УДК 517.9 : 519.87

А.Г. Наконечный, П.Н. Зинько, Т.П. Зинько, Ю.М. Шевчук

ГАРАНТИРОВАННЫЕ ПРОГНОЗНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДИНАМИКОЙ ГОМПЕРЦА ПРИ НАБЛЮДЕНИЯХ В ДИСКРЕТНЫЕ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ

Ключевые слова: системы нелинейных дифференциальных уравнений, динамика Гомперца, прогнозные гарантированные оценки, дискретные наблюдения, неопределенность.

Введение

Обзор литературы, в которой освещена проблема построения оценок в условиях неопределенности, приведены в [1–5]. Анализ алгоритмов построения прогнозных оценок проводился в работе [6].

Б. Гомперц предложил одномерную математическую модель, которая используется для формализации процессов роста населения в закрытом обществе, распространения болезней, роста злокачественных опухолей. Для последней задачи предложены многомерные модификации модели Гомперца [7, 8]. Анализ задачи гарантированного управления динамикой системы в условиях конфликта, которая описывается дифференциальными уравнениями Гомперца, приводится в [9].

На практике возникают задачи прогнозирования динамики моделей, которые описываются в виде систем дифференциальных уравнений с динамикой Гомперца в условиях неопределенности.

В данной работе решается задача построения алгоритмов нахождения гарантированных и приближенных гарантированных прогнозных оценок векторов состояний и ошибок прогнозных гарантированных оценок моделей, которые описываются системами дифференциальных уравнений Гомперца при дискретных наблюдениях.

1. Предположения, определения, вспомогательные результаты

Исследуется нелинейная непрерывная система с известными начальными условиями:

$$\frac{dx_i(t;\,f(\cdot))}{dt}=[(B(t)f(t),e^i)+\sum\nolimits_{j=1}^{n}(A(t)e^i,e^j)\ln x_i(t;\,f(\cdot))]\,x_i(t;\,f(\cdot)),$$
$$t\in(0,T_2),\ \ x_i(0;\,f(\cdot))=x_i^0>0,\ \ i=\overline{1,n}, \tag{1}$$

где матричные функции $A(t)\in R^{n\times n}$, $B(t)\in R^{n\times m}$, $t\in(0,T_2)$, имеют непрерывные компоненты; $f(\cdot)\in R^m$, $f(\cdot)\in L_2(0,T_2)$ — неизвестная функция; вектор e^i, $i=\overline{1,n}$, i — орт, для решений которой выполняются неравенства $x_i(t;\,f(\cdot))>0$, $t\in(0,T_2)$, $i=\overline{1,n}$.

Пусть в точках $t_k, k=\overline{1, N}$ (для которых справедливы неравенства $0<t_1<\ldots<$ $<t_N=T_1<T_2$) наблюдаются значения функций $x_i(t;\ f(\cdot))$, $i=\overline{1, n}$, которые являются решениями системы (1) при некоторых неизвестных функциях $f(t)$, $t\in(0, T_2)$, и с ошибками η_{ik}: $y_{ik}=x_i(t_k;\ f(\cdot))+\eta_{ik}$, $i=\overline{1, n_k}$, $n_k\le n$, $k=\overline{1, N}$.

Предполагается, что для функций $f(t), t\in(0, T_2)$ и величин η_{ik}, $i=\overline{1, n_k}$, $k=\overline{1, N}$ известны множества, которым они принадлежат. Пусть $f(\cdot)\in G$, $G=G_1\times G_2$, $G_1\subset L_2(0, t_N)$, $G_2\subset L_2(t_N, T_2)$ и справедливы неравенства $\underline{\eta}_{ik}\le\eta_{ik}\le\overline{\eta}_{ik}$, $i=\overline{1, n_k}$, $k=\overline{1, N}$ ($\underline{\eta}_{ik}$, $\overline{\eta}_{ik}$ — известные числа).

Лемма 1. Для решений системы (1) при выполнении условий $x_k^0>0$, $k=\overline{1, n}$, следует представление

$$x_i(t;\ f(\cdot))=\exp(\varphi_i(t;\ f(\cdot))),\ i=\overline{1, n},\ t\in(0, T_2), \tag{2}$$

где вектор-функция $\varphi(t,\ f(\cdot))=(\varphi_1(t,\ f(\cdot)),\ldots,\varphi_n(t,\ f(\cdot)))^{\mathrm{T}}$, $t\in(0, T_2)$, является решением задачи Коши:

$$\frac{d\varphi(t;\ f(\cdot))}{dt}=A(t)\varphi(t;\ f(\cdot))+B(t)f(t),\ \varphi(0;\ f(\cdot))=(\ln x_1^0,\ldots,\ln x_n^0)^T,\ t\in(0, T_2). \tag{3}$$

Доказательство. Справедливы равенства

$$\frac{d\ln x_i(t;\ f(\cdot))}{dt}=\frac{dx_i(t;\ f(\cdot))}{dt}x_i^{-1}(t;\ f(\cdot)), t\in(0, T_2), i=\overline{1, n}.$$

Положив $\ln x_i(t;\ f(\cdot))=\varphi_i(t;\ f(\cdot)), t\in(0, T_2), i=\overline{1, n},$ получим уравнение (2), что подтверждает справедливость леммы. Учитывая, что компоненты вектора x^0 известны, для нахождения приближенных гарантированных оценок (не ограничивая общность), будем считать, что $\ln x^0\equiv 0$. Поскольку предполагается, что выполняются неравенства $y_{ik}-\overline{\eta}_{ik}>0$, $i=\overline{1, n_k}$, $k=\overline{1, N}$, апостериорное множество возможных значений функции $f(t)$, $t\in(0, T_2)$ имеет вид

$$F_f=\{f(\cdot):f(\cdot)\in G\}\cap$$

$$\cap\{f(\cdot):\ln(y_{ik}-\overline{\eta}_{ik})\le\varphi_i(t_k;\ f(\cdot))\le\ln(y_{ik}-\underline{\eta}_{ik}), i=\overline{1, n_k}, k=\overline{1, N}\},$$

где $\varphi(t;\ f(\cdot)), t\in(0, T_1),$ удовлетворяет системе (3).

Обозначим $x(t;\ f(\cdot))=(x_1(t;\ f(\cdot)),\ldots,x_n(t;\ f(\cdot))^{\mathrm{T}}$, $t\in(0, T_2)$.

Лемма 2. Пусть G_1 и G_2 — замкнутые, выпуклые и ограниченные множества. Тогда существуют функции $\overline{f}^i(\cdot)\in F_f$ и $\underline{f}^i(\cdot)\in F_f$, для которых справедливо

$$\max_{x(T_2;\ f(\cdot))\in X_y}\varphi_i(T_2;\ f(\cdot))=\varphi_i(T_2;\ \overline{f}^i(\cdot)),$$

$$\min_{x(T_2;\ f(\cdot))\in X_y}\varphi_i(T_2;\ f(\cdot))=\varphi_i(T_2;\ \underline{f}^i(\cdot)),\ i=\overline{1, n},\ k=\overline{1, N},$$

где

$$X_y=\{x(T_2;\ f(\cdot)):x_i(T_2;\ f(\cdot))\in Q_i,\ i=\overline{1, n}\};$$

$$Q_i=\{x_i(T_2;\ f(\cdot)):x_i(T_2;\ \underline{f}^i(\cdot))\le x_i(T_2;\ f(\cdot))\le x_i(T_2;\ \overline{f}^i(\cdot)),\ f(\cdot)\in F_y\},\ i=\overline{1, n}.$$

Доказательство. Доказательство этой леммы вытекает из ограниченности, замкнутости и выпуклости множества F_f, а также из того, что $\varphi_i(T_2;\, f(\cdot)), i=\overline{1,n}$, $k=\overline{1,N}$, — линейные непрерывные функционалы в пространстве $L_2(0,T_2)$.

Определение 1. Гарантированной прогнозной оценкой вектора состояний $x(T_2;\, f(\cdot))$ назовем вектор $\hat{x}(T_2)=(\hat{x}_1(T_2),\ldots,\hat{x}_n(T_2))^{\mathrm{T}}$, который удовлетворяет условию $\min\limits_{x(T_2;\, f(\cdot))\in X_y} \Phi(x(T_2;\, f(\cdot)))=\Phi(\hat{x}(T_2))$, где функционал $\Phi(x(T_2;\, f(\cdot)))$ определяется по формуле

$$\Phi(x(T_2;\, f(\cdot)))=\sum\nolimits_{i=1}^{n} \max_{\bar{x}_i(T_2;\, f(\cdot))\in Q_i} |\, x_i(T_2;\, f(\cdot))-\bar{x}_i(T_2;\, f(\cdot))\,|\, \beta_i, \qquad (4)$$

а $\beta_i\ge 0,\ i=\overline{1,n}$, — известные числа, для которых выполняется условие $\sum\nolimits_{i=1}^{n}\beta_i=1$.

Определение 2. Величину $\sigma=\Phi(\hat{x}(T_2))$ назовем гарантированной ошибкой прогнозной оценки $\hat{x}(T_2)$.

2. Метод нахождения гарантированных прогнозных оценок и их ошибок

Теорема 1. Компоненты вектора гарантированной прогнозной оценки $\hat{x}(T_2)$ находятся по формулам:

$$\hat{x}_i(T_2)=\exp(\hat{\varphi}_i(T_2))\, ch\sigma_{\varphi_i}(T_2),\ \ i=\overline{1,n}, \qquad (5)$$

(при этом гарантированная ошибка прогнозной оценки имеет вид $\sigma= =\sum\nolimits_{i=1}^{n}\exp(\hat{\varphi}_i(T_2))\, sh\sigma_{\varphi_i}(T_2)\,\beta_i$), где $\hat{\varphi}_i(T_2)$, $\sigma_{\varphi_i}(T_2)$, $i=\overline{1,n}$, — соответственно гарантированные прогнозные оценки и гарантированные ошибки прогнозных оценок величин $\varphi_i(T_2,\, f(\cdot)),\ i=\overline{1,n}$, и вычисляются по таким формулам:

$$\hat{\varphi}_i(T_2)=\frac{1}{2}(\varphi_i^{+}(T_2)+\varphi_i^{-}(T_2)),\ \ \sigma_{\varphi_i}(T_2)=\frac{1}{2}(\varphi_i^{+}(T_2)-\varphi_i^{-}(T_2)),\ \ i=\overline{1,n},$$

$$\varphi_i^{+}(T_2)=\ln x_i^{+}(T_2),\ \ \varphi_i^{-}(T_2)=\ln x_i^{-}(T_2),\ \ i=\overline{1,n},$$

$$x_i^{+}(T_2)=\max_{f(\cdot)\in F_y} x_i(T_2;\, f(\cdot)),\ \ x_i^{-}(T_2)=\min_{f(\cdot)\in F_y} x_i(T_2;\, f(\cdot)),\ \ i=\overline{1,n}.$$

Доказательство. Поскольку выполняются условия леммы 2, получаем равенства:

$$\max_{x_i(T_2;\, f(\cdot))\in Q_i} x_i(T_2;\, f(\cdot))=x_i(T_2;\, \overline{f}^{\,i}(\cdot))=x_i^{+}(T_2),\ \ i=\overline{1,n},$$

$$\min_{x_i(T_2;\, f(\cdot))\in Q_i} x_i(T_2;\, f(\cdot))=x_i(T_2;\, \underline{f}^{\,i}(\cdot))=x_i^{-}(T_2),\ \ i=\overline{1,n}.$$

Справедливы представления:

$$\max_{\bar{x}_i(T_2;\, f(\cdot))\in Q_i} |\, x_i(T_2;\, f(\cdot))-\bar{x}_i(T_2;\, f(\cdot))\,|=$$

$$=\left[\begin{array}{l} x_i(T_2;\, f(\cdot))-x_i^{-}(T_2),\, x_i(T_2;\, f(\cdot))\ge \dfrac{1}{2}(x_i^{+}(T_2)+x_i^{-}(T_2)),\\ x_i(T_2;\, f(\cdot))-x_i^{+}(T_2),\, x_i(T_2;\, f(\cdot))\le \dfrac{1}{2}(x_i^{+}(T_2)+x_i^{-}(T_2)),\ \ i=\overline{1,n}.\end{array}\right.$$

Последние соотношения можно записать:

$$\max_{\bar{x}_i(T_2;\, f(\cdot))\in Q_i} |\, x_i(T_2;\, f(\cdot))-\bar{x}_i(T_2;\, f(\cdot))\,|=$$

 ISSN 0572-2691

$$= \frac{1}{2}(x_i^+(T_2) - x_i^-(T_2)) + \left| x_i(T_2;\, f(\cdot)) - \frac{1}{2}(x_i^+(T_2) + x_i^-(T_2)) \right|,\ i = \overline{1, n}. \qquad (6)$$

Из формул (2) и (6) получим выражение для $\Phi(x(T_2;\, f(\cdot)))$:

$$\Phi(x(T_2;\, f(\cdot))) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{2}(x_i^+(T_2) - x_i^-(T_2)) + \left| x_i(T_2;\, f(\cdot)) - \frac{1}{2}(x_i^+(T_2) + x_i^-(T_2)) \right| \right] \beta_i.$$

Отсюда следуют формулы для нахождения компонент вектора гарантированной прогнозной оценки $\hat{x}(T_2)$ и гарантированной ошибки:

$$\hat{x}_i(T_2) = \frac{1}{2}(x_i^+(T_2) + x_i^-(T_2)),\ i = \overline{1, n},\ \sigma = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (x_i^+(T_2) - x_i^-(T_2))\beta_i. \qquad (7)$$

Из (7), учитывая справедливость представления $x_i(t;\, f(\cdot)) = \exp(\varphi_i(t;\, f(\cdot)))$, $t \in (0, T_2)$, $i = \overline{1, n}$, получаем

$$\hat{x}_i(T_2) = \frac{1}{2}(e^{\varphi_i^+(T_2)} + e^{\varphi_i^-(T_2)}),\ i = \overline{1, n};\ \ \sigma = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (e^{\varphi_i^+(T_2)} - e^{\varphi_i^-(T_2)})\,\beta_i.$$

Поскольку

$$\varphi_i^+(T_2) = \hat{\varphi}_i(T_2) + \sigma_{\varphi_i}(T_2), \varphi_i^-(T_2) = \hat{\varphi}_i(T_2) - \sigma_{\varphi_i}(T_2),\ i = \overline{1, n},$$

имеем

$$\sigma = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (e^{\hat{\varphi}_i(T_2) + \sigma_{\varphi_i}(T_2)} - e^{\hat{\varphi}_i(T_2) - \sigma_{\varphi_i}(T_2)})\beta_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} e^{\hat{\varphi}_i(T_2)} \frac{1}{2}(e^{\sigma_{\varphi_i}(T_2)} - e^{-\sigma_{\varphi_i}(T_2)})\beta_i = \sum_{i=1}^{n} \exp(\hat{\varphi}_i(T_2)) sh\sigma_{\varphi_i}(T_2)\beta_i,$$

$$\hat{x}_i(T_2) = \frac{1}{2}(e^{\hat{\varphi}_i(T_2) + \sigma_{\varphi_i}(T_2)} + e^{\hat{\varphi}_i(T_2) - \sigma_{\varphi i}(T_2)}) =$$

$$= e^{\hat{\varphi}_i(T_2)} \frac{1}{2}(e^{\sigma_{\varphi_i}(T_2)} + e^{-\sigma_{\varphi_i}(T_2)}) = \exp(\hat{\varphi}_i(T_2)) ch\sigma_{\varphi_i}(T_2),\ i = \overline{1, n},$$

что и нужно было доказать.

3. Метод нахождения приближенных гарантированных прогнозных оценок

Предполагается, что множество G центрально-симметричное относительно некоторой известной вектор-функции $\tilde{f}(\cdot) \in L_2(0, T_2)$. Для нахождения приближенных прогнозных гарантированных оценок рассмотрим внутреннее $\underline{F}_f$ и внешнее $\overline{F}_f$ множества, которые аппроксимируют априорное множество F_f:

$$\underline{F}_f = \{ f(\cdot) \in G_1 : I_y(f(\cdot)) \le 1 \} \times G_2,\ \ \overline{F}_f = \{ f(\cdot) \in G_1 : I_y(f(\cdot)) \le n \} \times G_2,$$

где

$$I_y(f(\cdot)) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{n_k} q_{ik}(\bar{y}_{ik} - \varphi_i(t_k;\, f(\cdot)))^2 + \int_0^{T_1} q^2(t) \| f(t) - \tilde{f}(t) \|^2\, dt;$$

$$\bar{y}_{ik} = \frac{1}{2}\ln(y_{ik} - \bar{\eta}_{ik})(y_{ik} - \underline{\eta}_{ik}),\ \ q_{ik}^{-1} = \frac{1}{2}\ln\frac{y_{ik} - \bar{\eta}_{ik}}{y_{ik} - \underline{\eta}_{ik}},\ i = \overline{1, n_k},\ k = \overline{1, N},$$

и $q^2(t)$, $t \in (0, T_1)$, — некоторая известная скалярная положительная функция в $L_2(0, T_1)$.

Отметим, что функцию $\varphi(t;\, f(\cdot))$, $t \in (0, T_2)$, которая определяется по (3), также можно представить в виде

$$\varphi(t;\ f(\cdot))=\begin{bmatrix}\tilde\varphi(t;\ f(\cdot)),\ t\in(0,T_1],\\ \varphi^1(t;\ f(\cdot)),\ t\in[T_1,T_2),\end{bmatrix}$$

где функции $\tilde\varphi(t;\ f(\cdot))$, $t\in(0,T_1)$ и $\varphi^1(t;\ f(\cdot)), t\in(T_1,T_2)$, определяются как решения систем:

$$\frac{d\tilde\varphi(t;\ f(\cdot))}{dt}=A(t)\tilde\varphi(t;\ f(\cdot))+B(t)f(t),\ \tilde\varphi(0;\ f(\cdot))\equiv 0,\ t\in(0,T_1),$$

$$\frac{d\varphi^1(t;\ f(\cdot))}{dt}=A(t)\varphi^1(t;\ f(\cdot))+B(t)f(t),\ \varphi^1(T_1;\ f(\cdot))=\tilde\varphi(T_1;\ f(\cdot)),\ t\in(T_1,T_2).$$

Теорема 2. Множества $\underline{F}_f$ и $\overline{F}_f$ можно представить также в виде

$$\underline{F}_f=\{f(\cdot)\in G_1: I_2(f(\cdot))\le 1-I_y(\hat f(\cdot))\}\times\{f(\cdot)\in G_2\};$$

$$\overline{F}_f=\{f(\cdot)\in G_1: I_2(f(\cdot))\le n-I_y(\hat f(\cdot))\}\times\{f(\cdot)\in G_2\},$$

где $I_2(f(\cdot))=\frac{1}{2}(I_y''(\hat f(\cdot))(f(\cdot)-\hat f(\cdot)), f(\cdot)-\hat f(\cdot))$, а $\hat f(\cdot)\in Arg\min\limits_{f(\cdot)\in G}I_y(f(\cdot))$; кроме того, выполняется равенство

$$\frac{1}{2}(I_y''(\hat f(\cdot))(f(\cdot)-\hat f(\cdot)), f(\cdot)-\hat f(\cdot))=$$

$$=\sum\nolimits_{k=1}^{N}\sum\nolimits_{i=1}^{n_k}q_{ik}(\overline{\varphi}_i(t_k;\ f(\cdot)-\hat f(\cdot)))^2+\int_0^{T_1}q^2(t)\,\|\,f(t)-\hat f(t)\,\|^2\,dt$$

(здесь $I_y''(\hat f(\cdot))$ — вторая производная Фреше $I_y(f(\cdot))$ в точке $\hat f(\cdot)$; а $\overline{\varphi}(t;\ f(\cdot)-$ $-\hat f(\cdot))=(\overline{\varphi}_1(t;\ f(\cdot)-\hat f(\cdot)),...,\overline{\varphi}_n(t;f(\cdot)-\hat f(\cdot)))^{\mathrm T}$, $t\in(0,T_1)$, — вектор-функция, которая определяется как решение следующей задачи Коши:

$$\frac{d\overline{\varphi}(t;\ f(\cdot)-\hat f(\cdot))}{dt}=A(t)\overline{\varphi}(t;\ f(\cdot)-\hat f(\cdot))+B(t)(f(t)-\hat f(t)),$$

$$\overline{\varphi}(0;f(\cdot)-\hat f(\cdot))=0,\ t\in(0,T_1)).$$

Доказательство. Поскольку $\hat f(t), t\in(0,T_1)$, — функция, на которой достигает минимум функционал $I_y(f(\cdot))$, используя формулу Тейлора, получаем

$$I_y(\hat f(\cdot)+\tau(f(\cdot)-\hat f(\cdot)))=I_y(\hat f(\cdot))+\frac{1}{2}(I_y''(\hat f(\cdot))(f(\cdot)-\hat f(\cdot), f(\cdot)-\hat f(\cdot))\tau^2.$$

При $\tau=1$ будет выполняться равенство

$$I_y(f(\cdot))=I_y(\hat f(\cdot))+\frac{1}{2}(I_y''(\hat f(\cdot))(f(\cdot)-\hat f(\cdot), f(\cdot)-\hat f(\cdot)).$$

Таким образом, для аппроксимирующих апостериорную область F_f множеств $\underline{F}_f$ и $\overline{F}_f$ справедливо представление:

$$\underline{F}_f=\{f(\cdot)\in G_1: I_2(f(\cdot))\le 1-I_y(\hat f(\cdot))\}\times\{f(\cdot)\in G_2\};$$

$$\overline{F}_f=\{f(\cdot)\in G_1: I_2(f(\cdot))\le n-I_y(\hat f(\cdot))\}\times\{f(\cdot)\in G_2\},$$

что и нужно было доказать.

Обозначим $z_i(t)$, $t \in (T_1, T_2)$ и $\bar{z}_i(t)$, $t \in (0, T_1)$, $i = \overline{1, n}$, соответствующие решения задач Коши:

$$\frac{dz_i(t)}{dt} = A^{\mathrm{T}}(t) z_i(t),\ z_i(T_2) = e^i,\ t \in (T_1, T_2),\ i = \overline{1, n},$$

$$\frac{d\bar{z}_i(t)}{dt} = A^T(t) \bar{z}_i(t),\ \bar{z}_i(T_1) = z_i(T_1),\ t \in (0, T_1),\ i = \overline{1, n}.$$

Теорема 3. Приближенные гарантированные оценки $\hat{\varphi}_i(T_2)$, $i = \overline{1, n}$, находятся по формулам

$$\hat{\varphi}_i(T_2) = (z_i(T_1), \hat{\varphi}_i(T_1)),\ i = \overline{1, n}, \tag{8}$$

где $\hat{\varphi}_i(T_1)$, $i = \overline{1, n}$, находятся из системы алгебраических уравнений:

$$\hat{\varphi}_i(t_k) + \sum_{r=1}^{N} \sum_{s=1}^{n_r} q_{sr} b_{srik} \hat{\varphi}_s(t_r) = \sum_{r=1}^{N} \sum_{s=1}^{n_r} q_{sr} \bar{y}_{ik} b_{srik};\ i = \overline{1, n};\ k = \overline{1, N},$$

$$b_{srik} = \int_0^{T_1} q^{-2}(t)(\tilde{g}_{ik}(t), \tilde{g}_{sr}(t))dt;\ i, s = \overline{1, n};\ k, r = \overline{1, N},$$

$$\tilde{g}_{ik}(t) = \chi_{(0, t_k)}(t) B^{\mathrm{T}}(t) \Phi^{\mathrm{T}}(T_1, t) e^i,\ t \in (0, T_1),\ i = \overline{1, n},\ k = \overline{1, N},$$

$$\chi_{(0,\, t)}(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \in (0, t), \\ 0, & \tau \notin (0, t), \end{cases}$$

матрица $\Phi(t, s)$, $t \in [s, T_1)$, $s \in (0, T_2)$ — решение следующей задачи Коши:

$$\frac{d\Phi(t, s)}{dt} = A(t)\Phi(t, s),\ \Phi(s, s) = E,\ t \in [s, T_1),\ s \in (0, T_2),$$

и E — единичная матрица размерности $n \times n$.

Доказательство. По формуле Коши для нахождения общего решения системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений (3) получим выражения для $\varphi(T_2;\ f(\cdot))$:

$$\varphi(T_2;\ f(\cdot)) = \varphi^1(T_2;\ f(\cdot)) = \Phi(T_2, T_1)\varphi^1(T_1;\ f(\cdot)) + \int_{T_1}^{T_2} \Phi(T_2, \tau) B(\tau) f(\tau) d\tau =$$

$$= \Phi(T_2, T_1)\tilde{\varphi}(T_1;\ f(\cdot)) + \int_{T_1}^{T_2} \Phi(T_2, \tau) B(\tau) f(\tau) d\tau. \tag{9}$$

Умножив скалярно левую и правую части (9) на векторы e^i, $i = \overline{1, n}$, получим равенства

$$(\varphi(T_2;\ f(\cdot)), e^i) = (\Phi(T_2, T_1)\tilde{\varphi}(T_1;\ f(\cdot)), e^i) + \left(\int_{T_1}^{T_2} \Phi(T_2, \tau) B(\tau) f(\tau) d\tau, e^i \right),\ i = \overline{1, n}.$$

Последние формулы можно представить в виде

$$(\varphi(T_2;\ f(\cdot)), e^i) = (z_i(T_1), \tilde{\varphi}(T_1;\ f(\cdot))) + \int_{T_1}^{T_2} (z_i(\tau), B(\tau) f(\tau)) d\tau,\ i = \overline{1, n}.$$

Вначале рассмотрим случай, когда $f(\cdot) \in \overline{F}_f$. Тогда получим:

$$\max_{f(\cdot) \in \overline{F}_f} (\varphi(T_2;\ f(\cdot)), e^i) = \max_{f(\cdot) \in \overline{F}_{1f}} (z_i(T_1), \varphi(T_1;\ f(\cdot))) + \max_{f(\cdot) \in G_2} L_i(f(\cdot)),\ i = \overline{1, n},$$

$$\min_{f(\cdot) \in \overline{F}_f} (\varphi(T_2;\ f(\cdot)), e^i) = \min_{f(\cdot) \in \overline{F}_{1f}} (z_i(T_1), \varphi(T_1;\ f(\cdot))) + \min_{f(\cdot) \in G_2} L_i(f(\cdot)),\ i = \overline{1, n}$$

(здесь $\overline{F}_{1f} = \{ f(\cdot) \in G_1 : I_2(f(\cdot)) \le n - I_y(\hat{f}(\cdot)) \}$, $L_i(f(\cdot)) = \int_{T_1}^{T_2} (z_i(\tau), B(\tau) f(\tau)) d\tau$, $i = \overline{1, n}$).

Следовательно, справедливы соотношения:

$$\max_{f(\cdot)\in\overline{F}_f}(\varphi(T_2;f(\cdot)),e^i)=(z_i(T_1),\hat{\varphi}(T_1))+\max_{v(\cdot)\in\overline{F}_{2f}}(z_i(T_1),\tilde{\varphi}(T_1;v(\cdot)))+$$

$$+\max_{f(\cdot)\in G_2}L_i(f(\cdot)),\ i=\overline{1,n};\tag{10}$$

$$\min_{f(\cdot)\in\overline{F}_f}(\varphi(T_2;f(\cdot)),e^i)=(z_i(T_1),\hat{\varphi}(T_1))+\min_{v(\cdot)\in\overline{F}_{2f}}(z_i(T_1),\tilde{\varphi}(T_1;v(\cdot)))+\min_{f(\cdot)\in G_2}L_i(f(\cdot))=$$

$$=(z_i(T_1),\hat{\varphi}(T_1))-\max_{v(\cdot)\in\overline{F}_{2f}}(z_i(T_1),\tilde{\varphi}(T_1;v(\cdot)))-\max_{f(\cdot)\in G_2}L_i(f(\cdot)),\ i=\overline{1,n},\tag{11}$$

где

$$\overline{F}_{2f}=\{v(\cdot)\in L_2(0,T_1):I_2(v(\cdot))\le n-I_y(\hat{f}(\cdot))\}.$$

Из (10) и (11) получим представления

$$\hat{\varphi}_i(T_2)=(z_i(T_1),\hat{\varphi}_i(T_1)),\ i=\overline{1,n},$$

$$\overline{\sigma}_{\varphi_i}(T_2)=\max_{v(\cdot)\in\overline{F}_{2f}}(z_i(T_1),\tilde{\varphi}(T_1;v(\cdot)))+\max_{f(\cdot)\in G_2}L_i(f(\cdot)),\ i=\overline{1,n}.$$

В случае $f(\cdot)\in\underline{F}_f$ с помощью аналогичных рассуждений будем иметь выражения для $\underline{\sigma}_{\varphi_i}(T_2)=\max\limits_{v(\cdot)\in\underline{F}_{2f}}(z_i(T_1),\tilde{\varphi}(T_1;v(\cdot)))+\max\limits_{f(\cdot)\in G_2}L_i(f(\cdot)),\ i=\overline{1,n}$, где

$$\underline{F}_{2f}=\{v(\cdot)\in L_2(0,T_1):I_2(v(\cdot))\le 1-I_y(\hat{f}(\cdot))\}.$$

Поскольку $\hat{f}(t)\in\operatorname{Argmin}I_y(f(\cdot)),\ t\in(0,T_1)$, имеют место равенства

$$\frac{1}{2}(I_y'(\hat{f}(\cdot)),v(\cdot))=-\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n_k}q_{ik}(\bar{y}_{ik}-\tilde{\varphi}_i(t_k;\hat{f}(\cdot)))\overline{\varphi}_i(t_k;v(\cdot))+$$

$$+\int_0^{T_1}q^2(\tau)(\hat{f}(\tau),v(\tau))d\tau=0,\ \forall v(\cdot)\in L_2(0,T_1),\tag{12}$$

где $I_y'(\hat{f}(\cdot))$ — первая производная Фреше $I_y(f(\cdot))$ в точке $\hat{f}(\cdot)$.

Заметим, что выполняются соотношения

$$\overline{\varphi}_i(t_k;f(\cdot))=(\overline{\varphi}(t_k;f(\cdot)),e^i)=\int_0^{T_1}(\chi_{(0,t_k)}(\tau)\Phi(T_1,\tau)B(\tau))f(\tau),e^i)d\tau=$$

$$=\int_0^{T_1}(\tilde{g}_{ik}(\tau),f(\tau))d\tau;\ i=\overline{1,n},\ k=\overline{1,N}.\tag{13}$$

В силу (13) выражение (12) примет вид

$$-\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n_k}q_{ik}(\bar{y}_{ik}-\tilde{\varphi}_i(t_k;\hat{f}(\cdot)))\int_0^{T_1}(\chi_{(0,t_k)}(\tau)\Phi(T_1,\tau)B(\tau))v(\tau),e^i)d\tau+$$

$$+\int_0^{T_1}q^2(\tau)(\hat{f}(\tau),v(\tau))d\tau=0,\ \forall v(\cdot)\in L_2(0,T_1).\tag{14}$$

В (14) поменяем местами операции суммирования и интегрирования:

$$-\int_0^{T_1}\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n_k}q_{ik}(\bar{y}_{ik}-\tilde{\varphi}_i(t_k;\hat{f}(\cdot)))(\chi_{(0,t_k)}(\tau)B^{\mathrm{T}}(\tau)\Phi^{\mathrm{T}}(T_1,\tau)e^i,v(\tau))d\tau+$$

$$+\int_0^{T_1}q^2(t)(\hat{f}(t),v(t))dt=0,\ \forall v(\cdot)\in L_2(0,T_1),$$

в результате получим равенства:

$$-\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n_k}q_{ik}(\bar{y}_{ik}-\tilde{\varphi}_i(t_k;\hat{f}(\cdot)))\,\tilde{g}_{ik}(t)+q^2(t)\hat{f}(t)=0,\ t\in(0,T_1),\Leftrightarrow q^2(t)\hat{f}(t)+$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n_k}q_{ik}\tilde{\varphi}_i(t_k;\hat{f}(\cdot))\tilde{g}_{ik}(t)=\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n_k}q_{ik}\bar{y}_{ik}\tilde{g}_{ik}(t),\ t\in(0,T_1).\tag{15}$$

Выражение (15) можно представить в виде системы:

$$(\tilde{g}_{ik}(t),\ \hat{f}(t))+\sum_{r=1}^{N}\ \sum_{s=1}^{n_r}\ q_{sr}q^{-2}(t)\,\tilde{\varphi}_s(t_r;\ \hat{f}(\cdot))\,(\tilde{g}_{ik}(t),\ \tilde{g}_{sr}(t))=$$

$$=\sum_{r=1}^{N}\ \sum_{s=1}^{n_r}\ q_{sr}q^{-2}(t)\bar{y}_{sr}(\tilde{g}_{ik}(t),\tilde{g}_{sr}(t));\ t\in(0,T_1);\ i=\overline{1,n};\ k=\overline{1,N}. \qquad (16)$$

Проинтегрируем обе части равенств (16):

$$\int_0^{T_1}(\tilde{g}_{ik}(t),\ \hat{f}(t))dt+\int_0^{T_1}\ \sum_{r=1}^{N}\ \sum_{s=1}^{n_r}\ q_{sr}q^{-2}(t)\tilde{\varphi}_s(t_r;\ \hat{f}(\cdot))\,(\tilde{g}_{ik}(t),\tilde{g}_{sr}(t))dt=$$

$$=\int_0^{T_1}\ \sum_{r=1}^{N}\ \sum_{s=1}^{n_r}\ q_{sr}q^{-2}(t)\bar{y}_{sr}(\tilde{g}_{ik}(t),\tilde{g}_{sr}(t))\,dt;\ i=\overline{1,n};\ k=\overline{1,N}. \qquad (17)$$

С учетом $\varphi_i(t_k;\ f(\cdot))=(\varphi(t_k;\ f(\cdot)),e^i)=\int_0^{T_1}(\tilde{g}_{ik}(\tau),\ f(\tau))d\tau,\ i=\overline{1,n},\ k=\overline{1,N}$, из (17) получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\varphi_i(t_k,\hat{f}(\cdot))+\sum_{r=1}^{N}\sum_{s=1}^{n_r}q_{sr}b_{srik}\varphi_s(t_r,\hat{f}(\cdot))=$$

$$=\sum_{r=1}^{N}\sum_{s=1}^{n_r}q_{sr}\bar{y}_{ik}b_{srik};\ i=\overline{1,n};k=\overline{1,N},$$

из которой можно получить величины $\hat{\varphi}_i(t_k)=\varphi_i(t_k,\ \hat{f}(\cdot));\ i=\overline{1,n};\ k=\overline{1,N}$ (в том числе $\hat{\varphi}_i(T_1)=\hat{\varphi}_i(t_N)$, $i=\overline{1,n}$), что завершает доказательство теоремы 3.

Теорема 4. Для гарантированных ошибок $\sigma_{\varphi_i}(T_2),\ i=\overline{1,n},$ гарантированных оценок $\hat{\varphi}_i(T_2),\ i=\overline{1,n}$, выполняются условия $\underline{\sigma}_{\varphi_i}(T_2)\le\sigma_{\varphi_i}(T_2)\le\overline{\sigma}_{\varphi_i}(T_2),\ i=\overline{1,n}$; величины $\underline{\sigma}_{\varphi_i}(T_2)$ и $\overline{\sigma}_{\varphi_i}(T_2),\ i=\overline{1,n}$, задаются выражениями:

$$\underline{\sigma}_{\varphi_i}(T_2)=\left[(\alpha_i(t),B^{\mathrm{T}}(t)\bar{z}_i(t))\Big|_{L_2(0,T_1)}(1-I_y(\hat{f}(\cdot)))\right]^{1/2}+\max_{f(\cdot)}L_i(f(\cdot)),\ i=\overline{1,n},$$

$$\overline{\sigma}_{\varphi_i}(T_2)=\left[(\alpha_i(t),B^{T}(t)\,\bar{z}_i(t))\Big|_{L_2(0,T_1)}(n-I_y(\hat{f}(\cdot)))\right]^{1/2}+\max_{f(\cdot)}L_i(f(\cdot)),\ i=\overline{1,n},$$

где $(\alpha_i(t),B^{\mathrm{T}}(t)\bar{z}_i(t))\Big|_{L_2(0,T_1)}$ — скалярное произведение в $L_2(0,T_1)$, а $\alpha_i(t)\in$ $\in L_2(0,T_1)$, $i=\overline{1,n}$, — решения системы функциональных уравнений:

$$q^2(t)\alpha_j(t)+\sum_{k=1}^{N}\ \sum_{i=1}^{n}\ \overline{\varphi}_i(t_k;\alpha_j(\cdot))\tilde{g}_{ik}(t)=B^{\mathrm{T}}(t)\bar{z}_j(t);\ t\in(0,T_1),\ \ j=\overline{1,n};$$

величины $\overline{\varphi}_i(t_k;\alpha_j(\cdot));\ i,\ j=\overline{1,n};\ \ k=\overline{1,N}$, находятся из системы алгебраических линейных уравнений:

$$\overline{\varphi}_i(t_k;\alpha_j(\cdot))+\sum_{r=1}^{N}\ \sum_{s=1}^{n_r}\ q_{sr}\overline{\varphi}_s(t_r;\alpha_j(\cdot))b_{srik}=\int_0^{T_1}(B^{T}(t)\,\bar{z}_j(t),\tilde{g}_{ik}(t))dt;$$

$$i,\ j=\overline{1,n};\ \ k=\overline{1,N}.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $v(\cdot)\in\overline{F}_{2f}$. Для величин $(z_i(T_1),\ \overline{\varphi}(T_1;v(\cdot)))$, $i=\overline{1,n}$, получим:

$$(z_i(T_1),\overline{\varphi}(T_1;v(\cdot)))=\int_0^{T_1}(\bar{z}_i(t),B(t)v(t))dt=\int_0^{T_1}(B^{T}(t)\bar{z}_i(t),v(t))dt,\ i=\overline{1,n}.$$

Поскольку оператор $I_y''(\hat{f}(\cdot))$ — положительно-определенный и ограниченный, для него существует обратный. Тогда в силу обобщенного уравнения Коши–Буняковского справедливы неравенства

$$\left|\int_0^{T_1} (B^T(t)\bar{z}_i(t), v(t))dt\right| \le$$

$$\le \left[\left(\left(\frac{1}{2} I_y''(\hat{f}(\cdot))\right)^{-1} B^{\mathrm{T}}(t)\bar{z}_i(t), B^{\mathrm{T}}(t)\bar{z}_i(t)\right)\Bigg|_{L_2(0,\,T_1)} (n - I_y(\hat{f}(\cdot)))\right]^{1/2}, \; i = \overline{1, n}.$$

Отсюда следуют представления для $\bar{\sigma}_{\varphi_i}(T_2), \; i = \overline{1, n}$:

$$\bar{\sigma}_{\varphi_i}(T_2) = \left[(\alpha_i(t), B^{\mathrm{T}}(t)\bar{z}_i(t))\Big|_{L_2(0,\,T_1)} (n - I_y(\hat{f}(\cdot)))\right]^{1/2} +$$

$$+ \max_{f(\cdot)\in G_2} L_i(f(\cdot)), \; i = \overline{1, n},$$

где

$$\alpha_i(t) = \left(\frac{1}{2} I_y''(\hat{f}(\cdot))\right)^{-1} B^T(t)\bar{z}_i(t), \; t \in (0, T_1), \; i = \overline{1, n}. \tag{18}$$

С помощью аналогичных рассуждений получим выражения для $\underline{\sigma}_{\varphi_i}(T_2), \; i = \overline{1, n}$, при $v(\cdot) \in \underline{F}_{2f}$:

$$\underline{\sigma}_{\varphi_i}(T_2) = \left[(\alpha_i(t), B^{\mathrm{T}}(t)\bar{z}_i(t))\Big|_{L_2(0,\,T_1)} (1 - I_y(\hat{f}(\cdot)))\right]^{1/2} + \max_{f(\cdot)\times G_2} L_i(f(\cdot)), \; i = \overline{1, n}.$$

Из (18) следует, что вектор-функции $\alpha_i(t), \; t \in (0, T_1), \; i = \overline{1, n}$, удовлетворяют также системе функциональных уравнений $\frac{1}{2} I_y''(\hat{f}(\cdot))\alpha_i(t) = B^{\mathrm{T}}(t)\bar{z}_i(t), \; t \in (0, T_1),$ $i = \overline{1, n}$, или

$$\sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{n_k} q_{ik}\bar{\varphi}_i(t_k; \alpha_j(\cdot))\bar{\varphi}_i(t_k; v(\cdot)) + \int_0^{T_1} (q^2(\tau)\alpha_j(\tau), v(\tau))d\tau =$$

$$= \int_0^{T_1} (B^{\mathrm{T}}(\tau)\bar{z}_j(\tau), v(\tau))d\tau, \; \forall v(t) \in L_2(0, T_1), \; t \in (0, T_1), \; j = \overline{1, n}. \tag{19}$$

В силу (13) выражения (19) примут вид

$$\int_0^{T_1} (q^2(\tau)\alpha_j(\tau), v(\tau))d\tau + \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{n_k} q_{ik}\bar{\varphi}_i(t_k; \alpha_j(\cdot)) \int_0^{T_1} (\tilde{g}_{ik}(\tau), v(\tau))d\tau =$$

$$= \int_0^{T_1} (B^T(\tau)\bar{z}_j(\tau), v(\tau))d\tau, \; \forall v(t) \in L_2(0, T_1), \; t \in (0, T_1), \; j = \overline{1, n}.$$

Тогда для вектор-функций $\alpha_j(t), \; t \in (0, T_1), \; j = \overline{1, n}$, справедливо:

$$q^2(t)\alpha_j(t) + \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} q_{ik}\bar{\varphi}_i(t_k; \alpha_j(\cdot))\tilde{g}_{ik}(t) = B^{\mathrm{T}}(t)\bar{z}_j(t); \; t \in (0, T_1), \; j = \overline{1, n} \Leftrightarrow$$

ISSN 0572-2691

$$\Leftrightarrow \alpha_j(t) = q^{-2}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\bar{z}_j(t) - \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} q^{-2}(t)q_{ik}\bar{\varphi}_i(t_k;\alpha_j(\cdot))\tilde{g}_{ik}(t);$$

$$t \in (0, T_1),\ j = \overline{1, n}. \qquad (20)$$

Поскольку $\bar{\varphi}_i(t_k;\alpha_j(\cdot)) = \int_0^{T_1} (\tilde{g}_{ik}(\tau), \alpha_j(\tau))d\tau;\ i, j = \overline{1, n};\ k = \overline{1, N},$ для нахождения величин $\bar{\varphi}_i(t_k;\alpha_j(\cdot))$; $i, j = \overline{1, n};\ k = \overline{1, N},$ умножим скалярно левую и правую части (20) на $\tilde{g}_{ik}(t)$, $t \in (0, T_1)$, $i, j = \overline{1, n};\ k = \overline{1, N},$ и проинтегрируем полученное выражение. Следовательно, $\bar{\varphi}_i(t_k;\alpha_j(\cdot)); i, j = \overline{1, n};\ k = \overline{1, N},$ находятся из системы алгебраических линейных уравнений:

$$\bar{\varphi}_i(t_k;\alpha_j(\cdot)) + \sum_{r=1}^{N}\sum_{s=1}^{n_r} q_{sr}\bar{\varphi}_s(t_r;\alpha_j(\cdot))b_{srik} = \int_0^{T_1} (B^T(t)\bar{z}_j(t), \tilde{g}_{ik}(t))dt;$$

$$i, j = \overline{1, n};\ k = \overline{1, N},$$

что завершает доказательство теоремы 4.

Следствие 1. Для компонент вектора гарантированной прогнозной оценки $\hat{x}(T_2)$ в силу (5), (8) и монотонного возрастания функции гиперболического косинуса справедливы оценки

$$\exp(\hat{\varphi}_i(T_2))ch\underline{\sigma}_{\varphi_i}(T_2) \le \hat{x}_i(T_2) \le \exp(\hat{\varphi}_i(T_2))ch\bar{\sigma}_{\varphi_i}(T_2),\ i = \overline{1, n}. \qquad (21)$$

Следствие 2. Для гарантированной ошибки σ прогнозной оценки $\hat{x}(T_2)$ в силу монотонного возрастания функции гиперболического синуса справедливы неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} \exp(\hat{\varphi}_i(T_2))sh\underline{\sigma}_{\varphi_i}(T_2)\beta_i \le \sigma \le \sum_{i=1}^{n} \exp(\hat{\varphi}_i(T_2))sh\bar{\sigma}_{\varphi_i}(T_2)\beta_i. \qquad (22)$$

4. Результаты численного эксперимента

В качестве примера приведен результат построения прогнозной оценки динамики распространения одного вида информации в социуме. Этот процесс целесообразно математически моделировать в виде систем дифференциальных уравнений. Такой подход продемонстрирован в работах [6, 10–12].

Пусть в социальной группе, которая состоит из индивидов, однинаковых по своим характеристикам усвоения информации, распространяется один вид информационных сообщений в результате межличностного общения и внешнего влияния (СМИ). Этот процесс будем моделировать в виде одного обыкновенного дифференциального нелинейного уравнения. Обозначим $a(t), t \in (0, T_2)$ известный параметр интенсивности межличностного общения в момент времени $t \in (0, T_2)$; $f(t), t \in (0, T_2),\ f(\cdot) \in L_2(0, T_2)$ — неизвестный параметр внешнего влияния в момент времени $t \in (0, T_2)$; $x(t;\ f(\cdot)), t \in (0, T_2)$ — та часть социальной группы, которая усвоила информационное сообщение в момент времени $t \in (0, T_2)$, причем $x(0) = x^0 > 0$. Тогда динамика количества индивидов, усвоивших информационное сообщение, описывается задачей Коши:

$$\frac{dx(t;\ f(\cdot))}{dt} = (a(t)\ln x(t;\ f(\cdot)) + f(t))x(t;\ f(\cdot)),\ t \in (0, T_2),\ x(0) = x^0. \qquad (23)$$

Пусть в точках $0 < t_1 < ... < t_N = T_1 < T_2$ наблюдается функция $x(t;\ f(\cdot))$, которая является решением (23):

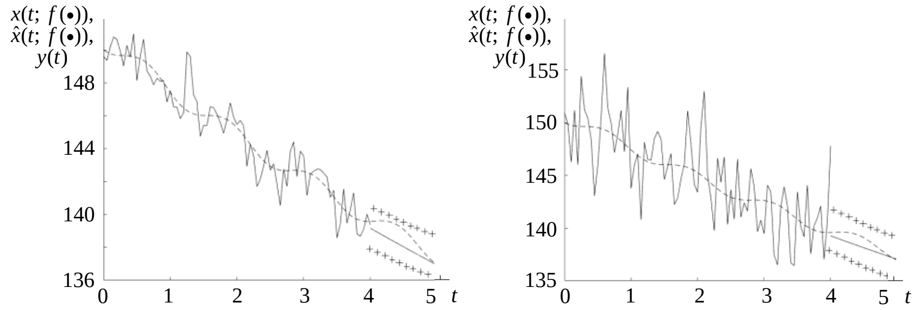
$$y_k = x(t_k;\ f(\cdot)) + \eta_k,\ \ k = \overline{1, N}, \tag{24}$$

при некоторых неизвестных значениях функции $f(t), t \in (0, T_2)$ и ошибках η_k, $k = \overline{1, N}$.

Поскольку рассматривается математическая модель распространения одного вида информационных сообщений, оценки (21) и (22) примут вид

$$\hat{x}(T_2) = \exp(\hat{\varphi}(T_2)) ch \underline{\sigma}_{\varphi}(T_2), \sigma = \exp(\hat{\varphi}(T_2)) sh \underline{\sigma}_{\varphi}(T_2),\ \ i = \overline{1, n}.$$

Результаты построения гарантированных прогнозных оценок динамики для математической модели (23) с параметрами $T_1 = 4$, $T_2 = 5$, $\Delta t = t_{i+1} - t_i$, $i = \overline{1{,}80}$, $x(0) = 150$, $a(t) = -0{,}05$, $q_1(t) = 1$, $\tilde{f}(t) = 0$, $t \in (0, 5)$, и наблюдениями вида (24), для которых известно, что величины η_k, $k = \overline{1{,}81}$, имеют нормальное распределение $N(0;\, 4)$, показаны на рисунке (*а*). Результаты построения гарантированных прогнозных оценок динамики для математической модели (23) с теми же параметрами и наблюдениями вида (24), для которых известно, что величины η_k, $k = \overline{1{,}81}$, имеют нормальное распределение $N(0;\, 9)$, показаны на рисунке (*б*) пунктирной линией — $x(t,\ f(\cdot))$, $t \in (0;5)$, сплошной — наблюдения $y(t)$, $t \in (0;\, 4)$ и прогноз $\hat{x}(t)$, $t \in (4;\, 5)$, отметками + — коридор погрешности гарантированной прогнозной оценки $\hat{x}(t)$, $t \in (4;\, 5)$.



а *б*

Анализируя полученные графики, можно сделать вывод, что предложенный алгоритм дает адекватный гарантированный прогноз и в случае существенных ошибок наблюдения.

Заключение

Для математических моделей, заданных системами дифференциальных уравнений Гомперца при дискретных наблюдениях, предложены эффективные алгоритмы нахождения гарантированных и приближенных гарантированных прогнозных ошибок векторов состояний и их ошибок. Приведены результаты численных экспериментов (в которых решалась задача оценки прогноза динамики распространения одного вида информации в социуме), которые позволяют сделать выводы о практической ценности данного подхода. На основании этого можно утверждать о целесообразности использования предложенных алгоритмов для особых случаев общей модели распространения информации, которые, например, учитывают забывание и двухэтапное усвоение информации.

О.Г. Наконечний, П.М. Зінько, Т.П. Зінько, Ю.М. Шевчук

ГАРАНТОВАНІ ПРОГНОЗНІ ОЦІНКИ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ДИНАМІКОЮ ГОМПЕРЦА ПРИ СПОСТЕРЕЖЕННЯХ У ДИСКРЕТНІ МОМЕНТИ ЧАСУ

Проаналізовано модель поширення інформації в соціумі. Припускається, що в соціокомунікативному просторі поширюється *n* типів інформаційних повідомлень, що відрізняються за змістом. Кількість осіб, які розповсюджують один із типів інформаційних повідомлень, є ключовими показниками динаміки моделі. Розповсюдження інформаційних повідомлень відбувається через внутрішні (міжособистісне спілкування) та зовнішні (вплив засобів масової інформації) потоки. Модель представлена у вигляді системи *n* нелінійних диференціальних рівнянь Гомперца. Такі моделі доцільно застосовувати для практичних задач аналізу поширення інформації в соціумі, динаміка яких швидко зростає за часом, а також в силу своєї нелінійної правої частини подібні моделі претендують на адекватне представлення процесів з предметної області. Однією із практичних важливих задач, які виникають при аналізі процесів поширення інформації в соціумі, є задача знаходження прогнозних оцінок динаміки таких процесів. Для систем диференціальних рівнянь Гомперца ця задача стає нетривіальною в силу наявності натуральних логарифмів в правих частинах цих похідних. Сформульовано задачу знаходження гарантованих прогнозних оцінок векторів. І для окремого випадку цієї задачі з дискретними спостереженнями запропоновано ефективні алгоритми знаходження гарантованих та наближених гарантованих прогнозних оцінок векторів стану та похибок прогнозних гарантованих оцінок. Як приклади представлено результати знаходження гарантованих прогнозних оцінок динаміки математичної моделі розповсюдження одного виду інформації в соціумі. Результати чисельного комп'ютерного експерименту демонструють практичні можливості даного підходу. Методику можна використовувати при розробці систем підтримки прийняття рішень для аналізу процесів у соціокомунікативному просторі.

Ключові слова: системи нелінійних диференціальних рівнянь, динаміка Гомперца, прогнозні гарантовані оцінки, дискретні спостереження, невизначеність.

A.G. Nakonechnyi, P.N. Zinko, T.P. Zinko, Yu.M. Shevchuk

GUARANTEED PREDICTIVE ESTIMATION OF SOLUTIONS OF SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH THE GOMPERTZIAN DYNAMICS WITH OBSERVATIONS IN DISCRETE TIME MOMENTS

In this paper, we introduce a mathematical model of spreading information messages. Suppose, a community is influenced by one of n sources of information. The number of information made by each of the sides is taken as key parameter promoting accomplishment of aim. Information can be spread in the community along internal (interpersonal communication of the member of social community) and external information flow. The model has the form of a system of non-linear differential equations with Gompertzian dynamics and non-stationary parameters. These mathematical models can be useful for describe processes that grow rapidly over time. Systems of differential equations with Gompertzian dynamics claim to be an adequate representation of processes from the subject area because they have a non-linear right part. The problem of finding predictive an estimate of the dynamics of such processes is practically an important problem of analyzing the information spreading process in society. This problem becomes nontrivial for the systems of differential equations with Gompertz because there are natural logarithms in the right sides of these equations. We formulated the problem of finding the predictive estimation and error for the systems of differential equations with Gompertzian dynamics. We the algorithms for building guaranteed predictive estimations and error and approximate guaranteed predictive estimations offered for the special case of this problem with discrete observations. We consider the results of problem numerical experiments to build guaranteed estimates for mathematical model of spreading one type of information. The analysis of these results has demonstrated the practical meaning of the obtained approach. The obtained results can be useful for the development of decision support systems for analyzing processes in the socio-communicative space.

Keywords: systems of differential nonlinear equations, Gompertzian dynamics, guaranteed predictive estimation, discrete observations, uncertainty.

1. *Губарев В.Ф., Дарьин А.Н., Лысюченко И.А.* Нелинейный оцениватель состояния по данным на скользящем интервале и возможность его применения в задаче ориентации космического аппарата. «*Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики»*. 2011. № 1. С. 118−132.
2. *Gubarev V.F., Shevchenko V.N., Gummel A.V.* State estimation for systems subjected to bounded uncertainty using moving horizon approach. *Prep. Of the 15-th IFAC Symposium on system identification*, July 6−8, 2009. Saint-Malo, France, 2009. P. 910−915.
3. *Бакан Г.М.* Эллипсоидальные алгоритмы гарантированного оценивания и рекуррентный метод наименьших квадратов в задачах фильтрации состояний динамических систем. *Проблемы управления и информатики*. 1997. № 3 С. 34−48.
4. *Кунцевич В.М.* Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. Киев: Наук. думка, 2006. 264 с.
5. *Наконечний О.Г.* Оцінювання параметрів в умовах невизначеності. *Наукові записки Київського національного університету*. 2004. **7**. С. 102−111.
6. *Наконечний О.Г., Зінько П.М., Шевчук Ю.М.* Прогнозні оцінки в математичних моделях поширення інформації за невизначеностей. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2017. № 4. С. 54−65. DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2017.4.05.
7. *Наконечный А.Г., Марценюк В.П.* Задачи управляемости для дифференциальных уравнений динамики Гомперца. *Кибернетика и системный анализ*. 2004. № 2. С. 123−133. DOI: 10.1023/B:CASA.0000034451.73657.88.
8. *Kalas J., Novotny J., Michalek J., Nakonechniy O.* Mathematical model for cancer prevalence and cancer mortality. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*. 2013. № 2. С. 44−54.
9. *Наконечний О.Г., Зінько П.М.* Задачі протиборства в системах з динамікою Гомперца. *Журнал обчислювальної та прикладної математики*. 2015. № 3 (120). С. 50−60.
10. *Mikhailov A.P., Petrov A.P., Proncheva O.G., Marevtseva N.A.* Mathematical modeling of information warfare in a society. *Mediterranean Journal of Social Sciences*. 2015. **6**, № 5. P. 27−35. DOI:10.5901/mjss.2015.v6n5s2p27.
11. *Наконечний О.Г., Шевчук Ю.М.* Математична модель розповсюдження інформації з нестаціонарними параметрами. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка.* Серія Фізико-математичні науки. 2016. № 3. С. 98−105.
12. *Ивохин Е.В., Науменко Ю.А.* О формализации процессов распространения информации на основе гибридных моделей диффузии. *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики».* 2018. № 4. С. 51−58. DOI: 10.1615/ JAutomat InfScien.v50.i7.70

Получено 29.03.2019