

УДК 517.9

Л.А. Власенко, А.Г. Руткас, В.В. Семенец, А.А. Чикрий

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ИМПУЛЬСНОМ УПРАВЛЕНИИ В ДЕСКРИПТОРНЫХ СИСТЕМАХ

Ключевые слова: дескрипторная система, дифференциально-алгебраическое уравнение, квадратичный функционал качества, интенсивности импульсов, моменты приложения импульсов, оптимальное импульсное управление, сопряженное состояние, двухточечная краевая задача, радиотехнический фильтр, переходной режим.

Введение

Понятие импульсного управления возникло для описания воздействий, которые вызывают мгновенные изменения в состояниях системы. Импульсное управление находит многочисленные приложения в технике, экономике, финансах, информатике, медицине и т.д. [1]. Одни из первых постановок задач оптимального импульсного управления приводятся в [2, 3]. Методы исследования игровых задач из [4, 5] успешно применялись в [6–8] для изучения динамических игр в системах с управлениями импульсного типа, а в [9] — в системах, претерпевающих импульсные возмущения в дискретные моменты времени. В [10, 11] решалась задача об оптимальном импульсном управлении стохастической системой.

Исследование задачи оптимального импульсного управления мы иллюстрируем на примере радиотехнической системы — электрического четырехполюсника. Динамика подобных систем в общем случае описывается дифференциально-алгебраическими уравнениями и поэтому эти системы относятся к классу дескрипторных систем. Такие сосредоточенные системы хорошо известны в теории управления [12–15] (см. также библиографию в этих работах). Конечномерные дескрипторные системы управления можно использовать для аппроксимации бесконечномерных систем управления типа Соболева или неявных систем, например [16–18].

Введем обозначения: $L_2(0, T; \mathbf{R}^n)$ — пространство вектор-функций со значениями в \mathbf{R}^n , суммируемых с квадратом нормы на $[0, T]$; $W_2^k(0, T; \mathbf{R}^n)$ — пространство Соболева порядка k вектор-функций из $L_2(0, T; \mathbf{R}^n)$, у которых обобщенные производные до порядка k включительно принадлежат $L_2(0, T; \mathbf{R}^n)$. Функции из $W_2^1(0, T; \mathbf{R}^n)$ будем считать непрерывными на $[0, T]$, изменив их, если необходимо, на множестве нулевой меры. Символы $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и $\|\cdot\|$ обозначают скалярное произведение и норму в соответствующих пространствах, символ E обозначает единичную матрицу надлежащей размерности, транспонированную

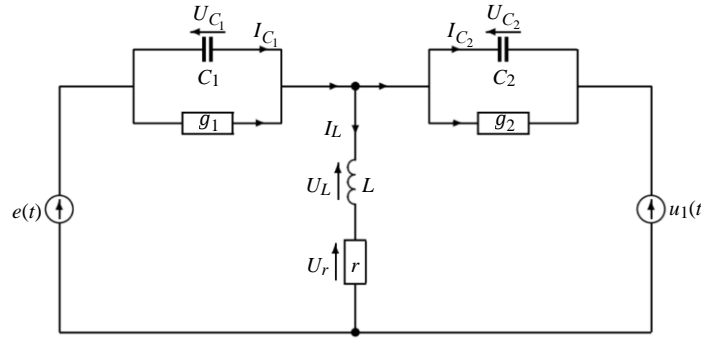
© Л.А. ВЛАСЕНКО, А.Г. РУТКАС, В.В. СЕМЕНЕЦ, А.А. ЧИКРИЙ, 2019

*Международный научно-технический журнал
«Проблемы управления и информатики», 2019, № 3*

матрицу к матрице K обозначаем K' , сопряженный оператор к оператору Ψ обозначаем Ψ^* . Если 0 — квадратная нулевая матрица, то полагаем $0^0 = E$.

1. Постановка задачи для электрической цепи

Для демонстрации предлагаемого метода исследования оптимального импульсного управления рассмотрим электрическую цепь, изображенную на рисунке. Цепь имеет два источника напряжения: $e(t)$ и $u_1(t)$; $e(t)$ — заданная функция от времени, $u_1(t)$ — управляемый источник напряжения. Параллельно с емкостями C_1, C_2 включены проводимости g_1, g_2 . На внутренней ветви расположены индуктивность L и сопротивление r .



Токи $I_{C_1}, I_{C_2}, I_{g_1}, I_{g_2}, I_L$ и напряжения $U_{C_1}, U_{C_2}, U_r, U_L$ удовлетворяют законам Кирхгофа

$$I_{C_1} + I_{g_1} = I_{C_2} + I_{g_2} + I_L, \quad U_{C_1} + U_L + U_r = e, \quad U_{C_1} + U_{C_2} + u_1 = e \quad (1)$$

и уравнениям

$$U_L = L \frac{d}{dt} I_L, \quad U_r = r I_L, \quad I_{C_j} = C_j \frac{d}{dt} U_{C_j}, \quad I_{g_j} = g_j U_{C_j}, \quad j=1, 2, \quad (2)$$

где L, r, C_j, g_j — положительные постоянные. Состояние электрической цепи характеризуется вектором

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_L(t) \\ U_{C_1}(t) \\ U_{C_2}(t) \end{pmatrix},$$

состоящим из «энергетических» компонент, которые отвечают инерционным элементам. С помощью (1), (2) получаем систему трех дифференциально-алгебраических уравнений относительно «энергетических» компонент:

$$\begin{aligned} L \frac{d}{dt} I_L + U_{C_1} + r I_L &= e(t), \\ C_1 \frac{d}{dt} U_{C_1} - C_2 \frac{d}{dt} U_{C_2} - I_L + g_1 U_{C_1} - g_2 U_{C_2} &= 0, \\ U_{C_1} + U_{C_2} &= e(t) - u_1(t). \end{aligned} \quad (3)$$

Перепишем систему уравнений (3) в векторной форме относительно вектора состояний $x(t)$:

$$\frac{d}{dt}[Ax(t)] + Bx(t) = f(t) + K_1 u_1(t), \quad (4)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & -C_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} r & 1 & 0 \\ -1 & g_1 & -g_2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} e(t) \\ 0 \\ e(t) \end{pmatrix}, K_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Как и в [19], допускаем, что в модели электрической системы рассматривается идеализированное устройство, способное мгновенно создавать или разрушать путь для прохождения электрического тока. Это влечет за собой возникновение переходного процесса. Идеализацией такого типа является источник импульсных воздействий. Для цепи, изображенной на рисунке, предполагаем, что ток $I_L(t)$ регулируется импульсными воздействиями в моменты времени $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N \in [0, T]$:

$$\Delta I_L(t)|_{t=\tau_k} = I_L(\tau_k + 0) - I_L(\tau_k - 0) = w_k, \quad k = 1, \dots, N. \quad (6)$$

Здесь w_1, \dots, w_N — интенсивности или веса, отвечающие моментам импульсных воздействий. Математически импульсы описываются с помощью δ -функции Дирака $\delta(t)$ (распределение или обобщенная функция). Регулирование системой (4) с помощью импульсных воздействий (6) реализуется в виде импульсного управления

$$u_2 = \sum_{k=1}^N w_k \delta(t - \tau_k). \quad (7)$$

С помощью импульсного управления (7) и матрицы K_2 при импульсном управлении

$$K_2 = \begin{pmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

система (4) с импульсными воздействиями (6) преобразуется к виду

$$\frac{d}{dt}[Ax(t)] + Bx(t) = f(t) + K_1 u_1(t) + K_2 u_2. \quad (9)$$

Равенства и операции в (9) понимаются в смысле теории распределений или обобщенных функций. Это означает, что вместо уравнения (9) мы рассматриваем уравнение (4) для $t \neq \tau_k$, а в точках τ_k рассматриваем импульсные воздействия:

$$(Ax)(\tau_k + 0) - (Ax)(\tau_k - 0) = K_2 w_k, \quad k = 1, \dots, N.$$

Математическая модель электрической цепи с нелинейными сосредоточенными элементами, когда токи и напряжения подвергаются импульсным воздействиям, описана в [20]. В этой работе изучались переходные процессы в электрической цепи, импульсное управление не рассматривалось.

Регулирование системы (9) осуществляется с помощью управления $u = \{u_1(t), u_2\}$, в котором $u_1(t)$ — «обычное управление», в дальнейшем называемое измеримым управлением, а u_2 — чисто импульсное управление с весами w_k и моментами приложения импульсов τ_k . Задача оптимального импульсного управления в системе (3) состоит в выборе входного (управляющего) напряжения $u_1(t)$ и импульсного управления u_2 (7), реализующих минимум «энергетического» квадратичного функционала с импульсными интенсивностями:

$$J(u) = \int_0^T [LI_L^2(t) + C_1 U_{C_1}^2(t) + C_2 U_{C_2}^2(t) + u_1^2(t)] dt + \sum_{k=1}^N Lw_k^2. \quad (10)$$

Интегральное слагаемое характеризует энергию инерционных элементов цепи и измеримого управления, сумма — интенсивности импульсов в моменты времени τ_1, \dots, τ_N .

2. Постановка задачи оптимального импульсного управления для дескрипторной системы

В данном разделе уравнение (9) будем рассматривать в более общем виде, когда A и B — вещественные матрицы размеров $n \times n$, K_1 и K_2 — вещественные матрицы размеров $n \times m_1$ и $n \times m_2$ соответственно, $f(t)$ — n -мерная вектор-функция со значениями в \mathbf{R}^n . Уравнение (9) является не разрешенным относительно производной, т.е. дифференциально-алгебраическим, а система управления, состоящая которой описывается этим уравнением, — дескрипторной. Управление $u = \{u_1(t), u_2\}$ состоит из m_1 -мерного измеримого («обычного») вектора-управления $u_1(t)$ и чисто импульсного управления u_2 (7) с m_2 -мерными векторами-интенсивностями импульсов $w_k \in \mathbf{R}^{m_2}$ в моменты τ_k приложения этих импульсов. Уравнение (9) будем рассматривать на отрезке $[0, T]$. Заметим, что в случае явного уравнения с единичной матрицей $A = E$ такое описание системы с импульсным управлением согласуется с описанием динамики импульсно управляемых систем из монографии [6].

Для исследования задачи оптимального импульсного управления в дескрипторной системе придерживаемся схемы исследования из работ [21, 22]. В отличие от работы [22], здесь мы не налагаем никаких ограничений на резольвенту характеристического пучка матриц, отвечающего уравнению динамики системы. Это ограничение также снято в задаче оптимального импульсного управления в [21]. Однако, в отличие от [21], в данной статье исследования проводятся в вещественных пространствах, а управление состоит из двух составляющих: чисто импульсной и измеримой.

Для исследования задачи оптимального импульсного управления для уравнения (9) опишем решение этого уравнения при различных допустимых управлениях $u = \{u_1(t), u_2\}$. Пусть $f(t) \in L_2(0, T; \mathbf{R}^n)$, $u_1(t) \in L_2(0, T; \mathbf{R}^{m_1})$. Из чисел $0, T, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ выберем различные и расположим их в возрастающем порядке так, чтобы $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{m+1} = T$. Тогда импульсное управление u_2 (7) допускает представление

$$u_2 = \sum_{j=0}^{m+1} h_j \delta(t - t_j), \quad h_j = \sum_{\tau_k = t_j} w_k.$$

Если среди чисел τ_k нет равных 0 или T , то положим $h_0 = 0$ или $h_{m+1} = 0$. Под решениями уравнения (9) на отрезке $[0, T]$ будем понимать распределения типа функций $x(t) \in L_2(0, T; \mathbf{R}^n)$ таких, что $Ax(t) \in W_2^1(t_j, t_{j+1}; \mathbf{R}^n)$ для $j = 0, \dots, m$, и таких, что при почти всех $t \in [0, T]$ справедливо уравнение (4), а в точках t_j выполняются равенства (импульсные воздействия)

$$(Ax)(t_j + 0) - (Ax)(t_j - 0) = K_2 h_j, \quad j = 0, \dots, m.$$

Функции $Ax(t)$ считаются непрерывными на $[t_j, t_{j+1}]$ после возможного изменения на множестве нулевой меры (непрерывность в точках t_j и t_{j+1} понимается справа и слева). Значение $(Ax)(t_0 - 0) = (Ax)(-0)$ задается и играет роль начального условия:

$$Ax(-0) = q. \quad (11)$$

Управлению $u = \{u_1(t), u_2\}$ отвечает n -мерный вектор решения $x(t) = x(t; u)$ начальной задачи (9), (11).

Известно, что пучок матриц $\lambda A + B$ существенно влияет на динамику дифференциально-алгебраического уравнения. Основное ограничение в данной работе состоит в том, что характеристический пучок матриц $\lambda A + B$ дифференциально-алгебраического уравнения (9) регулярен, т.е. его определитель отличен от тождественно нуля. Положим

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\lambda A + B)^{-1} d\lambda, \quad G = AIA + B - AIB, \quad (12)$$

$$W = -AIBG^{-1}, \quad H = AG^{-1} - AIA G^{-1},$$

где γ — контур, ограничивающий все собственные числа пучка; H — нильпотентная матрица (см. [21] и библиографию в этой работе). В случае вещественных матриц A и B матрица I также является вещественной. Пусть ν — индекс нильпотентности матрицы H : $H^\nu = 0$, $H^{\nu-1} \neq 0$. В случае $\nu > 1$ предполагаем, что $H^\ell f(t) \in W_2^\ell(0, T; \mathbf{R}^n)$ для $\ell = 1, \dots, \nu - 1$.

Предположим, что матрицы K_1 и K_2 при измеримом и чисто импульсном управлении удовлетворяют ограничениям

$$HK_1 = 0, \quad AIK_2 = K_2. \quad (13)$$

Эти ограничения выполняются для явного уравнения, когда $A = E$. Применим результат из [21] (см. формулу для решения (9)) относительно существования и единственности решения начальной задачи для дифференциального уравнения с импульсными воздействиями. Ограничение (8) из [21] на начальный вектор q (11) принимает вид

$$(E - AI)q = \sum_{\ell=0}^{\nu-1} (-1)^\ell \frac{d^\ell}{dt^\ell} [H^{\ell+1}(E - AI)f(t)]_{t=0}. \quad (14)$$

Тогда существует единственное решение $x(t) = x(t; u)$ начальной задачи (9), (11), и это решение допускает представление (ср. с формулой (1.24) из [6] для явного уравнения)

$$x(t) = G^{-1} \int_0^t e^{W(t-s)} AIK_1 u_1(s) ds + G^{-1} [E - AI] K_1 u_1(t) + G^{-1} \sum_{k=1}^N \chi(t - \tau_k) e^{W(t-\tau_k)} K_2 w_k + \varphi(t), \quad (15)$$

$$\varphi(t) = G^{-1} e^{Wt} AIq + G^{-1} \int_0^t e^{W(t-s)} AIf(s) ds + G^{-1} \sum_{\ell=0}^{\nu-1} (-1)^\ell \frac{d^\ell}{dt^\ell} [H^\ell (E - AI)f(t)], \quad (16)$$

где $\chi(t)$ — функция Хевисайда, равная нулю для отрицательных значений аргумента и единице — для положительных.

Пусть $w = \{w_1, \dots, w_N\}$ — вектор пространства $\mathbf{R}^{m_2 N}$, $\tau = \{\tau_1, \dots, \tau_N\}$ — вектор пространства \mathbf{R}^N . Эти векторы отвечают чисто импульсному управлению u_2 в (7). Введем множество векторов $\Theta = \{\tau \in \mathbf{R}^N : \tau_k \in [0, T]\}$. Импульсное управление $u = \left\{ u_1(t), u_2 = \sum_{k=1}^N w_k \delta(t - \tau_k) \right\}$ управляет системой (9), (11) путем изменения измеримого управления $u_1(t) \in L_2(0, T; \mathbf{R}^{m_1})$, моментов импульсных воздействий $\tau \in \Theta$ и соответствующих интенсивностей импульсов $w \in \mathbf{R}^{m_2 N}$. Множество всевозможных допустимых импульсных управлений обозначим U . Для оценки качества управления системой (9), (11) определим функционал

$$J(u) = \int_0^T [\langle Rx(t), x(t) \rangle + \langle F_1 u_1(t), u_1(t) \rangle] dt + \langle F_2 w, w \rangle. \quad (17)$$

Здесь R, F_1, F_2 — вещественные матрицы размеров $n \times n$, $m_1 \times m_1$, $m_2 N \times m_2 N$, которые неотрицательно-определенные и, более того,

$$F_j \geq \alpha E_j, \quad \alpha > 0, \quad j = 1, 2. \quad (18)$$

Задача оптимального импульсного управления системой (9), (11) заключается в нахождении минимума

$$\min_{u \in U} J(u) \quad (19)$$

функционала качества $J(u)$ (17) на решениях $x(t) = x(t; u)$ системы. Управление

$$u_* = \left\{ u_{1*}(t), u_{2*} = \sum_{k=1}^N w_{*k} \delta(t - \tau_{*k}) \right\} \in U, \text{ на котором достигается минимум (19), т.е.}$$

$J(u_*) = \min_{u \in U} J(u)$, будем называть оптимальным управлением, а отвечающее ему

решение $x_*(t) = x(t; u_*)$ системы (9), (11) — оптимальным решением. Соответственно в рассмотрение вводится термин оптимальное состояние (или траектория).

3. Схема метода исследования задачи оптимального импульсного управления для дескрипторной системы

В данном разделе метод исследования задачи оптимального импульсного управления распределенными системами [21, 22] распространяется на сосредоточенные системы, динамика которых описывается дифференциально-алгебраическим уравнением (9) в вещественном пространстве с импульсным управлением $u = \{u_1(t), u_2\}$ и начальным условием (11). Сначала управление системой осуществляется изменением измеримого управления $u_1(t) \in L_2(0, T; \mathbf{R}^{m_1})$ и интенсивностей $w \in \mathbf{R}^{m_2 N}$ в фиксированные моменты времени $\tau \in \Theta$. Такая задача заключается в нахождении следующего минимума функционала качества $J(u) = J(u_1, \tau, w)$ (17):

$$\min_{\substack{u_1 \in L_2 \\ w \in \mathbf{R}^{m_2 N}}} J(u_1, \tau, w). \quad (20)$$

Управление $u_{*\tau}$, на котором достигается минимум (20), называется τ -оптимальным управлением, а соответствующее ему решение $x_{*\tau}(t) = x(t; u_{*\tau})$ системы (9), (11) — τ -оптимальным решением. Установим условия существования и единственности τ -оптимального управления задачи (9), (11), (20). Подобная задача решена в [21] (см. теорему 1) в случае чисто импульсного управления, т.е. когда отсутствовало измеримое управление $u_1(t)$, и в [22] (см. теорему 2) в случае, когда индекс нильпотентности матрицы H в (12) равен 1. В предлагаемой ниже теореме 1 мы отказываемся от указанных ограничений, а также проводим исследования в вещественных пространствах, что существенно для теории управления.

Теорема 1. Предположим, что справедливы следующие ограничения: характеристический пучок матриц $\lambda A + B$ дифференциально-алгебраического уравнения (9) является регулярным; $f(t) \in L_2(0, T; \mathbf{R}^n)$; если индекс нильпотентности ν матрицы H больше 1, то $H^l f(t) \in W_2^l(0, T; \mathbf{R}^n)$ для $l = 1, \dots, \nu - 1$; матрицы K_1 и K_2 при измеримом и чисто импульсном управлениях удовлетворяют соотношениям (13); вектор q в начальном условии (11) удовлетворяет соотношению (14). Тогда для любых моментов импульсных воздействий $\tau \in \Theta$ существуют единственные измеримое управление $u_{1*\tau} \in L_2(0, T; \mathbf{R}^{m_1})$, вектор интенсивностей импульсов $w_{*\tau} = \{w_{*\tau_1}, \dots, w_{*\tau_N}\} \in \mathbf{R}^{m_2 N}$ и соответствующее им τ -оптимальное управление $u_{*\tau} = \{u_{1*\tau}(t), u_{2*\tau}\}$ с $u_{2*\tau} = \sum_{k=1}^N w_{*\tau k} \delta(t - \tau_k)$, на котором достигается минимум (20) функционала качества (17).

Доказательство. При доказательстве придерживаемся схем доказательств теоремы 1 из [21] и теоремы 2 из [22]. Представим функционал (17) как квадратичную форму в декартовом произведении пространств $H_U = L_2(0, T; \mathbf{R}^{m_1}) \times \mathbf{R}^{m_2 N}$. Введем ограниченные линейные операторы $F\{u_1, w\} = \{F_1 u_1, F_2 w\}$ из H_U в H_U и Ψ из H_U в $L_2(0, T; \mathbf{R}^n)$:

$$\begin{aligned} \Psi\{u_1, w\} = & G^{-1} \int_0^t e^{W(t-s)} A I K_1 u_1(s) ds + G^{-1} [E - A I] K_1 u_1(t) + \\ & + G^{-1} \sum_{k=1}^N \chi(t - \tau_k) e^{W(t-\tau_k)} A I K_2 w_k. \end{aligned} \quad (21)$$

Тогда решение $x(t)$ (15) записывается в виде $x(t) = \Psi\{u_1, w\} + \varphi$. Следовательно, функционал $J(u)$ (17) допускает представление

$$J(u) = \langle R(\Psi\{u_1, w\} + \varphi), \Psi\{u_1, w\} + \varphi \rangle_{L_2} + \langle F\{u_1, w\}, \{u_1, w\} \rangle_{H_U}, \quad (22)$$

где функция $\varphi(t) \in L_2(0, T; \mathbf{R}^{m_1})$ определена в (16). С помощью ограниченного линейного оператора

$$M = F + \Psi^* R \Psi : H_U \rightarrow H_U \quad (23)$$

выражение (22) принимает вид

$$J(u) = \langle M\{u_1, w\}, \{u_1, w\} \rangle_{H_U} + 2 \langle \Psi^* R \varphi, \{u_1, w\} \rangle_{H_U} + \langle R \varphi, \varphi \rangle_{L_2}.$$

В силу ограничений (18) оператор M имеет ограниченный линейный обратный $M^{-1}: H_U \rightarrow H_U$ такой, что справедлива оценка его нормы $\|M^{-1}\| \leq \alpha^{-1}$. Поэтому подобно [22] устанавливаем, что управление вида

$$u_{*\tau} = \{u_{1*\tau}(t), u_{2*\tau}\} = -M^{-1}\Psi^* R\varphi \quad (24)$$

— единственное τ -оптимальное управление, так как при всех $u \in U$ имеем

$$J(u) - J(u_{*\tau}) \geq \left\| \{u_1 - u_{1*\tau}, w - w_{*\tau}\} \right\|_{H_U}^2.$$

Это завершает доказательство теоремы.

Теперь можно осуществить оптимизацию не только путем изменения измеримого управления $u_1(t) \in L_2(0, T; \mathbf{R}^{m_1})$ и интенсивностей $w \in \mathbf{R}^{m_2 N}$, но и моментов времени $\tau \in \Theta$. Займемся задачей оптимального импульсного управления, заключающейся в поиске минимума (19) функционала качества (17). Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Предположим, что справедливы ограничения теоремы 1. Тогда существует единственное оптимальное управление $u_* \in U$, на котором достигается минимум (19) функционала качества (17).

Доказательство. В силу теоремы 1 при любых моментах импульсных воздействий $\tau \in \Theta$ существует единственное τ -оптимальное управление $u_{*\tau}$ (24).

Рассмотрим функционал качества (17) для этих управлений как функцию от $\tau \in \Theta$: $J_*(\tau) = J(u_{*\tau}): \Theta \rightarrow \mathbf{R}$. Покажем, что функция $J_*(\tau)$ непрерывна. Действительно, оператор $\Psi = \Psi(\tau)$ (21) зависит от τ и сильно непрерывен по $\tau \in \Theta$.

Сильно непрерывным по $\tau \in \Theta$ также является его сопряженный $\Psi^* = \Psi^*(\tau)$:

$L_2(0, T; \mathbf{R}^n) \rightarrow H_U$:

$$\Psi^* x = \{u_1, w\}, \quad w = \left\{ K_2' I A' \int_{\tau_k}^T e^{W'(s-\tau_k)} (G')^{-1} x(s) ds \right\}_{k=1}^{m_2},$$

$$u_1(t) = K_1' I A' \int_t^T e^{W'(s-t)} (G')^{-1} x(s) ds + K_1' [E - I A'] (G')^{-1} x(t).$$

Оператор $M = M(\tau)$ (23) и его равномерно ограниченный обратный $M^{-1}(\tau)$ сильно непрерывны по $\tau \in \Theta$. Отсюда следует непрерывность функции $J_*(\tau) = J(-M^{-1}(\tau)\Psi^*(\tau)R\varphi)$. Тогда достигается минимум $\min_{\tau \in \Theta} J_*(\tau) = J_*(\tau_*)$.

Следовательно, оптимальное управление u_* , на котором достигается минимум (19), есть

$$u_* = u_{*\tau_*} = \left\{ u_{1*\tau_*}(t), \sum_{k=1}^N w_{*k} \delta(t - \tau_{*k}) \right\},$$

$$\{u_{1*\tau_*}(t), w_*\} = -M^{-1}(\tau_*) \Psi^*(\tau_*) R\varphi.$$

Теорема доказана.

В теории оптимального управления для практических приложений оптимальное управление и оптимальное состояние строятся путем перехода к сопряженному состоянию и сопряженной системе [23]. Следуя идеям доказа-

теоремы 3 из [21] и следствия 1 из [22], τ -оптимальное управление для задачи (9), (11), (20) можно построить с помощью сопряженного состояния $p(t) \in L_2(0, T; \mathbf{R}^n)$, которое выражается состоянием $x(t)$ системы (9), (11) как

$$p(t) = (AI)' \int_t^T e^{W'(s-t)} (G')^{-1} R x(s) ds + [E - (AI)'] (G')^{-1} R x(t).$$

Имеем следующую теорему.

Теорема 3. Предположим, что справедливы ограничения теоремы 1. Тогда для любого $\tau \in \Theta$ краевая задача

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [Ax(t)] + Bx(t) &= f(t) - K_1 F_1^{-1} K_1' p(t) - K_2 \sum_{k=1}^N \rho_k \delta(t - \tau_k), \\ \frac{d}{dt} [A'p(t)] &= B'p(t) - Rx(t), \quad t \in [0, T], \\ Ax(-0) &= q, \quad A'p(T) = 0, \\ \{\rho_1, \dots, \rho_N\} &= F_2^{-1} \{K_2' I' A' p(\tau_k)\}_{k=1}^N \end{aligned} \quad (25)$$

имеет единственное решение $x(t) = x_{*\tau}(t) \in L_2(0, T; \mathbf{R}^n)$, $p(t) \in L_2(0, T; \mathbf{R}^n)$. Управление

$$u_{*\tau} = \left\{ u_{1*\tau}(t) = -F_1^{-1} K_1' p(t), u_{2*\tau} = \sum_{k=1}^N \rho_k \delta(t - \tau_k) \right\} \quad (26)$$

является τ -оптимальным управлением, а функция $x_{*\tau}(t)$ — соответствующим τ -оптимальным решением задачи (9), (11), (20).

4. Приложение к исследованию переходных режимов радиотехнического фильтра

Вернемся к задаче оптимального импульсного управления переходными режимами (3) электрической цепи на рисунке из разд. 1. Как было показано ранее, система (3) записывается в общем виде (9) с параметрами (5), (8), а энергетический функционал качества (10) — в виде (17). Начальное условие (11) предполагает задание в начальный момент времени следующих значений: $LI_L(-0) = q_1$, $C_1 U_{C_1}(-0) - C_2 U_{C_2}(-0) = q_2$. Здесь $n = 3$, $m_1 = m_2 = 1$. Пучок матриц $\lambda A + B$ регулярный. Для несобственных чисел

$$\lambda \neq \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \quad a = L \frac{g_{12}}{C_{12}} + \frac{r}{L}, \quad b = \frac{r g_{12} + 1}{L C_{12}},$$

$$C_{12} = C_1 + C_2, \quad g_{12} = g_1 + g_2$$

существует обратная матрица

$$(\lambda A + B)^{-1} = d^{-1}(\lambda) \begin{pmatrix} d_2(\lambda) + d_3(\lambda) & -1 & -d_3(\lambda) \\ 1 & d_1(\lambda) & d_1(\lambda) d_3(\lambda) \\ -1 & -d_1(\lambda) & d_1(\lambda) d_2(\lambda) + 1 \end{pmatrix},$$

$$d_1(\lambda) = \lambda L + r, \quad d_{j+1}(\lambda) = \lambda C_j + g_j, \quad j = 1, 2,$$

$$d(\lambda) = d_1(\lambda) [d_2(\lambda) + d_3(\lambda)] + 1.$$

Находим матрицы в (12):

$$AI = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-C_2}{C_{12}} \\ 0 & 1 & -\mu \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} L & \frac{C_2}{C_{12}} & \frac{C_2}{C_{12}} \\ 0 & \eta & \beta \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad G^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{L} & 0 & \frac{-C_2}{LC_{12}} \\ 0 & \frac{1}{C_{12}} & \frac{-\beta}{C_{12}} \\ 0 & \frac{-1}{C_{12}} & \frac{\eta}{C_{12}} \end{pmatrix},$$

$$H = 0, \quad W = \begin{pmatrix} \frac{-r}{L} & \frac{-1}{C_{12}} & \frac{rC_2 + \mu L}{LC_{12}} \\ \frac{1}{L} & \frac{-g_{12}}{C_{12}} & \frac{\mu L g_{12} - C_2}{LC_{12}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\eta = \mu + C_1, \quad \beta = \mu - C_2, \quad \mu = \frac{C_2 g_1 - C_1 g_2}{C_{12}}.$$

Здесь индекс нильпотентности нулевой матрицы H равен $\nu=1$. В представлении (17) для энергетического функционала (10) имеем $F_1=1$, $F_2=LE$, $R = \text{diag}\{L, C_1, C_2\}$. Пусть напряжение $e(t)$ принадлежит классу $e(t) \in L_2(0, T)$.

Относительно начального вектора $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$ (11) предполагаем, что $q_3=0$. Второе

условие в (13) на матрицу K_2 (8) выполняется. Множество U допустимых импульсных управлений состоит из элементов $u = \left\{ u_1(t), u_2 = \sum_{k=1}^N w_k \delta(t - \tau_k) \right\}$, где $u_1(t) \in L_2(0, T)$, $w_k \in \mathbf{R}$.

В силу теоремы 2 существует единственное оптимальное управление $u_* = \left\{ u_{1*}(t), u_{2*} = \sum_{k=1}^N w_{*k} \delta(t - \tau_{*k}) \right\} \in U$, на котором достигается минимум $\min_{u \in U} J(u)$ функционала качества (10). Оптимальное управление u_* ищется с помощью τ -оптимального управления $u_{*\tau}$ как $u_* = u_{*\tau_*}$, где τ_* решает задачу минимизации

$$\min_{\tau \in \Theta} J(u_{*\tau}) = \min_{\tau \in \Theta} \left[\int_0^T \langle R x_{*\tau}(t), x_{*\tau}(t) \rangle dt + L \sum_{k=1}^N p_1(\tau_k) \right].$$

Сопряженная задача (25) принимает вид

$$\frac{d}{dt} [Ax(t)] + Bx(t) = \begin{pmatrix} e(t) - L \sum_{k=1}^N p_1(\tau_k) \delta(t - \tau_k) \\ 0 \\ e(t) - p_3(t) \end{pmatrix},$$

$$\frac{d}{dt}[A'p(t)] = B'p(t) - \text{diag}\{L, C_1, C_2\}x(t), \text{ п.в. } t \in [0, T], \quad (27)$$

$$Lx_1(-0) = q_1, \quad C_1x_2(-0) - C_2x_3(-0) = q_2, \quad p_1(T) = p_2(T) = 0.$$

В силу теоремы 3 существует единственное решение $\{x(t), p(t)\}$ краевой задачи (27), с помощью которого находим τ -оптимальное состояние электрической цепи $x_{*\tau}(t) = x(t)$, а также по формуле (26) — компоненты τ -оптимального управления

$$u_1(t) = u_{1*\tau}(t) = p_3(t) \text{ и } u_2 = u_{2*\tau} = \sum_{k=1}^N p_1(\tau_k) \delta(t - \tau_k).$$

Размерность задачи (27) понижается до четырех переменных: $x_1(t), y(t) = C_1x_2(t) - C_2x_3(t), p_1(t), p_2(t)$ и мы приходим к следующей краевой задаче:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix} + \psi(t) - \begin{pmatrix} L \sum_{k=1}^N p_1(\tau_k) \delta(t - \tau_k) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ п.в. } t \in [0, T], \quad (28)$$

$$Lx_1(-0) = q_1, \quad y(-0) = q_2, \quad p_1(T) = p_2(T) = 0,$$

где

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -r & -1 & -C_2^2 & -C_2\mu \\ L & LC_{12} & LC_{12}\sigma & L\sigma \\ 1 & -g_{12} & -C_2\mu & -C_{12}\mu^2 \\ -1 & 0 & \frac{r}{L} & \frac{-1}{L} \\ 0 & -1 & \frac{1}{C_{12}} & \frac{g_{12}}{C_{12}} \end{pmatrix}, \quad \psi(t) = e(t) \begin{pmatrix} C_1 + C_1C_2 \\ L\sigma \\ -C_{12}\mu \\ \sigma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma = C_{12} + C_1C_2.$$

Функции $x_2(t), x_3(t)$ и $p_3(t)$ находим из соотношений

$$x_2(t) = \frac{y}{C_{12}} + \frac{C_2^2 p_1(t)}{C_{12}\sigma} + \frac{\mu C_2 p_2(t)}{\sigma} + \frac{C_2 e(t)}{\sigma},$$

$$x_3(t) = \frac{-y}{C_{12}} + \frac{C_1 C_2 p_1(t)}{C_{12}\sigma} + \frac{\mu C_1 p_2(t)}{\sigma} + \frac{C_1}{\sigma} e(t),$$

$$p_3(t) = e(t) - x_2(t) - x_3(t).$$

Решение задачи (28) представим в виде формулы вариации постоянных для уравнения с импульсными воздействиями (ср. с формулой (1.24) из [6]):

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix} = e^{\Lambda t} \begin{pmatrix} \frac{q_1}{L} \\ q_2 \\ p_1(0) \\ p_2(0) \end{pmatrix} + \int_0^t e^{\Lambda(t-s)} \psi(s) ds - L \sum_{k=1}^N \chi(t - \tau_k) e^{\Lambda(t-\tau_k)} p_1(\tau_k) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Правая часть формулы (29) содержит $m+2$ неизвестных величин $p_1(t_j)$, $j=0, 1, \dots, m$, и $p_2(0)$. Напомним, что здесь моменты $\{t_j\}_{j=0}^m$ — различные моменты импульсов из $\{\tau_k\}_{k=1}^N$, расположенные в возрастающем порядке. Указанные неизвестные можно найти из системы $m+2$ линейных алгебраических уравнений, которая получится, если в третьем соотношении в (29) положить $t = t_j$ для $j=1, \dots, m$, в четвертом положить $t = t_{m+1} = T$, а моменты импульсов τ_k выразить через моменты t_j . Эта система линейных алгебраических уравнений имеет единственное решение в силу существования и единственности решения двухточечной краевой задачи (27).

Заключение

Рассмотрена задача оптимального импульсного управления дескрипторной системой, заключающаяся в нахождении минимума квадратичного функционала качества с импульсными интенсивностями. Динамика подобных систем описывается дифференциально-алгебраическими уравнениями, не разрешенными относительно производной. Основное предположение при исследовании поставленной задачи состоит в регулярности характеристического пучка матриц, отвечающего уравнению. Это предположение позволяет представить решение импульсного дифференциально-алгебраического уравнения в виде формулы вариации постоянных и гарантировать существование и единственность решения поставленной задачи оптимального импульсного управления. Через решение сопряженной двухточечной краевой задачи строятся оптимальное импульсное управление и оптимальная траектория системы.

Предложенный метод исследования проиллюстрирован на примере оптимального импульсного управления переходными режимами одного радиотехнического фильтра с энергетическим функционалом качества. С помощью формулы вариации постоянных описаны переходные режимы фильтра при импульсных возмущениях токов и напряжений. Предложенный в работе метод исследования задачи оптимального импульсного управления позволил построить оптимальное импульсное управление и отвечающий ему оптимальный переходный режим радиотехнического фильтра.

Л.А. Власенко, А.Г. Руткас, В.В. Семенець, А.О. Чикрий

ПРО ОПТИМАЛЬНЕ ІМПУЛЬСНЕ КЕРУВАННЯ В ДЕСКРИПТОРНИХ СИСТЕМАХ

Вивчаємо задачу оптимального імпульсного керування з квадратичним функціоналом якості для дескрипторної системи. Еволюція системи описується диференційно-алгебраїчним рівнянням, що не розв'язне відносно похідної стану. Керування системою здійснюється шляхом зміни вимірною керування та чисто імпульсного керування. Чисто імпульсне керування характеризується інтенсивностями імпульсів та моментами прикладання імпульсів. Основне обмеження полягає в тому, що характеристичний жмуток матриць, що відповідає рівнянню станів, є регулярним. У термінах характеристичного матричного жмутка встановлюються умови існування і єдиності оптимального керування та відповідного оптимального стану. Оптимальне керування та оптимальний стан будуються за допомогою спряженого стану, що є розв'язком спряженої двоточкової крайової задачі. Результати ілюструються на прикладі дескрипторної системи, що описує перехід-

дні режими у радіотехнічному фільтрі. Для цієї системи розглядається енергетичний функціонал якості з імпульсними інтенсивностями, що характеризує енергію інерційних елементів та вхідної напруги фільтру, а також інтенсивності та моменти прикладання імпульсів. Перехідні режими при імпульсних збуреннях струмів і напруг описуються за допомогою формули варіації сталих для імпульсної дескрипторної системи.

Ключові слова: дескрипторна система, диференціально-алгебраїчне рівняння, квадратичний функціонал якості, інтенсивності імпульсів, моменти прикладання імпульсів, оптимальне імпульсне керування, спряжений стан, двочлкова крайова задача, радіотехнічний фільтр, перехідний режим.

L.A. Vlasenko, A.G. Rutkas, V.V. Semenets, A.A. Chikrii

ON THE OPTIMAL IMPULSE CONTROL IN DESCRIPTOR SYSTEMS

We study the optimal impulse control problem with quadratic performance functional for a descriptor system. The system evolution is described by a linear differential-algebraic equation not solved with respect to the derivative of the state. The system is controlled by changing the measurable control and the pure impulse control. The pure impulse control is characterized by impulse intensities and moments of impulse applications. The main restriction is that the characteristic matrix pencil corresponding to the state equation is regular. In terms of the characteristic matrix pencil, we establish the conditions for the existence and uniqueness of the optimal control and the corresponding optimal state. The optimal control and the optimal state are constructed by using the adjoint state, which is a solution to the adjoint two-point boundary value problem. The results are illustrated on an example of descriptor system that describes transient states in a radio technical filter. For this system, we consider an energetic performance functional with impulse intensities characterizing the energy of inertial elements and input voltage of the filter and also moments of impulse applications. Transient states under impulsive perturbations of currents and voltages are described by using the formula of variation of constants for the impulsive descriptor system.

Keywords: descriptor system, differential algebraic equation, quadratic performance functional, impulse intensities, moments of impulse applications, optimal impulse control, adjoint state, two-point boundary value problem, radio technical filter, transient state.

1. Бенсусан А., Лионс Ж.-Л. Импульсное управление и квазивариационные неравенства. М. : Наука, 1987. 600 с.
2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. Линейные системы. М. : Наука, 1968. 476 с.
3. Бутковский А.Г. Структурная теория распределенных систем. М. : Наука, 1977. 320 с.
4. Chikrii A.A. Conflict-controlled processes. Dordrecht : Springer Science and Business Media, 2013. 424 p. <http://doi.org/10.1007/978-94-017-1135-7>.
5. Chikrii A.A. An analytical method in a dynamic pursuit games. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 2010. **271**, N 1. P. 69–85. <http://doi.org/10.1134/S0081543810040073>
6. Кривонос Ю.Г., Матичин И.И., Чикрий А.А. Динамические игры с разрывными траекториями. К. : Наук. думка, 2005. 220 с.
7. Chikrii A.A., Matichin I.I. Differential games with impulse control of players. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (Suppl.)*. 2005. Suppl. 1. P. S68–S81. <https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=2156250>.
8. Chikrii A.A., Matychyn I.I., Chikrii K.A. Differential games with impulse control. *Advances in dynamic game theory*. Vol. 9. of *Annals of the International Society of Dynamic Games*. Boston : Birkhäuser, 2007. P. 37–55. http://doi.org/10.1007/978-0-8176-4553-3_2
9. Matychyn I., Chikrii A., Onyshchenko V. Conflict-controlled processes involving fractional differential equations with impulses. *Mathematica Balkanica*. 2012. **26**, N 1–2. P. 159–168. <http://www.mathbalkanica.info/>

10. Vlasenko L.A., Rutkas A.G. Stochastic impulse control of parabolic systems of Sobolev type. *Differential Equations*. 2011. **47**, N 10. P. 1498–1507. <http://doi.org/10.1134/S0012266111100132>.
11. Vlasenko L.A., Rutkas A.G. Optimal control of a class of random distributed Sobolev type systems with aftereffect. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2013. **45**, N 9. P. 66–76. <http://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v45.i9.60>.
12. Dai L. Singular control systems. Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo : Springer-Verlag, 1989. 332 p. <http://doi.org/10.1007/Bfb0002475>.
13. Kurina G.A., März R. On linear quadratic optimal control problems for time-variables descriptor systems. *SIAM J. Control Optim.* 2004. **42**, N 6. P. 2062–2077. <http://doi.org/10.1137/S0363012900380991>.
14. Duan G.R. Analysis and design of descriptor linear systems. New York, Dordrecht, Heidelberg, London: Springer, 2010. 494 p. <http://doi.org/10.1007/978-1-4419-6397-0>.
15. Vlasenko L.A., Rutkas A.G., Semenets V.V. Sequential composition and decomposition of descriptor control systems. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2018. **50**, N 9. P. 60–75. <http://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v50.i9.50>.
16. Vlasenko L.A., Rutkas A.G. On the optimal control of systems described by implicit evolution equations. *Differential Equations*. 2009. **45**, N 3. P. 429–438. <http://doi.org/10.1134/S0012266109030124>.
17. Vlasenko L.A., Chirkii A.A. The method of resolving functionals for a dynamic game in a Sobolev system. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2014. **46**, N 7. P. 1–11. <http://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v46.i7.10>.
18. Vlasenko L.A., Rutkas A.G. On a differential game in a system described by an implicit differential-operator equation. *Differential Equations*. 2015. **51**, N 6. P. 798–807. <http://doi.org/10.1134/S0012266115060117>.
19. Розенфельд А.С., Яхинсон Б.И. Переходные процессы и обобщенные функции. М. : Наука. 1966. 440 с.
20. Vlasenko L.A., Perestyuk N.A. On the solvability of impulsive differential-algebraic equations. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2005. **57**, N 4. P. 551–564. <http://doi.org/10.1007/s11253-005-0209-4>.
21. Vlasenko L.A., Rutkas A.G., Samoilenko A.M. Problem of impulsive regulator for one dynamical system of the Sobolev type. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2008. **60**, N 8. P. 1200–1209. <http://doi.org/10.1007/s11253-009-0135-y>.
22. Vlasenko L.A., Samoilenko A.M. Optimal control with impulsive component for systems described by operator differential equations. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2009. **61**, N 8. P. 1250–1263. <http://doi.org/10.1007/s11253-010-0274-1>.
23. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М. : Мир, 1972. 415 с.

Получено 22.02.2019