УДК 519.85

Л.Н. Колечкина, А.Н. Нагорная, В.В. Семенов

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ НА КОМБИНАТОРНОМ МНОЖЕСТВЕ РАЗМЕЩЕНИЙ

Ключевые слова: задача условной оптимизации, комбинаторное множество размещений, экстремум функции, матрица нормализации.

Введение

Исследования задач комбинаторной оптимизации составляют довольно широкий спектр математических моделей, связанных с необходимостью решения различных важных практических проблем оптимального планирования, управления и проектирования [1–4]. Многие модели прикладных задач являются задачами комбинаторной оптимизации, свойства которых широко освещаются в работах как зарубежных, так и отечественных авторов [1–10]. Под задачами комбинаторной оптимизации понимается оптимизация некоторой заданной функции на комбинаторном множестве. В случае несколько целевых функций имеем многокритериальные задачи, различные классы которых достаточно подробно исследованы в [10–12]. Примерами комбинаторных множеств являються множества перестановок, размещений, сочетаний и т.д.

Следует отметить, что комбинаторные оптимизационные задачи — одни из самых сложных с вычислительной точки зрения. Универсальный метод решения таких задач — полный перебор вариантов, который может применяться для задач малой размерности, но не дает желаемого результата на больших размерностях. Безусловно, существуют и другие методы решения таких задач, но, как правило, каждый из них имеет свои преимущества и недостатки. Поэтому возникает необходимость в разработке новых методов, как точных, так и приближенных, которые учитывали бы специфику целевой функции и ограничений задачи оптимизации на комбинаторных множествах.

Особый интерес представляют свойства комбинаторных множеств при их отображении в арифметическое евклидово пространство. Такие множества названы евклидовыми комбинаторными [4, 13]. Важным классом евклидовых комбинаторных множеств являются вершинно-расположенные множества пространства R^n, обладающие тем свойством, что они совпадают с вершинами своей выпуклой оболочки [14, 15]. Заметим, что любое конечное множество $E \subset R^n$ можно разложить на его вершинно-расположенные подмножества. Методы оптимизации линейных, квадратичных и выпуклых функций для различных классов вершинно-расположенных множеств рассмотрены в работах [16–25], а в многокритериальной постановке — в [26–31].

Современные исследования комбинаторных множеств, связанные с понятием комбинаторной конфигурации, рассмотрены в [9, 31]. Модели и методы оптимизации для различных классов комбинаторных конфигураций и их приложения рассмотрены, в частности, в [32–38].

В данной статье формулируется постановка задачи оптимизации на комбинаторном множестве размещений и предложен метод ее решения с учетом выполнения условий, налагаемых на приросты ограничений и целевой функции. Новый метод обеспечивает нахождение оптимального решения оптимизационной задачи на множестве размещений с учетом дополнительных ограничений за определенное количество шагов. Для демонстрации работы метода представлены численные эксперименты, характеризующие его конечность и результативность, а также приведен анализ их результатов.

Постановка задачи

Пусть задано некоторое конечное множество A из k различных элементов. Из числа k элементов выбраны различные n ($n \le k$). Упорядоченный набор из n различных элементов некоторого множества k различных элементов называется размещением из k элементов по n и обозначается A_k^n.

Рассмотрим оптимизационную задачу вида

$$Z(\Phi, A_k^n) : \mathrm{extr}\{\Phi(a) \mid a \in A \subset A_k^n\}, \qquad (1)$$

где A — некоторое подмножество комбинаторного множества размещений A_k^n, определяемое заданной системой ограничений.

Осуществим биективное отображение множества A_k^n в пространство R^n, поставив каждому элементу $a \in A_k^n$ в соответствие вектор $x \in R^n$. Образ множества A_k^n обозначим $E_k^n \subset R^n$. В результате имеем задачу комбинаторной оптимизации в евклидовой постановке (задачу евклидовой комбинаторной оптимизации)

$$Z(F, \mathring{A}_k^n) : \mathrm{extr}\{F(x) \mid x \in D \subset \mathring{A}_k^n\}, \qquad (2)$$

$$D = \{x \in \mathring{A}_k^n \subset R^n \mid Gx \le (\ge) b\},$$

где G — $m \times n$-матрица, $b \in R^m$, причем $\Phi(a) = F(x)$ при $a \in A_k^n$, $x \in E_k^n$.

В данной статье рассмотрим класс линейных целевых функций, положив

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j .$$

Дополнительные линейные ограничения образуют многогранное множество $D \subset R^n$.

Рассмотрим метод решения задачи (1), который использует построение матрицы нормализации.

Метод решения комбинаторной задачи условной оптимизации

Шаг 1. Построение матрицы нормализации. Согласно порядку неубывания коэффициентов целевой функции осуществляется перестановка коэффициентов заданных ограничений, по результатам которой составляется матрица нормализации (рис. 1). Она формируется на основе переобозначения порядка следования коэффициентов дополнительных ограничений в формулировке задачи (2). Коэффициенты дополнительных ограничений преобразовываются в новые коэффициенты путем транспозиции элементов с учетом условия упорядочения их по неубыванию: $a'_{11} \le a'_{12} \le \ldots \le a'_{1n}$, $a'_{21} \le a'_{22} \le \ldots \le a'_{2n}$, $\ldots$, $a'_{m1} \le a'_{m2} \le \ldots \le a'_{mn}$. При такой сортировке изменится местоположение коэффициента. Таким образом в матрицу записывается новое местоположение коэффициентов.

n_f	u_1	u_2	…	u_{n-1}	u_n
n_{g_1}	u'_{11}	u'_{12}	…	u'_{1n-1}	u'_{1n}
n_{g_2}	u'_{21}	u'_{22}	…	u'_{2n-1}	u'_{2n}
…	...	...	...	...	...
n_{g_m}	u'_{m1}	u'_{m2}	…	u'_{mn-1}	u'_{mn}

Рис. 1

В соответствии с [32] n_f, n_{g_1}, n_{g_2}, …, n_{g_m} — номер места соответствующего элемента множества размещений; для целевой функции — n_f, для ограничений — n_{g_1}, n_{g_2}, …, n_{g_m}, где $\Delta u_1 : N \to C : \Delta u_1 = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & ... & x_m^1 \\ u^{-1}(1) & u^{-1}(2) & ... & u^{-1}(m) \end{pmatrix}$.

Следует отметить, что независимо от поиска максимума или минимума данная матрица обеспечивает преобразование полученного решения в необходимую форму для функции цели или ограничений.

Для удобства расчетов можно составить матрицу соответствия каждого элемента решения определенной позиции в зависимости от рассматриваемого ограничения (рис. 2).

1	n_f	u_1	u_2	…	u_{n-1}	u_n
2	f	x_1^f	x_2^f	…	x_{n-1}^f	x_n^f
3	n_{g_1}	u'_{11}	u'_{12}	…	u'_{1n-1}	u'_{1n}
4	g'_1	$x_1^{g'_1}$	$x_2^{g'_1}$	…	$x_{n-1}^{g'_1}$	$x_n^{g'_1}$
5	n_{g_2}	u'_{21}	u'_{22}	…	u'_{2n-1}	u'_{2n}
6	g'_2	$x_1^{g'_2}$	$x_2^{g'_2}$	…	$x_{n-1}^{g'_2}$	$x_n^{g'_2}$
…	…	…	…	…	…	…
m–1	n_{g_m}	u'_{m1}	u'_{m2}	…	u'_{mn-1}	u'_{mn}
m	g'_m	$x_1^{g'_m}$	$x_2^{g'_m}$	…	$x_{n-1}^{g'_m}$	$x_n^{g'_m}$

Рис. 2

В данной матрице g'_1, g'_2, …, g'_m определяют элементы точки множества размещений для целевой функции f и дополнительных ограничений; (x_1^f, x_2^f, …, …, x_n^f) — опорное решение задачи.

Шаг 2. Нахождение первого опорного решения. Согласно определению множество размещений учитывает порядок следования элементов. Упорядочим координаты точки x таким образом: для максимума по возрастанию $(x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n)$, соответственно, для минимума по убыванию $(x_1 > x_2 > ... > x_{n-1} > x_n)$, поэтому при нахождении максимума (минимума) функции начальной выбирается «максимальная» («минимальная») точка множества размещений $(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n)$. Затем производится расчет:

$$f_1^{\max(\min)}(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n),$$

$$g_1'(x_1^1, x_2^1, ..., x_{n-1}^1, x_n^1) = b_1' \le (\ge) b_1,$$

$$g_2'(x_1^2, x_2^2, ..., x_{n-1}^2, x_n^2) = b_2' \le (\ge) b_2, \quad (3)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$g_i'(x_1^i, x_2^i, ..., x_{n-1}^i, x_n^i) = b_i' \le (\ge) b_i.$$

Для дальнейшего поиска экстремума функции составляются необходимые условия для приростов ограничений:

$$\Delta g_1' \ge (\le) b_{11}, \quad b_{11} = b_1 - b_1',$$

$$\Delta g_2' \ge (\le) b_{22}, \quad b_{22} = b_2 - b_2', \quad (4)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\Delta g_i' \ge (\le) b_{ii}, \quad b_{ii} = b_i - b_i'.$$

Если данная начальная точка множества размещений удовлетворяет всем ограничениям, то найдено первое опорное решение. Далее необходимо сформировать исходные данные для дальнейшего его улучшения: $g'_{1_{\text{ic}}}, g'_{2_{\text{ic}}}, ...,$ $..., g'_{i_{\text{ic}}}, f_{1_{\text{ic}}}$ и перейти к шагу 3.

Для нахождения значений приростов функции Δf и ограничений Δg_i необходимо использовать следующие формулы [32]:

$$\Delta f = \Delta f_2 - \Delta f_1 = (x_i^{f_2} * c_j + x_j^{f_2} * c_i) - (x_j^{f_1} * c_j + x_i^{f_1} * c_i), \quad (5)$$

$$\Delta g = \Delta g_2 - \Delta g_1 = (x_i^{g_2} * c_j + x_j^{g_2} * c_i) - (x_j^{g_1} * c_j + x_i^{g_1} * c_i). \quad (6)$$

Если же ограничения не выполняются, то в данном случае необходимо выбрать следующую точку из множества размещений и перейти к проверке условий (4).

Шаг 3. Улучшение опорного решения. Улучшение опорного решения происходит за счет выбора следующей точки из множества размещений по убыванию (возрастанию) целевой функции, согласно главному условию проверки:

$$\Delta f^{\max} > 0 \; (\Delta f^{\min} < 0). \quad (7)$$

Если данное условие не выполняется, то полученное опорное решение нельзя улучшить, а следовательно, найдено оптимальное решение.

В противном случае выбирается точка из множества размещений по убыванию (возрастанию) целевой функции и осуществляется проверка ограничений по формулам (4) шага 2.

Необходимо отметить, что условия (4) являются достаточными для поиска оптимального решения, а выполнение неравенства (7) необходимо для поиска оптимального решения.

Далее рассмотрим примеры, для решения которых будет использован изложенный метод.

Пример 1. Необходимо найти максимальное значение функции $f(x) =$ $= -5x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 12x_4$ на множестве размещений A_5^4 чисел $(1, 2, 3, 4, 5)$ с учетом следующих линейных ограничений:

$$\begin{cases} g_1 = x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 \geq 6, \\ g_2 = 7x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 \leq 18, \\ g_3 = 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 \leq 30. \end{cases}$$

Решение. Осуществляем нормализацию линейных ограничений:

$$\begin{cases} g_1 = -2x_2 + x_1 + 3x_3 + 5x_4 \geq 6, \\ g_2 = -4x_3 + x_4 + 2x_2 + 7x_1 \leq 18, \\ g_3 = -3x_2 + 4x_4 + 5x_1 + 6x_3 \leq 30. \end{cases}$$

$$\begin{cases} g'_1 = -2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 \geq 6, \\ g'_2 = -4x_1 + x_2 + 2x_3 + 7x_4 \leq 18, \\ g'_3 = -3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 30. \end{cases}$$

Соответственно матрица нормализации будет иметь следующий вид:

$$\begin{array}{ccccc} n_f & 1 & 2 & 3 & 4 \\ n_{g_1} & 2 & 1 & 3 & 4 \\ n_{g_2} & 3 & 4 & 2 & 1 \\ n_{g_3} & 2 & 4 & 1 & 3. \end{array}$$

Найдем максимальное значение функции, выбрав точку (2, 3, 4, 5) из множества размещений, в которой достигается наибольшее значение целевой функции, тогда $f_1^{\max}(2, 3, 4, 5) = 60$.

Проверяем выполнение дополнительных ограничений, предварительно переведя данную точку в необходимую форму: $g'_1(3, 2, 4, 5) = 33 \geq 6$, $g'_2(4, 5, 3, 2) = 9 \leq 18$.

Поскольку $g'_3(3, 5, 2, 4) = 45 > 30$, неравенство не выполняется, поэтому данная точка не является допустимым решением.

Для дальнейшего поиска поочередно должны выполняться следующие условия: $\Delta g'_1 \geq -27$, $\Delta g'_2 \leq 9$, $\Delta g'_3 \leq -15$.

Следующая точка выбирается из множества размещений по убыванию значения целевой функции. Аналогично предыдущим вычислениям проверяем выполнение дополнительных ограничений в точке $(1, 3, 4, 5)$, вычисляя только приросты дополнительных ограничений $\Delta g'_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Тогда $\Delta g'_1 = -1 > -27$, $\Delta g'_2 = -7 < 9$, но $\Delta g'_3 = -5 > -15$. Последнее неравенство не выполняется, следовательно, рассматривается следующая точка из множества размещений и осуществляются аналогичные вычисления.

Для точки $(1, 2, 4, 5): \Delta g'_1(2, 1, 4, 5) = -1$, $\Delta g'_2(4, 5, 2, 1) = -9$, $\Delta g'_3(2, 5, 1, 4) = = -2 > -15$.

Для точки $(1, 4, 3, 5): \Delta g'_1(4, 1, 3, 5) = -6$, $\Delta g'_2(3, 5, 4, 1) = -1$, $\Delta g'_3(4, 5, 1, 3) = = -14 > -15$.

Точка $(1, 2, 3, 5): \Delta g'_1(2, 1, 3, 5) = -2$, $\Delta g'_2(3, 5, 2, 1) = -5$, $\Delta g'_3(2, 5, 1, 3) = = -8 > -15$.

Для точки $(1, 3, 2, 5): \Delta g'_1(3, 1, 2, 5) = -7$, $\Delta g'_2(2, 5, 3, 1) = 1$, $\Delta g'_3(3, 5, 1, 2) = = -17 < -15$.

Соответственно $g'_1(3,1,2,5) = g'_1(3,2,4,5) + \Delta g'_1(3,1,2,5) = 33 - 7 = 26 \geq 6$,

$$g'_2(2, 5, 3, 1) = g'_2(4, 5, 3, 2) + \Delta g'_2(2, 5, 3, 1) = 9 + 1 = 10 \leq 18,$$

$$g'_3(3, 5, 1, 2) = g'_3(3, 5, 2, 4) + \Delta g'_3(3, 5, 1, 2) = 45 - 17 = 28 \leq 30.$$

Итак, все неравенства выполняются, поэтому найдено первое опорное решение:

$$f_{1_{ic}}(1, 3, 2, 5) = f_1^{\max}(2, 3, 4, 5) + \Delta f_1 = 60 - 3 = 57.$$

Для дальнейшего поиска оптимальных решений данные значения следует считать начальными: $g'_{1_{ic}}(3, 1, 2, 5) = 26$, $g'_{2_{ic}}(2, 5, 3, 1) = 10$, $g'_{3_{ic}}(3, 5, 1, 2) = 28$, $f_{1_{ic}}(1, 3, 2, 5) = 57$.

Поскольку необходимо найти максимум целевой функции, а выбор точек из множества размещений осуществляется в порядке убывания, необходимо соблюдать условие $\Delta f > 0$.

Рассмотрим следующую точку $(1425): \Delta f_1 = -2*4 + 2*3 = -2 < 0$, значит, значение целевой функции уменьшится на две единицы, поэтому следует прекратить поиск решения.

Поскольку значение целевой функции в следующей точке меньше, чем в предыдущей, точка $(1, 3, 2, 5)$ является оптимальным решением $f_{\max}(1, 3, 2, 5) = 57$.

Пример 2. Найти минимальное значение функции $f(x) = -2x_1 + 4x_2 + 11x_3$ на множестве размещений A_5^3 из чисел $(1, 2, 3, 4, 5)$ с учетом следующих линейных ограничений:

$$\begin{cases} g_1 = 4x_1 + x_2 - 3x_3 \le 10, \\ g_2 = -6x_1 + 9x_2 - 2x_3 \ge 17, \\ g_3 = -x_1 + 7x_2 + 5x_3 \ge 28. \end{cases}$$

Решение. Нормализуем дополнительные ограничения согласно коэффициентам целевой функции:

$$\begin{cases} g'_1 = -3x_1 + x_2 + 4x_3 \le 10, \\ g'_2 = -6x_1 - 2x_2 + 9x_3 \ge 17, \\ g'_3 = -x_1 + 5x_2 + 7x_3 \ge 28. \end{cases}$$

Запишем матрицу нормализации:

n_f	1	2	3
n_{g_1}	3	2	1
n_{g_2}	1	3	2
n_{g_3}	3	1	2

Для нахождения минимума целевой функции выбираем наименьшую точку множества размещений $(3, 2, 1)$, соответственно $f_1^{\min}(3, 2, 1) = 13$.

Пользуясь матрицей нормализации, проверяем выполнение ограничений: $g'_1(1, 2, 3) = 11 \ge 10$, $g'_2(3,1,2) = \ = -2 \le 17$, $g'_3(1, 3, 2) = 28 \ge 28$. Поскольку выполняется только последнее неравенство, следовательно, данная точка не является допустимым решением. Соответственно, имеют место условия: $\Delta g'_1 \le -1$, $\Delta g'_2 \ge 19$, $\Delta g'_3 \ge 0$.

Следующая точка выбирается по возрастанию точки $(4, 2, 1)$. Находим приросты функций-ограничений. Для $\Delta g'_1 = 4 > 0$, что противоречит условию $\Delta g'_1 \le -1$, поэтому проверка ограничений не осуществляется.

Для точки (521): $\Delta g'_1(1, 2, 5) = 8 > -1$, следовательно, не рассматривается.

Для точки (231): $\Delta g'_3 \ge -9$, $\Delta g'_2(2, 1, 3) = 15 \le 19$, не рассматривается.

Точка $(431): \Delta g_1'(1,3,4) = 5 > -1$, не рассматривается.

Для точки $(531): \Delta g_1'(1,3,5) = 9 > -1$, не рассматривается.

Для точки (241): $\Delta g_1'(1,4,2) = -2 \le -1$, $\Delta g_2'(2,1,4) = 24 \ge 19$, $\Delta g_3'(1,2,4) = 9 > 0$.

Соответственно $g_1'(1,4,2) = g_1'(1,2,3) + \Delta g_1'(1,4,2) = 11 - 2 = 9 \le 10$,

$$g_2'(2,1,4) = g_2'(3,1,2) + \Delta g_2'(2,1,4) = -2 + 24 = 22 \ge 17,$$

$$g_3'(1,2,4) = g_3'(1,3,2) + \Delta g_3'(1,2,4) = 28 + 9 = 37 \ge 28.$$

Поскольку все неравенства выполняются, найдено первое опорное решение: $f_{1_{ic}}(2,4,1) = f_1^{\min}(3,2,1) + \Delta f_1 = 13 + 10 = 23.$

Итак, исходными данными для дальнейшего поиска оптимального решения будут:

$$g_{1_{ic}}'(1,4,2) = 9,\ g_{2_{ic}}'(2,1,4) = 22,\ g_{3_{ic}}'(1,2,4) = 37,\ f_{1_{ic}}(2,4,1) = 23.$$

Соответственно имеют место условия: $\Delta g_1' \le 1$, $\Delta g_2' \ge -5$, $\Delta g_3' \ge -9$.

Поскольку необходимо найти минимальное значение функции цели, а выбор точек из множества размещений осуществляется в порядке возрастания, необходимо соблюдать следующее условие: $\Delta f < 0$.

Рассмотрим точку $(2,4,1): \Delta f_1 = -2*3 + 2*2 = -2 < 0$, поэтому необходимо осуществить проверку ограничений по приростам функций: $\Delta g_1'(1,4,3) = 4 > 1$, неравенство не выполняется.

Точка $(5,4,1)$: $\Delta f_2 = -6 < 0$, $\Delta g_1'(1,4,5) = 12 > 1$. Неравенство не выполняется.

Точка $(2,5,1): \Delta f_3 = 4 > 0$, поскольку функция возрастает и координаты точки увеличиваются, выполнение шагов метода прекращается.

Итак, точка $(2,4,1)$ является оптимальным решением, $f_{\min}(2,4,1) = 23.$

Для решения примера 2 по предложенному методу с помощью программы на языке программирования C++ был проведен вычислительный эксперимент, с учетом возрастания количества элементов выборки множества размещений при фиксированном $n = 3$. Результаты вычислительных экспериментов представлены в таблице, где k — количество элементов, из которых строиться множество размещений; $|A_k^3|$ — количество элементов множества размещений; r — количество точек, которые перебираються в процессе отыскания оптимального решения; s — количество шагов нахождения оптимального решения.

Таблица

№	k	$\lvert A_k^3 \rvert$	r	s	(r / A_k^3), %
1	4	24	7	9	29,17
2	5	60	11	13	18,33
3	6	120	13	15	10,83
4	7	210	17	19	8,10
5	8	336	20	22	5,95
6	9	504	23	25	4,56
7	10	720	26	28	3,61
8	11	990	29	31	2,93
9	12	1320	32	34	2,42
10	13	1716	35	37	2,04
11	14	2184	38	40	1,74
12	15	2730	41	43	1,50
13	16	3360	44	46	1,31
14	17	4080	47	49	1,15
15	18	4896	50	51	1,02

Анализируя результаты вычислительного эксперимента, следует отметить, что при возрастании количества элементов выборки множества размещений возрастает количество точек, которые перебираються (r), и количество шагов отыскания оптимального решения (s), что очевидно. При этом значительное воз-

ISSN 0572-2691

растание колличества элементов множества A_k^3 не приводит к стремительному росту показателей r и s.

Как показано в таблице, процентное соотношение количества точек, которые перебираються в процессе поиска оптимального решения, и количества элементов множества размещений, значительно уменьшается, что подтверждает эффективное использование предложенного метода. Например, при $9 < k < 18$ используется всего лишь от 1 % до 5 % элементов множества размещений, в то же время, при $k = 4, 5, 6$, от 11 % до 29 %.

Необходимо отметить, что предложенный метод позволяет за считанные шаги ($s = 9, 13, 15, ..., 51$) найти экстремум функции на множестве размещений. Это говорит о том, что количество шагов метода — конечное число, которое ограничивается невыполнением условия (7). Если данное условие не выполняется, то данное опорное решение нельзя улучшить, а следовательно, найдено оптимальное решение и дальнейшее выполнение шагов метода приостанавливается.

Заключение

В статье предложен новый метод решения комбинаторной задачи условной оптимизации на множестве размещений. Его суть заключается в нахождении первого опорного решения, на базе которого осуществляется поиск оптимального, за счет улучшения предыдущего.

Предложеный метод состоит из трех шагов, где на начальном этапе строятся матрицы нормализации и соответствия, которые обеспечивают преобразование элементов множества размещений в необходимую форму для целевой функции и заданных ограничений. Следует отметить, что для нахождения первого опорного решения не нужно делать проверку всех ограничений, достаточно рассчитать приросты ограничений $\Delta g_i'$ (5). Если допустимое решение удовлетворяет данным неравенствам, то фиксируются начальные данные, которые будут условиями проверки для следующего улучшенного решения. Улучшение опорного плана происходит согласно условию (7). Значение функции цели находится за счет нахождения приростов Δf (6), без необходимости вычисления всей предыдущей функции. Случай невыполнения условия (7) обеспечивает нахождение оптимального решения.

Рассмотрены числовые примеры поиска экстремумов функций на множестве размещений, а также представлен числовой эксперимент для случая $\left|A_k^3\right|$, при возрастании количества элементов выборки множества размещений (k). Также следует отметить, что количество шагов нахождения оптимального решения не увиличивается значительно, при резком возрастании количества элементов множества размещений. Например, для $\left|A_{10}^3\right| = 720$ оптимальное решение было найдено за 28 шагов метода, при рассмотрении 26 элементов множества размещений, для $\left|A_{18}^3\right| = 4896$ поиск оптимального решения осуществлен за 51 шаг при рассмотрении 50 элементов множества размещений.

Анализируя показатель процентного соотношения количества рассмотренных точек при нахождении оптимального решения и количества элементов множества размещений, следует отметить его значительное уменьшение, что свидетельствует об эффективности предлагаемого метода.

Данный метод позволяет значительно упростить процедуру поиска оптимального решения, поскольку неравенства приростов ограничений позволяют сразу определить, будет ли точка множества размещений опорным решением. Не нужно делать сложные расчеты всех ограничений и целевой функции, достаточно найти прирост ограничения и функции в случае улучшения решения.

Итак, пользуясь данным методом, за конечное число шагов можно найти экстремум функции на множестве размещений. Дальнейшие исследования будут направлены на адаптацию метода для других комбинаторных множеств и моделирования процессов и явлений с использованием метода.

Л.М. Колєчкіна, А.М. Нагірна, В.В. Семенов

МЕТОД ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧІ УМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ НА КОМБІНАТОРНІЙ МНОЖИНІ РОЗМІЩЕНЬ

Розглянуто постановку задачі оптимізації на комбінаторій множині розміщень і запропоновано метод її розв'язання з урахуванням виконання умов, що накладаються на прирости обмежень і цільової функції. Метод складається з трьох кроків, де на початковому етапі будуються матриці нормалізації та відповідності, які забезпечують перетворення елементів множини розміщень в необхідну форму для цільової функції і заданих обмежень. Другий крок полягає в знаходженні першого опорного розв'язку з урахуванням властивості множини розміщень. Слід зазначити, що для знаходження першого опорного розв'язку достатньо розрахувати прирости обмежень. Якщо допустимий розв'язок задовольняє даним нерівностям, то фіксуються початкові дані, які будуть умовами перевірки для наступного покращеного розв'язку. Значення функції цілі знаходиться розрахунком приростів цільової функції без необхідності обчислення всієї попередньої функції. Третій крок методу забезпечує знаходження оптимального розв'язку за безпосереднього покращення знайденого опорного розв'язку. На даному етапі сформульовано достатні і необхідні умови для пошуку оптимального розв'язку. Розглянуто числові приклади пошуку екстремумів функцій на множині розміщень, а також представлено числовий експеримент для випадку $\left|A_k^3\right|$, при зростанні кількості елементів вибірки множини розміщень (k). Також слід зазначити, що кількість кроків знаходження оптимального розв'язку істотно не збільшується за різкого зростання кількості елементів множини розміщень. Аналізуючи показник процентного співвідношення кількості розглянутих точок при знаходженні оптимального розв'язку до кількості елементів множини розміщень, слід зазначити його значне зменшення, що свідчить про ефективність запропонованого методу. Отже, користуючись даним методом, можна за скінчене число кроків знайти екстремум функції на множині розміщень.

Ключові слова: задача умовної оптимізації, комбінаторна множина розміщень, екстремум функції, матриця нормалізації.

L.N. Kolechkina, A.N. Nagornaya, V.V. Semenov

METHOD OF SOLVING THE PROBLEM OF CONDITIONAL OPTIMIZATION ON A COMBINATORIAL SET OF ARRANGEMENTS

Defining a problem of optimization on a combinatorial set of arrangements is considered and presenting the method of its solution, taking into account satisfaction of the conditions imposed on gains of restrictions and objective function is proposed. The method consists of three steps where at the initial stage matrixes of normalization and compliance are built, which provide elements arrangement set transformation to a necessary form for criterion function and the defined restrictions. The second step consists in finding the first basic solution, taking into account property of arrangement set. It should be noted that for finding the first basic solution it is enough to calculate gains of restrictions. If the allowable solution satisfies presented inequalities, then initial data is fixed, which will be the verification conditions for the following improved solution. The value of the goal function is determined at the expense of calculating the increments of the target function, without the need to calculate the entire previous function. The third step of a method provides finding of an optimal solution at direct improvement of the found basic solution. On this step sufficient and necessary conditions for search of an optimal solution are formulated. Numerical examples of search functions's extrems on a set of arrangements are considered and also the numerical experiment for the case $\left|A_k^3\right|$ is presented, at increase of sample units quantity of an arrangements set (k). Also it should be noted that the finding steps quantity of an optimal solution considerably does not increase, at sharp increase of elements quantity in a set of arrangements. Analyzing an indicator of percentage correlation of the considered points quantity when finding an optimal solution to quantity of elements on an arrangements set, it should be noted its considerable reduction that gives evidence about efficiency of the offered method. So, this method allows to find a function extremum on a set of arrangements during a finite number of steps.

Keywords: conditional optimization problem, combinatorial set of allocations, function extremum, normalization matrix.

1. Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения, исследования. Київ : Наук. думка, 2003. 261с.
2. Згуровский М.З., Павлов А.А. Труднорешаемые задачи комбинаторной оптимизации в планировании и принятии решений. Київ : Наук. думка, 2016. 715 с.
3. Colbourn C.J., Dinitz J.H. Handbook of combinatorial designs, second edition. CRC Press, 2010. 784 p.
4. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. Киев: Наук.думка, 1986. 268 с.
5. Korte B., Vygen J. Combinatorial optimization: theory and algorithms. Heidelberg; New York : Springer, 2018. 698 p.
6. Pardalos P.M., D-Z. Du, Graham R.L. Handbook of combinatorial optimization. New York : Springer, 2013. 3409 p.
7. Papadimitriou C.H., Steiglitz K. Combinatorial optimization: algorithms and complexity. Mineola : Dover Publications, 2013. 528 p.
8. Sergienko I.V., Shilo V.P. Modern approaches to solving complex discrete optimization problems. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2016, **48**, N 1. P. 15–24.
9. Hulianytskyi L., Riasna I. Formalization and classification of combinatorial optimization problems. Optimization Methods and Applications, S. Butenko et al.(eds.). New York : Springer, 2017. P. 239–250.
10. Семенова Н.В., Колєчкіна Л.М. Векторні задачі дискретної оптимізації на комбінаторних множинах: методи дослідження та розв'язання. Київ: Наук. думка, 2009. 266 с.
11. Semenova N.V., Kolechkina L.N., Nagornaya A.N. Solution and investigation of vector problems of combinatorial optimization on a set of permutations. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2008, **40**, N 12. P. 67–80.
12. Koliechkina L. N., Dvirna O. A., Nagornaya A. N. Modified coordinate method to solve multicriteria optimization problems on combinatorial configurations. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. **59**, N 4. P. 620–626.
13. Стоян Ю. Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. Київ: Ін-т системн. дослідж. освіти, 1993. 188 с.
14. Yakovlev S. V. The theory of convex continuations of functions on vertices of convex polygons. *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 1994. **34**, N 7. P. 959–965.
15. Yakovlev S. Convex extensions in combinatorial optimization and their applications. Springer *Optimization Methods and Applications*. 2017. **130**. P. 567–584.

16. Yakovlev S.V., Valuiskaya O.A. Optimization of linear functions at the vertices of a permutation polyhedron with additional linear constraints. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2001. **53**, N 9. P. 1535–1545.
17. Pichugina O.S., Yakovlev S.V. Continuous representations and functional extensions in combinatorial optimization. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. **52**, N 6. P. 921–930.
18. Stoyan Y.G., Yakovlev S.V., Parshin O.V. Quadratic optimization on combinatorial sets in R^n. *Cybernetics and Systems Analysis*. 1991. **27**, N 4. P. 562–567.
19. Емец О. А., Емец О. А., Емец Е. М. Модификация метода комбинаторного отсечения в задачах оптимизации на вершинно расположенных множествах. *Кибернетика и системный анализ*. 2009. **45**, № 5. С. 129–136.
20. Ємець О.О., Колєчкіна Л.М. Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями. Київ: Наук. думка, 2005. 117 с.
21. Ємець О.О., Колєчкіна Л.М. Задача оптимізації на переставленнях з дробово-лінійною цільовою функцією: властивості множини допустимих розв'язків. *Український математичний журнал*. 2000. **52**, № 12. С. 1630–1640.
22. S. V. Yakovlev, Pichugina O. S. Properties of combinatorial optimization problems over polyhedral-spherical sets. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. **54**, N 1. P. 99–109.
23. Pichugina O., Yakovlev S. Optimization on polyhedral-spherical sets: Theory and applications. *In 2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engeneering (UKRCON 2017)*. Proceedings, Kyiv, 2017. P. 1167–1175.
24. Stoyan Yu.G., Sokolovskii V.Z., Yakovlev S.V. Method of balancing rotating discretely distributed masses. *Energomashinostroenie.* 1982. N 2. P. 4–5.
25. Yakovlev S.V., Grebennik I.V. Localization of solutions of some problems of nonlinear integer optimization. *Cybernetics and Systems Analysis*. 1993. **29**, N 5. P. 419–426.
26. Semenova N.V., Kolechkina L.N., Nagirna A.N. An approach to solving discrete vector optimization problems over a combinatorial set of permutations. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2008. **44**, N 3. P. 441–451.
27. Semenova N.V., Kolechkina L.N., Nagornaya A.N. Solution and investigation of vector problems of combinatorial optimization on a set of polypermutations. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2008. **40**, N 12. P. 27–42.
28. Semenova N.V., Kolechkina L.N. A polyhedral approach to solving multicriterion combinatorial optimization problems over sets of polyarrangements. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2009. **45**, N 3. P. 438–445.
29. Semenova N.V., Kolechkina L.N., Nagornaya A.N. On approach to solving vector problems with fractionally linear functions of the criteria on the combinatorial set of arrangements. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2010. **42**, N 2. P. 67–80.
30. Koliechkina L. N., Dvirna O.A. Solving extremum problems with linear fractional objective functions on the combinatorial configuration of permutations under multicriteriality. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. **53**, N 4. P. 590–599.
31. Колєчкіна Л.М., Нагірна А.М. Комбінаторна математична модель багатокритеріальної оптимізації при побудові комп'ютерних мереж. *Математичні машини і системи*. 2016. № 6. С. 26–41.
32. Донець Г.П., Колєчкіна Л.М. Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях. Полтава: РВВ ПУЕТ, 2011. 309 с.
33. Стоян Ю. Г., Яковлев С.В., Пичугина О.С. Евклидовы комбинаторные конфигурации: монография. Харьков : Константа, 2017. 404 с.
34. Yakovlev, S.V. On some classes of spatial configurations of geometric objects and their formalization. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2018. **50**, N 9. P. 38–50.
35. Yakovlev, S.V. Formalization of spatial configuration optimization problems with a special function class. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2019. **55**, N 4. P. 512–523.
36. Yakovlev, S., Pichugina, O., Yarovaya, O. On optimization problems on the polyhedral-spherical configurations with their properties. *In 2018 IEEE First International Conference on System Analysis Intelligent Computing (SAIC 2018)*. Proceedings, Kyiv. 2018. P. 94–100.
37. Yakovlev, S., Pichugina, O., Yarovaya, O. Polyhedral spherical configuration in discrete optimization. *Journal of Autom. and Information Sci*. 2019. **51**, N 1. P. 38–50.
38. Нагірна А.М., Семенов В.В. Оптимізація вибору програмного забезпечення на основі багатокритеріальних моделей на нечітко заданій комбінаторній множині. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки.* 2012. № 2. С. 188–193.

Получено 10.09.2018
После доработки 30.05.2019