктно-керований процес, метод розв'язуючих функцій, многозначні відображення, умова Понтрягіна, вимірний вибір, стробоскопічні стратегії.

V.A. Pepelyaev, Al.A. Chikrii, K.A. Chikrii

ON NONSTATIONARY PROBLEM OF MOTION CONTROL IN CONFLICT SITUATION

Mathematical theory of control under conflict and uncertainty provides a wide range of fundamental methods to study controlled dynamic processes of various nature. In this paper the game problems of pursuit for nonstationary controlled processes of general type with cylindrical terminal set are considered. The investigation is closely related with the L.S. Pontryagin first direct method and the method of resolving functions. The purpose of the paper is to derive sufficient conditions for the game termination for some guaranteed time in favour of the first player and to provide the control realizing this result. In the development of the method of resolving functions, the upper and the lower resolving functions of two types are introduced in the form of support functions of special set-valued mappings. This made it possible to deduce conditions for the game termination in the class of quasi- and stroboscopic strategies. The in-depth analysis of properties of the special set-valued mappings and their selections, around which measurable controls are chosen by virtue of the measurable choice theorem, is provided. A comparison of the guaranteed times of the above-mentioned method is given. In so doing, the $L \times B$-measurability of key set-valued mappings and corresponding resolving functions — the support functions of these mappings, is used. The property for superpositional measurability of above mentioned objects plays essential role in the method design. In specific model examples, as a rule, the resolving functions are the greatest positive roots of certain quadratic equations that makes it possible to obtain solution in an analytic form.

Keywords: conflict-controlled processes, method of resolving functions, set-valued mapping, Pontryagin's condition, measurable selection, stroboscopic strategies.

1. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. М. : Наука, 1988. 2. 576 с.
2. Chikrii A.A. Conflict controlled processes. Boston; London; Dordrecht : Springer Science and Busines Media, 2013. 424 p.
3. Mordukhovich B.S. Variational analysis and generalized differentiation. I. Basic Theory. **330**. 582 p., II. Applications. **331**. 612 p., Berlin; Heidelberg; New York : Springer, 2006.
4. Половинкин Е.С. Многозначный анализ и дифференциальные включения. М. : Физматлит, 2014. 523 с.
5. Локк А.С. Управление снарядами. М. : ГИТТЛ, 1957. 776 с.
6. Chikrii A.A. An analytical method in dynamic pursuit games. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 2010. **271**. P. 69–85.
7. Чикрий А.А., Белоусов А.А. О линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями. *Труды Института математики и механики УрО РАН*. 2009. **15**, № 4. С. 290–301.
8. Чикрий А.А. Дифференциальные игры с несколькими преследователями. *Banach Center Publications*. 1985. **14**, № 1. P. 81–107.
9. Chikrii A.A. Multivalued mappings and their selections in game control problems. *J.of Automation and Information Sciences*. 1995. **27**. P. 27–38.
10. Pittsyk M., Chikrii A.A. On a group pursuit problem. *J. of Applied Mathematics and Mechanics*. 1982. **46**, N 5. P. 584–589.
11. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-valued analysis. Boston; Basel; Berlin : Birkhauser, 1990. 461 p.
12. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
13. Hajek O. Pursuit games. New York: Academic Press, 1975. 12. 266 p.
14. Aumann R.J. Integrals of set-valued functions. J. Math. Anal. Appl. 1965. **12**. P. 1–12.
15. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М. : Наука, 1985. 224 с.
16. Chikrii A.A., Chikrii V.K. Image structure of multivalued mappings in game problems of motion control. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2016. **48**, N 3. P. 20–35.
17. Пепеляев В.А., Чикрий Ал.А. Об игровых задачах динамики для нестационарных управляемых процессов. *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики»*. 2017. № 2. С. 7–16.
18. Наконечный А.Г., Мащенко С.О., Чикрий В.К. Управление движением в условиях противодействия. *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики».* 2018. № 1. С. 53–71.
19. Baranovska L.V. Method of resolving functions for the differential-difference pursuit game for different-inertia objects. *Studies in Systems, Decision and Control*. 2016. **69**. P. 159–176.
20. Chikrii A.A., Chikrii G.Ts. Matrix resolving functions in game problems of dynamics. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 2015. **291**, suppl. 1. P. 56–65.
21. Chikrii G.Ts. Using the effect of information delay in differential pursuit games. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2007. **43**, N 2. P. 233–245.
22. Chikrii A.A., Chikrii G.Ts., Volyanskiy K.Y. Quasilinear positional integral games of approach. *Journal of Automation and Information Scienes*. 2001. **33**, N 10. P. 31–43.
23. Чикрий А.А., Дзюбенко К.Г. Билинейные марковские процессы поиска движущихся объектов. *Проблемы управления и информатики*. 1997. № 1. С. 92–107.
24. Chikrii A.A., Eidelman S.D. Game problems for fractional quasilinear systems. *Int. Journal Computers and Mathematics with Applications, Pergamon*. 2002. **44**. P. 835–851.
25. Пилипенко Ю.В., Чикрий А.А. Колебательные конфликтно-управляемые процессы. *Прикладная математика и механика*. 1993. **57**, № 3. С. 3–14
26. Chikrii A.A. Game dynamic problems for systems with fractional derivatives. *Springer Optimization and its Applications*. 2008. **17**. P. 349–387.
27. Чикрий А.А., Эйдельман С.Д. Игровые задачи управления для квазилинейных систем с дробными производными Римана–Лиувилля. *Кибернетика и системный анализ*. 2001. № 6. С. 66–99.
28. Chikrii A.A. The problem of avoidance for controlled dynamic objects. *Int. J. Game Theory and Applications*. 1997. **3**. P. 7–20.

Получено 11.03.2019