УДК 629.783

М.Ю. Ракушев

МЕТОД ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ НА ОСНОВЕ МНОГОМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ТЕЙЛОРОВСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Ключевые слова: прогнозирование движения, космический аппарат, численно-аналитический метод интегрирования, многомерные дифференциально-тейлоровские преобразования.

Введение

Эксплуатация космической системы невозможна без сложного программного обеспечения, одно из центральных мест в котором занимает процедура прогнозирования движения космического аппарата (КА) [1, 2]. К основным требованиям, выдвигаемым к процедуре прогнозирования движения КА, относится [1]: высокая точность, абсолютная достоверность, оперативность, максимальная отработка используемых методов; соответствие методов, алгоритмов и программ техническим характеристикам ЭВМ. Необходимо добавить требования по стоимости разработки таких процедур, их унификации, а также гибкости при их усовершенствовании или изменении [2].

Задача прогнозирования движения КА — это задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, и численные методы интегрирования таких уравнений являются основными для ее высокоточного решения [3]. В отечественной практике для решения задачи прогноза движения КА ближнего космоса наибольшее распространение получили конечно-разностные методы: неявные Адамса и явные Рунге–Кутта [1, 3].

Если рассмотреть последние исследования по внедрению нетрадиционных для задач баллистики КА методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений для решения вышеописанной задачи прогноза, то можно отметить, что одним из перспективных является метод дифференциально-тейлоровских (ДТ) преобразований [4–8].

Характерная особенность всех существующих подходов к прогнозированию движения КА заключается в том, что численный метод (как конечно-разностный, так и ДТ-преобразования) используется только для интегрирования предварительно аналитически полученного дифференциального уравнения движения КА. При этом некоторые члены такого уравнения имеют довольно громоздкую форму, прежде всего это относится к учету влияния геопотенциала. Определение таких «громоздких» членов — отдельная задача, для решения которой используются аналитические методы, что усложняет процесс разработки процедур прогнозирования. В [7, 8] на основе многомерных ДТ-преобразований разработаны методы, в которых производится расчет частных производных от правой части дифференциального уравнения. Однако в этих методах многомерные ДТ-преобразования используются только как расширение решенной задачи интегрирования одномерными ДТ-преобразованиями, что не позволяет использовать их для вышеописанного учета геопотенциала.

Все другие известные подходы по применению ДТ-преобразований для интегрирования дифференциальных уравнений (как обыкновенных, так и частных производных) используют ДТ-преобразования с мерностью, не превышающей числа независимых переменных исходного дифференциального уравнения [4, 6]. Это полностью соответствует подходам, предложенным Г.Е. Пуховым. Описанное также сводиться к тому, что ДТ-преобразования применяются только для интегрирования аналитически записанного дифференциального уравнения.

Таким образом, цель статьи — разработка метода интегрирования дифференциального уравнения движения КА на основе многомерных ДТ-преобразований, в котором ускорения от геопотенциала рассчитываются в численно-аналитической форме в области ДТ-спектров.

Унифицированный метод прогнозирования движения космических аппаратов

Без потери общности рассмотрим задачу прогноза движения КА в гринвичской прямоугольной системе координат (ГСК). Движение КА в этой системе можно представить как движение материальной точки в поле притяжения Земли под действием сил, определяемых потенциалом U, и совокупности неконсервативных (не имеющих потенциала) сил G [1, 3]:

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial w} + G \ \text{ при } \ w_0 = w(t_0), \ \ \dot{w}_0 = v(t_0), \tag{1}$$

где $w = (x \quad y \quad z)^{\mathrm{T}}$, $v = (v_x \quad v_y \quad v_z)^{\mathrm{T}}$ — векторы положения и скорости КА в ГСК; t — время; x_0, v_0, t_0 — начальные значения положения, скорости и времени; $U = U(w)$, $\partial U / \partial w$ — потенциал Земли (геопотенциал) и его градиент; $G = G(t, w, \dot{w})$ — неконсервативные силы.

Последнее слагаемое в (1) учитывает сопротивление атмосферы, притяжение Луны и Солнца, световое давление, а также включает ускорения от переносной центробежной силы и силы инерции Кориолиса.

При прогнозировании движения КА наиболее распространенной формой записи геопотенциала является его разложение в ряд по сферическим функциям [1, 3, 5, 9, 10]:

$$U = \frac{\mu_3}{r}\left[1 + \sum_{n=2}^{N}\left(C_{n0}\left(\frac{r_3}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi)\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=2}^{N}\sum_{m=1}^{n}\left(\left(\frac{R_3}{r}\right)^n P_n^m(\sin\varphi)(C_{nm}\cos(m\lambda) + d_{nm}\sin(m\lambda))\right)\right], \tag{2}$$

где μ_3, r_3 — гравитационный параметр и средний экваториальный радиус Земли; r, φ, λ — геоцентрический радиус, широта и долгота рассматриваемой точки; $P_n(\sin\varphi)$, $P_n^m(\sin\varphi)$ — сферические и присоединенные сферические функции; C_{n0}, C_{nm}, d_{nm} — безразмерные постоянные, характеризующие гравитационное поле и форму Земли.

Разработаны модели геопотенциала с коэффициентами до 320-й ступени [3]. Аналитическое определение ускорений от геопотенциала (2) для модели движения КА (1) — расчет градиента $\partial U / \partial w$, проводиться в последовательности [1, 3, 9].

Определяются проекции полученных ускорений на оси ГСК:

$$b_r = \frac{\partial U_n}{\partial r} = -\frac{\mu_3}{r^2}\left[1 + \sum_{n=2}^{N}\left((n+1)C_{n0}\left(\frac{r_3}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi)\right) + \right.$$

 ISSN 0572-2691

$$+\sum_{n=2}^{N}\sum_{m=1}^{n}\left((n+1)\left(\frac{r_3}{r}\right)^n P_n^m(\sin\varphi)(C_{nm}\cos(m\lambda)+d_{nm}\sin(m\lambda))\right)\Bigg], \quad (3)$$

$$b_\varphi=\frac{1}{r}\frac{\partial U_n}{\partial\varphi}=\frac{\mu_3}{r^2}\left[\sum_{n=2}^{N}\left(C_{n0}\left(\frac{r_3}{r}\right)^n P_n'(\sin\varphi)\cos\varphi\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=2}^{N}\sum_{m=1}^{n}\left(\left(\frac{r_3}{r}\right)^n P_n^{m/}(\sin\varphi)\cos\varphi(C_{nm}\cos(m\lambda)+d_{nm}\sin(m\lambda))\right)\right], \quad (4)$$

$$b_\lambda=\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial U_n}{\partial\lambda}=\frac{\mu_3}{r^2}\sum_{n=2}^{N}\sum_{m=1}^{n}\left(m\left(\frac{r_3}{r}\right)^n \frac{P_n^m(\sin\varphi)}{\cos\varphi}(-C_{nm}\sin(m\lambda)+d_{nm}\cos(m\lambda))\right), \quad (5)$$

где b_r, b_φ, b_λ — радиальное, меридианное и нормальное ускорения КА; $P_n'(\sin\varphi)$, $P_n^{m/}(\sin\varphi)$ — производные от сферических и присоединенных сферических функций.

Определяются проекции полученных ускорений на оси ГСК:

$$\frac{\partial U}{\partial w}=\frac{g_r}{r}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-g_\lambda\sin\lambda\\g_\lambda\cos\lambda\\g_\Omega\end{pmatrix} \text{ при } g_r=b_r-b_\varphi\operatorname{tg}\varphi,\ g_\Omega=\frac{b_\varphi}{\cos\varphi},\ g_\lambda=b_\lambda, \quad (6)$$

где g_r, g_λ, g_Ω — дополнительные обозначения.

Для эффективного расчета сферических и присоединенных сферических функций, а также их производных используются рекуррентные зависимости:

$$P_n(\sin\varphi)=\frac{1}{n}(-(n-1)P_{n-2}(\sin\varphi)+(2n-1)\sin\varphi P_{n-1}(\sin\varphi)), \quad (7)$$

$$\frac{P_n^m(\sin\varphi)}{\cos\varphi}=\frac{1}{n-m}\left(-(n+m-1)\frac{P_{n-2}^m(\sin\varphi)}{\cos\varphi}+(2n-1)\sin\varphi\frac{P_{n-1}^m(\sin\varphi)}{\cos\varphi}\right), \quad (8)$$

$$\frac{P_m^m(\sin\varphi)}{\cos\varphi}=(2m-1)\cos\varphi\frac{P_{m-1}^{m-1}(\sin\varphi)}{\cos\varphi}, \quad (9)$$

$$P_n'(\sin\varphi)=\sin\varphi P_{n-1}'(\sin\varphi)+nP_{n-1}(\sin\varphi), \quad (10)$$

$$P_n^{m/}(\sin\varphi)\cos\varphi=(n+1)\sin\varphi\frac{P_n^m(\sin\varphi)}{\cos\varphi}-(n+m-1)\frac{P_{n+1}^m(\sin\varphi)}{\cos\varphi} \quad (11)$$

с начальными значениями

$$P_0(\sin\varphi)=P_1'(\sin\varphi)=1,\ P_1(\sin\varphi)=\sin\varphi,\ \frac{P_{m-1}^m(\sin\varphi)}{\cos\varphi}=1,\ \frac{P_1^1(\sin\varphi)}{\cos\varphi}=1.$$

Для расчета тригонометрических функций используются зависимости

$$\cos\varphi=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r},\ \sin\varphi=\frac{z}{r},\ \operatorname{tg}\varphi=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\cos\lambda = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\lambda = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Конечные формулы для расчета ускорений в (1) от геопотенциала (2) описываются выражениями, которые по сравнению с выражением для исходного геопотенциала (2) более громоздки и соответственно менее удобны для использования. Так, к формулам расчета сферических и присоединенных сферических функций (7)–(9) добавляются формулы для их производных (10), (11), а также вводятся дополнительные ускорения (3)–(6). Таким образом, уменьшение количества дополнительных аналитических выкладок целесообразно для прогнозирования движения КА, и его реализация обеспечит методическую унификацию разработки процедур прогнозирования.

Двумерными ДТ-преобразованиями называют функциональные преобразования [4, 5]

$$Q(k,k_w) = \frac{h^k h_w^{k_w}}{k!k_w!}\frac{\partial^{k+k_w} q(t_*,w_*)}{\partial t^k \partial w^{k_w}}, \quad q(t,w) = \sum_{k_w=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(t-t_*)^k}{h^k}\frac{(w-w_*)^{k_w}}{h_w^{k_w}}Q(k,k_w)\right), \tag{12}$$

где $q(t,w)$ — скалярная функция, имеющая производные необходимого порядка по t и w; t, w — скалярные аргументы; t_*, w_* — значения аргументов, при которых проводится преобразование; h, h_w — отрезки аргументов, на которых $q(t,w)$ представляется рядом Тейлора по t и w соответственно; k, k_w — целочисленные аргументы 0, 1,…; $Q(k,k_w)$ — дискретная функция по аргументам k, k_w.

В (12) первое выражение задает прямое, а второе — обратное ДТ-преобразование. ДТ-изображение $Q(k,k_w)$ называют Т-спектром, а значения — Т-дискретами [4].

Основное свойство ДТ-преобразований — реализация рекуррентного, методически простого (численно-аналитического) определения членов ряда Тейлора любого порядка при отсутствии методических ошибок, которое можно сформулировать так: для определения (расчета) Т-спектра сложной функции необходимо соответственно ее внутренней структуре задать Т-спектры всех ее аргументов, при этом мерность Т-спектров аргументов должна совпадать с мерностью определяемого Т-спектра [4, 5].

Ниже приведено пояснение описанного свойства на примере одномерных ДТ-преобразований. Так, если функция $q(y(t), z(t), t)$ имеет Т-спектр (функция q разлагается в ряд Тейлора по степеням переменного t), известны Т-спектры ее аргументов $Y(k)$, $Z(k)$ и внутренняя структура функции $q(y,z,t)$, то применение ДТ-преобразований к $q(y(t), z(t), t)$ дает Т-спектр $Q(k) = Q(Y(k), Z(k), T(k))$.

Обозначенное свойство опирается на порядок получения производных сложной функции. Так, пусть функция $q(y(t), z(t), t)$ дифференцируема по своим аргументам. Ее аргументы — функции $y(t)$, $z(t)$ — дифференцируемы по t. Тогда имеет место соотношение

$$\frac{dq(y(t),z(t),t)}{dt} = \frac{\partial q(y,z,t)}{\partial y}\frac{dy(t)}{dt} + \frac{\partial q(y,z,t)}{\partial z}\frac{dz(t)}{dt} + \frac{\partial q(y,z,t)}{\partial t}, \tag{13}$$

где $\partial q(y,z,t)/\partial y$ — частная производная, при получении которой для функции $q(y,z,t)$ полагается, что y — переменный аргумент, а z и t — постоянные;

$\partial q(y,z,t)/\partial z$ полагается z переменным, y и t — постоянные; $\partial q(y,z,t)/\partial t$ — t переменные, y и z — постоянные.

С учетом описанного свойства применим ДТ-преобразования к $U(w)$ в виде

$$U(k_w) = U(W(k_w)) \text{ при } W(k_w = 0) = w_* \text{ и } W(k_w = 1) = h_w E_{3\times 3} \tag{14}$$

или с учетом раскрытия векторно-матричных обозначений

$$\begin{pmatrix} U(X(k_w), Y(k_w), Z(k_w)) : \{X(1) = h_w, Y(1) = 0, Z(1) = 0\} \\ U(X(k_w), Y(k_w), Z(k_w)) : \{X(1) = 0, Y(1) = h_w, Z(1) = 0\} \\ U(X(k_w), Y(k_w), Z(k_w)) : \{X(1) = 0, Y(1) = 0, \ Z(1) = h_w\} \end{pmatrix} :$$

$$: \{X(0) = x_*, Y(0) = y_*, Z(0) = z_*\}, \tag{15}$$

где $U(k_w)$, $W(k_w)$, $X(k_w)$, $Y(k_w)$, $Z(k_w)$ — Т-спектры геопотенциала, вектора w и его элементов; w_*, x_*, y_*, z_* — значения вектора w и его элементов, для которых рассчитывается Т-спектр; $E_{3\times 3}$ — единичная матрица; h_w — отрезок по элементам w.

С учетом прямого ДТ-преобразования в (12) рассмотрим Т-дискрету в (15) при $k_w = 1$:

$$U(k_w = 1) = h_w \frac{\partial U(w_*)}{\partial w}. \tag{16}$$

Выражение (16) является с точностью до множителя h_w искомым градиентом. Таким образом, для получения искомого градиента необходимо, в соответствии со свойствами ДТ-преобразований [4, 5], провести дифференцирование (16) по k_w:

$$\frac{\partial U(w_*)}{\partial w} = D_{k_w}\{U(k_w = 1)\} = \frac{1}{h_w} U(1). \tag{17}$$

Поскольку введенный в (15) отрезок аргумента h_w в (17) сокращается, при определении градиента его целесообразно задать

$$h_w = 1. \tag{18}$$

Таким образом, (14), (17) при (18) является Т-спектром искомого градиента геопотенциала — составляющего уравнения (1).

С учетом свойств ДТ-преобразований получим метод интегрирования дифференциального уравнения движения КА на основе многомерных ДТ-преобразований, на базе которого запишем явную вычислительную ДТ-схему интегрирования (1), в которой Т-спектр градиента определяется двумерными ДТ-преобразованиями (14), (17) при (18):

$$\begin{cases} T(k) = t_i \delta_T(k) + h_i \delta_T(k-1), \\ W(0,0) = w(t_i), \ W(1,0) = h_i \dot{w}(t_i), \ W(k,1) = E_{3\times 3}\delta_T(k), \\ U(k, k_w) = U(W(k, k_w)) : \{k_w = \overline{0 \ldots 1}\}, \\ \dot{W}(k) = \dfrac{k+1}{h_i} W(k+1, 0), \\ G(k) = G(T(k), \ W(k,0), \ \dot{W}(k)), \\ W(k+2, 0) = \dfrac{h_i^2}{(k+2)(k+1)} (U(k,1) + G(k)) : \{k = \overline{0 \ldots (k_{\max} - 2)}\}. \end{cases} \tag{19}$$

$$t_{i+1}=t_i+h_i,\;\; w(t_{i+1})=\sum_{k=0}^{k_{\max}} W(k,0),\;\; \dot{w}(t_{i+1})=\sum_{k=0}^{k_{\max}-1} \dot{W}(k). \tag{20}$$

Здесь $w(t_{i+1})$, $\dot{w}(t_{i+1})$ — спрогнозированное положение и скорость КА; h_i, i — шаг интегрирования и узел вычислительной сетки; $W(k,k_w)$, $U(k,k_w)$ — двумерные Т-спектры вектора w и геопотенциала U; $\dot{W}(k)$, $G(k)$, $T(k)$ — одномерные Т-спектры скорости КА, неконсервативных сил и независимого переменного дифференциального уравнения t; $k_{\max}$ — порядок точности интегрирования (определяется количеством учитываемых при восстановлении Т-дискрет); $\delta_T(k)$ —тейлоровская единица, «теда»

$$\delta_T(k-a)=\begin{cases}1 \text{ при } k=a,\\ 0 \text{ при } k\neq a.\end{cases}$$

Основным свойством разработанного метода (19), (20) является то, что в нем определение ускорений от геопотенциала (2) — градиента $\partial U/\partial w,$ проводится в численно-аналитическом виде в области Т-спектров, что обеспечивает методическую унификацию его реализации в сравнении с традиционным (аналитическим) подходом [1, 3, 9].

Для иллюстрации реализации разработанного метода (19), (20) рассмотрим пример, в котором в дифференциальном уравнении движения КА (1) учитывается геопотенциал (2) для сферической Земли, переносная центробежная сила и сила инерции Кориолиса. Описанная задача прогноза в обозначениях (1) имеет вид

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\mu_3}{r}\right)+2\Omega_3\begin{pmatrix}\nu_y\\-\nu_x\\0\end{pmatrix}+\Omega_3^2\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix} \text{ при } w=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\; r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \tag{21}$$

а с проведенными аналитическими операциями по определению градиента —

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=-\frac{\mu_3}{r^3}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+2\Omega_3\begin{pmatrix}\nu_y\\-\nu_x\\0\end{pmatrix}+\Omega_3^2\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}, \tag{22}$$

где Ω_3 — угловая скорость вращения Земли.

Традиционная ДТ-схема интегрирования (22) одномерными ДТ-преобразованиями имеет вид:

$$\begin{cases}
X(0)=x(t_i), Y(0)=y(t_i), Z(0)=z(t_i), V_x(0)=v_x(t_i), V_y(0)=v_y(t_i),\\
V_z(0)=v_z(t_i),\; X(1)=h_iV_x(0), Y(1)=h_iV_y(0), Z(1)=h_iV_z(0),\\
\underline{R^2}(k)=X(k)*X(k)+Y(k)*Y(k)+Z(k)*Z(k),\\
R(k)=\underline{R^{2^{1/2}}}(k),\; \underline{R^3}(k)=\underline{R^2}(k)*R(k),\\
V_x(k)=\dfrac{k+1}{h_i}X(k+1), V_y(k)=\dfrac{k+1}{h_i}Y(k+1), V_z(k)=\dfrac{k+1}{h_i}Z(k+1),\\
X(k+2)=\dfrac{h_i^2}{(k+2)(k+1)}\left(-\left|\dfrac{\mu_3X(k)}{\underline{R^3}(k)}\right|+2\Omega_3V_y(k)+\Omega_3^2X(k)\right),\\
Y(k+2)=\dfrac{h_i^2}{(k+2)(k+1)}\left(-\left|\dfrac{\mu_3Y(k)}{\underline{R^3}(k)}\right|-2\Omega_3V_x(k)+\Omega_3^2Y(k)\right),\\
Z(k+2)=\dfrac{h_i^2}{(k+2)(k+1)}\left(-\left|\dfrac{\mu_3Z(k)}{\underline{R^3}(k)}\right|\right):\{k=\overline{0\ldots(k_{\max}-2)}\},
\end{cases} \tag{23}$$

$$t_{i+1}=t_i+h_i,\quad x(t_{i+1})=\sum_{k=0}^{k_{\max}}X(k),\quad y(t_{i+1})=\sum_{k=0}^{k_{\max}}Y(k),\quad z(t_{i+1})=\sum_{k=0}^{k_{\max}}Z(k),$$

$$v_x(t_{i+1})=\sum_{k=0}^{k_{\max}-1}V_x(k),\quad v_y(t_{i+1})=\sum_{k=0}^{k_{\max}-1}V_y(k),\quad v_z(t_{i+1})=\sum_{k=0}^{k_{\max}-1}V_z(k), \tag{24}$$

где $*$, $\left|-\right|$, $\underline{1/2}$ для области одномерных ДТ-спектров обозначают операции умножения, деления и взятия квадратного корня, например для следующих функций:

$$q(t)=s(t)\cdot u(t)\ \text{выполняется}\ S(k)*U(k)=\sum_{l=0}^{k}S(k-l)U(l);$$

$$q(t)=\frac{s(t)}{u(t)}\Rightarrow\ Q(k)=\left|\frac{S(k)}{U(k)}\right|=\frac{S(k)-\sum\limits_{l=1}^{k}Q(k-l)U(l)}{U(0)};$$

$$q(t)=\sqrt{s(t)}\Rightarrow\ Q(k)=\begin{cases}\sqrt{S(0)}\ \text{при}\quad k=0,\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{S(k)-\sum\limits_{l=1}^{k-1}Q(k-l)S(l)}{Q(0)}\ \text{при}\, k>0.\end{cases}$$

ДТ-схема интегрирования (21) многомерными ДТ-преобразованиями на основе (19), (20) имеет вид:

$$\begin{cases}X(0)=x(t_i),Y(0)=y(t_i),Z(0)=z(t_i),\\ V_x(0)=v_x(t_i),V_y(0)=v_y(t_i),V_z(0)=v_z(t_i),\\ X(1)=h_iV_x(0),Y(1)=h_iV_y(0),Z(1)=h_iV_z(0),\\ \begin{pmatrix}X(k,1)\\ Y(k,1)\\ Z(k,1)\end{pmatrix}=\begin{cases}E_{3\times3}\ \text{ïðè}\ \ k=0\\ 0\quad \text{ïðè}\ \ k>0\end{cases},\quad \begin{matrix}\text{ðàñ÷åò}\,U(k,k_w)\ \text{ïî}\ \ \text{ñòîëáöàì}\ \ \text{èç}\ E_{3\times3}:\\ \text{ïåðâûé}\ \ \text{äëÿ}\ \partial/\partial x,\ \text{âòîðîé}\ \ \text{äëÿ}\ \partial/\partial y,\\ \text{òðåòèé}\ \text{äëÿ}\ \partial/\partial z,\end{matrix}\\ R^2(k,k_w)=X(k,k_w)*X(k,k_w)+Y(k,k_w)*Y(k,k_w)+Z(k,k_w)*Z(k,k_w),\\ R(k,k_w)=R^{2\underline{1/2}}(k,k_w),U(k,k_w)=\left|\dfrac{\mu_3}{R(k,k_w)}\right|:\{k_w=\overline{0\ldots1}\},\\ V_x(k)=\dfrac{k+1}{h_i}X(k+1,0),V_y(k)=\dfrac{k+1}{h_i}Y(k+1,0),V_z(k)=\dfrac{k+1}{h_i}Z(k+1,0),\\ X(k+2,0)=\dfrac{h_i^{\,2}}{(k+2)(k+1)}(U(k,1)+2\Omega_3V_y(k)+\Omega_3^2X(k))\ \text{ïðè}\ \ \partial/\partial x,\\ Y(k+2,0)=\dfrac{h_i^{\,2}}{(k+2)(k+1)}(U(k,1)-2\Omega_3V_x(k)+\Omega_3^2Y(k))\ \text{ïðè}\ \ \partial/\partial y,\\ Z(k+2,0)=\dfrac{h_i^{\,2}}{(k+2)(k+1)}U(k,1)\ \text{ïðè}\ \ \partial/\partial z:\{k=\overline{0\ldots(k_{\max}-2)}\},\end{cases} \tag{25}$$

$$t_{i+1}=t_i+h_i,\quad x(t_{i+1})=\sum_{k=0}^{k_{\max}}X(k,0),\quad y(t_{i+1})=\sum_{k=0}^{k_{\max}}Y(k,0),\quad z(t_{i+1})=\sum_{k=0}^{k_{\max}}Z(k,0),$$

$$v_x(t_{i+1}) = \sum_{k=0}^{k_{\max}-1} V_x(k),\;\; v_y(t_{i+1}) = \sum_{k=0}^{k_{\max}-1} V_y(k),\;\; v_z(t_{i+1}) = \sum_{k=0}^{k_{\max}-1} V_z(k), \qquad (26)$$

где $*$, $\left|-\right|$, $\underline{1/2}$ для области двумерных ДТ-спектров обозначают операции умножения, деления и взятия квадратного корня, например для функций

$$q(t,w) = s(t,w)\cdot u(t,w) \text{ выполняется}$$

$$S(k,k_w) * U(k,k_w) = \sum_{l_w=0}^{k_w} \sum_{l=0}^{k} S(k-l, k_w - l_w) U(l, l_w);$$

$$q(t,w) = \frac{s(t,w)}{u(t,w)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q(k,k_w) = \frac{S(k,k_w) - \sum\limits_{l_w=1}^{k_w-1} \sum\limits_{l=0}^{k} Q(k-l, k_w - l_w) U(l, l_w) - \sum\limits_{l=1}^{k} Q(k-l, k_w) U(l, 0)}{Q(0,0)};$$

$$q(t,w) = \sqrt{s(t,w)} \Rightarrow Q(k,k_w) =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{S(0,0)} \text{ при } k = 0 \text{ и } k_w = 0, \\ \dfrac{S(k,0) - \sum\limits_{l=1}^{k-1} Q(k-l,0) Q(l,0)}{2Q(0,0)} \quad \text{при } k > 0 \text{ и } k_w = 0, \\ \dfrac{S(k,k_w) - \sum\limits_{l_w=1}^{k_w-1} \sum\limits_{l=0}^{k} Q(k-l, k_w - l_w) Q(l, l_w) - 2\sum\limits_{l=1}^{k} Q(k-l, k_w) Q(l, 0)}{2Q(0,0)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } k > 0 \text{ и } k_w > 0. \end{cases}$$

На примере уравнений (21) и (22) и соответственно их ДТ-схем видно, что разработанный метод определяет ускорения от геопотенциала численно-аналитически в области ДТ-спектров. Такой подход уменьшает необходимые аналитические выкладки при реализации прогноза и соответственно иллюстрирует методическую унификацию процесса разработки процедур прогнозирования движения КА на его базе.

Точность (ошибка аппроксимации) разработанной ДТ-схемы (25), (26) эквивалентна точности традиционной ДТ-схемы (23), (24) и определяется количеством учтенных Т-дискрет при восстановлении $k_{\max}$ [11]. Это обусловлено свойствами ДТ-преобразований, которые позволяют без методических ошибок определять в области Т-спектров градиент $\partial U / \partial w$, что обеспечивает равенство (одинаковость) Т-спектров правой части исходного дифференциального уравнения, определенного традиционным (22) и разработанным методом (21). Приведенный вывод в отношении ошибки аппроксимации полностью переносится на общую ДТ-схему (19), (20), порядок точности которой — $k_{\max}$.

Оценку вычислительной сложности разработанной ДТ-схемы для прогнозирования движения КА (19), (20) в сравнении с традиционным (аналитическим) подходом приведено в таблице, где $\tilde{S}/S$ — отношение вычислительных затрат (умножений и делений) в разработанной ДТ-схеме к вычислительным затратам в традиционной ДТ-схеме [5]; $N \times N$ — принятая модель гравитационного поля Земли (2) (первый столбец соответствует ДТ-схемам (23), (24) и (25), (26)). Результаты приведены для порядков точности интегрирования ДТ-схем $k_{\max} = 5 - 20$, шаг интегрирования $h_i = 20 - 500$ с. В модели движения КА (1) для неконсервативных сил G учтены переносная центробежная сила и сила Кориолиса.

Таблица

$N \times N$	—	2×2	4×4	8×8	16×16	360×360
S / S	3,5…3,7	3,4…3,7	3,0…3,4	2,7…3,0	2,5…2,7	2,1…2,3

Из приведенных результатов видно, что разработанный подход требует в 2–4 раза больших вычислительных затрат на прогноз движения КА, что является объективной «платой» за методическую унификацию реализации прогноза. При этом описанная «унификация» положительно проявляется при разработке процедуры прогнозирования движения КА. Так, количество операторов в программе по расчету ускорений от геопотенциала для разработанной ДТ-схемы (19), (20) на ~ 40 % меньшее по сравнению с традиционным (аналитическим) подходом.

Следует отметить, что для более полных моделей движения КА, при дополнительном учете неконсервативных сил от сопротивления атмосферы, притяжения Луны и Солнца, светового давления, возрастание вычислительных затрат на прогноз разработанным методом (характеристика $\tilde{S} / S$ таблица) будет уменьшаться и в пределе описанное «ухудшение вычислительных характеристик» практически не будет проявляться.

Несмотря на то, что все выкладки приведены для модели движения КА в ГСК, разработанный метод применим и для моделей движения КА в других системах координат, например в системе оскулирующих элементов. Это обусловлено тем, что расчет (учет) возмущений от геопотенциала для любой модели движения КА проводится именно в ГСК.

Заключение

Отличительной особенностью разработанного численно-аналитического метода интегрирования дифференциального уравнения движения КА на основе многомерных ДТ-преобразований является то, что расчет ускорений в дифференциальном уравнении движения КА проводится на основе ДТ-преобразований различной мерности, и при этом на основе многомерных ДТ-преобразований проводится расчет элементов, используемых далее в расчетах на основе одномерных ДТ-преобразований.

Разработанный метод может использоваться и для решения других задач динамики (отличных от задачи прогноза движения КА), если в состав рассматриваемой модели (дифференциального уравнения) входят потенциальные (консервативные) силы.

В целом за счет уменьшения выкладок при задании дифференциального уравнения движения КА, и как следствие, сокращения количества операторов в процедуре интегрирования такого уравнения, представленный метод обеспечивает методическую унификацию процесса разработки процедур прогнозирования движения КА.

М.Ю. Ракушев

МЕТОД ПРОГНОЗУВАННЯ РУХУ КОСМІЧНИХ АПАРАТІВ НА ОСНОВІ БАГАТОВИМІРНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ТЕЙЛОРІВСЬКИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Запропоновано чисельно-аналітичний метод інтегрування диференціального рівняння руху космічного апарата, який розроблено на основі багатовимірних диференціально-тейлорівських перетворень. Відмінною особливістю запропонованого методу є розрахунок прискорень в диференціальному рівнянні руху космічного апарата на основі диференціально-тейлорівських перетворень різної мірності, а саме: прискорень від консервативних сил (геопотенціалу) — на основі двовимірних диференціально-тейлорівських перетворень, а прискорень від неконсервативних сил (опір атмосфери, притягання Місяця, Сонця, переносна відцентрова сила, сила інерції Коріоліса) — на основі одновимірних диференціально-тейлорівських перетворень. Такий підхід зменшує необхідні аналітичні викладки при заданні диференціального рівняння руху космічного апарата, що забезпечує методичну уніфікацію процесу розробки процедур прогнозування руху космічних апаратів. Наводяться результати порівняння обчислювальної складності запропонованого методу інтегрування з відомим на основі одновимірних диференціально-тейлорівських перетворень.

Ключові слова: прогнозування руху, космічний апарат, чисельно-аналітичний метод інтегрування, багатовимірні диференціально-тейлорівські перетворення.

M.Yu. Rakushev

METHOD FOR PREDICTION OF SPACE VEHICLE MOTION BASED ON THE MULTIDIMENSIONAL DIFFERENTIAL-TAYLOR TRANSFORMATIONS

A numerical-analytical method for integrating the differential equation of spacecraft motion, developed on the basis of multidimensional differential-Taylor transformations, is presented. A distinctive feature of the proposed method is the calculation of accelerations in the differential equation of spacecraft motion based on differential-Taylor transformations of different dimensions, namely: accelerations produced by conservative forces (geopotential) based on two-dimensional differential-Taylor transformations, and accelerations produced by non-conservative forces (atmospheric drag, gravity of the Moon and the Sun, centrifugal force, Coriolis force) — based on one-dimensional differential-Taylor transformations. Such an approach reduces the necessary number of analytical calculations when specifying the differential equation of spacecraft motion, which ensures a methodical unification of the process of developing procedures for predicting spacecraft motion. The results of comparing the computational complexity of the proposed method of integration with a well-known method based on one-dimensional differential-Taylor transformations are presented.

Keywords: motion prediction, space vehicle, numerical-analytical method for integrating, multidimensional differential-Taylor transformations.

1. Мамон П.А., Половников В.И., Слезкинский С.К. Баллистическое обеспечение космических полетов. Л. : ВИКИ, 1990. 622 с.
2. Wertz J.R. Space mission analysis and design. Microcosm Press. 3-rd Ed. 1999. 969 p.
3. Бордовицына Т.В., Авдюшев В.А. Теория движения искусственных спутников Земли. Аналитические и численные методы. Томск : Томский гос. ун-т, 2007. 178 с.
4. Пухов Г.Е. Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов. Киев : Наук. думка, 1986. 159 с.
5. Ракушев М.Ю. Прогнозування руху космічних апаратів на основі диференціально-тейлорівських перетворень. Житомир : Видавець О.О. Євенок, 2015. 224 с. ISBN 978-617-7265-43-5.
6. Raslan K R., Biswas A., Zain F. Abu Sheer. Differential transform method for solving partial differential equations with variable coefficients. *International Journal of Physical Sciences*. 2012 **7(9)**. P. 1412–1419. http://www.academicjournals.org/IJPS.
7. Rakushev M.Yu. Numerical method of integrating the variational equations for Cauchy problem based on differential transformations. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2015. **47**, N 9. P. 63–75. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v47.i9.6.
8. Rakushev M.Yu. Prediction of spacecraft motion according to a stochastic model based on differential transformations. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2017. **49**, N 10. P. 20–35. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v49.i10.30
9. Жданюк Б. Ф. Основы статистической обработки траекторных измерений. М. : Сов. радио, 1978. 384 с.
10. Система геодезических параметров Земли «Параметры Земли 1990 года» (ПЗ-90). В.Ф. Галазин, Б.Л. Каплан, М.Г. Лебедев, В.Г. Максимов и др. М. : Координационный научно-информационный центр, 1998. 40 с.
11. Кравченко Ю.В., Ракушев М.Ю., Судніков Є.О., Ушаков І.В. Ефективність обчислювальних схем інтегрування звичайних диференціальних рівнянь на основі диференціально-тейлорівських перетворень. *Сучасні інформаційні технології у сфері безпеки та оборони*. 2014. № 2 (20). С. 65–74.

Получено 19.03.2018
После доработки 03.03.2019