УДК 517.977

И.С. Раппопорт

МЕТОД РАЗРЕШАЮЩИХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧЕ ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ТЕРМИНАЛЬНОЙ ФУНКЦИЕЙ ПЛАТЫ И ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЯ

Ключевые слова: линейная дифференциальная игра, терминальная функция платы, интегральные ограничения, многозначное отображение, измеримый селектор, стробоскопическая стратегия, групповое преследование.

Введение

Работа посвящена исследованию подхода к решению игровых задач динамики с терминальной функцией платы [1–5] и интегральными ограничениями на управления [6–10] применительно к общей схеме метода разрешающих функций [11, 12]. Рассматривается задача группового преследования в линейной дифференциальной игре с терминальной функцией платы и интегральными ограничениями на управления в случае, когда справедливо условие М.С. Никольского [6]. Предложены две схемы метода разрешающих функций, построены соответствующие стратегии группового преследования и дано сравнение гарантированных времен.

Важной особенностью общей схемы метода разрешающих функций является использование при построении управляющего воздействия информации о поведении противника в прошлом, которая необходима лишь для определения некоторого момента переключения, разделяющего активный и пассивный интервалы развития игры. На самих интервалах преследователь применяет контруправление, которое определяется стробоскопической стратегией Хайека [13]. Одним из основных результатов настоящей работы является то, что для реализации гарантированного времени окончания линейной дифференциальной игры группового преследования можно ограничиться лишь контруправлением без дополнительных условий.

Работа является развитием идей [1–12], дополняет исследования [14–32] и указывает на новые возможности применения метода разрешающих функций к решению игровых задач динамики.

Постановка задачи, общая схема метода

Рассмотрим конфликтно-управляемый процесс, эволюция которого описывается системой линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_i = A_i z_i + B_i u_i - C_i v, \ z_i \in R^{n_i}. \tag{1}$$

Здесь и в дальнейшем $i=1,\ldots,N$, R^{n_i} — евклидово n_i-мерное пространство; $u_i \in R^{m_i}$, $v \in R^k$, $n_i \geq 1$, $m_i \geq 1$, $k \geq 1$; A_i, B_i, C_i — постоянные прямоугольные матрицы порядка $n_i \times n_i$, $n_i \times m_i$, $n_i \times k$ соответственно; u_i — управляющий параметр первого игрока; v — управляющий параметр второго игрока. Параметры u_i и v выбираются в виде измеримых функций $u_i = u_i(\cdot)$ и $v = v(\cdot)$ из классов $L_p^{m_i}[0,T]$ и $L_p^k[0,T]$ соответственно, $p > 1$, $T > 0$, и удовлетворяют ограничениям

$$\int_0^T \| u_i(\tau) \|^p d\tau \leq \mu_i^p, \ \mu_i > 0, \tag{2}$$

$$\int_0^T \| v(\tau) \|^p d\tau \leq \nu^p, \ \nu > 0. \tag{3}$$

Такие управления назовем допустимыми. Символом $L_p^{m_i}[0,T]$, $p > 1$, обозначим банахово пространство измеримых по Лебегу отображений отрезка $[0,T]$ в R^{m_i}, для которых интеграл $\int_0^T \| u_i(\tau) \|^p d\tau$ конечен. Значение символа $L_p^k[0,T]$ аналогично.

Кроме процесса (1), задана терминальная функция платы $\sigma(z)$, которая определяет момент окончания игры и представляется в виде

$$\sigma(z) = \min_{i=1,\ldots,N} \sigma_i(z_i), \ z = \{z_i, \ z_i \in R^{n_i}, \ i=1,\ldots,N\}, \ \sigma_i : R^{n_i} \to R^1. \tag{4}$$

Игру группового преследования для конфликтно-управляемого процесса (1)–(4) из начального положения $z^0 = \{z_i^0, \ z_i^0 \in R^{n_i}, \ i=1,\ldots,N\}$ будем считать оконченной в момент $T = T(z^0)$, если по любой допустимой функции $v(t)$, $t \in [0,T]$, можно построить набор допустимых функций

$$u(t) = \{u_i(t), \ u_i(t) = u_i(t, z_i^0, v_t(\cdot)), \ i=1,\ldots,N\}, \ t \in [0,T], \tag{5}$$

где $v_t(\cdot) = \{v(\tau), \tau \in [0,t]\}$, или набор допустимых контруправлений

$$u(t) = \{u_i(t), \ u_i(t) = u_i(t, z_i^0, v(t)), \ i=1,\ldots,N\}, \ t \in [0,T], \tag{6}$$

такие что для абсолютно непрерывного решения задачи Коши

$$z(t) = \{z_i(t), \ \dot{z}_i = A_i z_i + B_i u_i(t) - C_i v(t), \ z_i(0) = z_i^0, \ i=1,\ldots,N\}$$

выполняется неравенство

$$\sigma(z(T)) \leq 0. \tag{7}$$

Считается, что набор допустимых управлений вида (5) реализует квазистратегию [11], а набор допустимых контруправлений [23] вида (6) является проявлением стробоскопической стратегии Хайека [13].

Предположим, что функции $\sigma_i(z_i)$ — собственные выпуклые замкнутые ограниченные снизу по z_i функции [33]. Согласно определению сопряженной функции и с учетом теоремы Фенхеля–Моро [33] имеем

$$\sigma_i(z_i)=\max_{\psi_i\in dom\sigma_i^*}[(\psi_i, z_i)-\sigma_i^*(\psi_i)],$$

где

$$\sigma_i^*(\psi_i)=\sup_{z_i\in R^{n_i}}[(\psi_i, z_i)-\sigma_i(z_i)]. \tag{8}$$

Функция $\sigma_i^*(\psi_i)$ собственная замкнутая и выпуклая [33]. Эффективное множество функции $\sigma_i^*(\psi_i)$ имеет вид $dom\sigma_i^*=\{\psi_i\in R^{n_i}:\sigma_i^*(\psi_i)<+\infty\}$. В силу ограниченности снизу собственной функции $\sigma_i(z_i)$ и соотношения (8) получим $\sigma_i^*(0)=-\inf_{z\in R^{n_i}}\sigma(z)$, а значит $0\in dom\sigma_i^*$.

Будем считать, что L_i — линейная оболочка множества $dom\sigma_i^*$ (пересечение всех линейных подпространств, которые содержат множество $dom\sigma_i^*$). Тогда она является линейным подпространством. Обозначим π_i оператор ортогонального проектирования из R^{n_i} на L_i. Справедливо соотношение $\sigma_i(z_i)=\sigma_i(\pi_i z_i)$, $z_i\in R^{n_i}$.

Рассмотрим линейные отображения $\pi_i e^{A_i t}B_i R^{m_i}\to L_i$, $\pi_i e^{A_i t}\tilde{N}_i R^{k_i}\to L_i$, $t\ge 0$, B_i — постоянная прямоугольная матрица порядка $n_i\times m_i$.

Условие 1. Уравнение $\pi_i e^{A_i t}B_i F=\pi_i e^{A_i t}C_i$ имеет решение $F=F_i(t)$, которое является непрерывной неособой матрицей при всех t, $t\ge 0$.

Рассмотрим функцию [6] $\chi_i^p(t)=\sup_{\int_0^t\|\omega(\tau)\|d\tau\le 1}\int_0^t\|F_i(t-\tau)\omega(\tau)\|^p d\tau$, где $\omega(\cdot)$ — произвольная измеримая функция из пространства $L_p^k[0,t)$ с указанным ограничением, а $F(\cdot):R^k\to R^{m_i}$ — некоторая непрерывная неособая матрица, удовлетворяющая условию 1.

С помощью функции $\chi_i^p(t)$ определим величину [6] $\mathrm{X}_i^p=\sup_{0\le t<\infty}\chi_i^p(t)$.

Условие 2. Справедливо неравенство $\hat{\gamma}_i=\mu_i^p-\upsilon^p\mathrm{X}_i^p>0$.

Пусть справедливы условия 1, 2. Рассмотрим многозначные отображения $W_i(t)=\{u_i\in R^{m_i}:\|u_i\|\le(\frac{1}{t}\hat{\gamma}_i)^{\frac{1}{p}}\}$ и обозначим $\Gamma_i(t)=\{\gamma_i(\cdot):\gamma_i(t)\in W_i(t)\}$ совокупность измеримых селекторов отображения $W_i(t)$. Если $\gamma_i(\cdot)\in\Gamma_i(t)$, то $\gamma_i(\cdot)$ — измеримая функция из класса $L_p^{m_i}[0,t]$, $p>1$, которая удовлетворяет ограничению $\int_0^T\|\gamma_i(\tau)\|^p d\tau\le\int_0^T\frac{1}{T}\hat{\gamma}_i d\tau=\hat{\gamma}_i$.

Обозначим для $(t,\tau)\in\Delta=\{(t,\tau):0\le\tau\le t<\infty\}$, $v\in R^k$

$$U_i(t,\tau,v)=\{u_i\in R^{m_i}:\|u_i\|\le(\|F_i(t-\tau)v\|^p+\tfrac{1}{t}\hat{\gamma}_i)^{\frac{1}{p}}.$$

Отображение $U_i(t,\tau,v)$ является выпуклозначным компактнозначным многозначным отображением [33].

Зафиксируем некоторый селектор $\gamma_i(\cdot)$, $\gamma_i(\cdot)\in\Gamma_i(t)$, и положим

$$\xi_i(t)=\xi_i(t, z_i^0, \gamma_i(\cdot))=\pi_i e^{tA_i} z_i^0+\int\limits_0^t \pi_i e^{(t-\tau)A_i} B_i \gamma_i(\tau)d\tau,\ (t,\tau)\in\Delta,\ z_i^0\in R^{n_i}.$$

Рассмотрим для $(t,\tau)\in\Delta$, $v\in R^k$, $z_i^0\in R^{n_i}$, многозначное отображение

$$\mathrm{A}_i(t,\tau,v,z_i^0)=\{\alpha_i\ge 0:\ \inf_{u_i\in U_i(t,\tau,v)}\ \max_{\psi_i\in dom\sigma_i^*}[(\psi_i, \pi_i e^{(t-\tau)A_i} B_i[u_i-\gamma_i(t-\tau)]-$$

$$-\pi_i e^{(t-\tau)A_i} C_i v)+\alpha_i[(\psi_i,\xi_i(t))-\sigma_i^*(\psi_i)]]\le 0\,. \tag{9}$$

Пусть справедливы условия 1, 2. Нетрудно показать, что для любого селектора $\gamma_i(\cdot)$, $\gamma_i(\cdot)\in\Gamma_i(t)$, на множестве $\Delta\times R^k$ имеет место неравенство

$$\inf_{u_i\in U_i(t,\tau,v)}\ \max_{\psi_i\in dom\sigma_i^*}[(\psi_i, \pi_i e^{(t-\tau)A_i} B_i[u_i-\gamma_i(t-\tau)]-\pi_i e^{(t-\tau)A_i} C_i v)]\le 0\,. \tag{10}$$

Поэтому, если справедливы условия 1, 2, то в силу неравенства (10) для любого селектора $\gamma_i(\cdot)$, $\gamma_i(\cdot)\in\Gamma_i(t)$, и любого начального положения $z_i^0\in R^{n_i}$ на множестве $\Delta\times R^k$ имеет место условие $0\in\mathrm{A}_i(t,\tau,v,z_i^0)$, и поэтому многозначное отображение $\mathrm{A}_i(t,\tau,v,z_i^0)$ не пусто.

Введем разрешающие функции $\alpha_i(t,\tau,v,z_i^0)\ =\ \sup\{\alpha_i:\alpha_i\in\mathrm{A}_i(t,\tau,v,z_i^0)\}$, где $(t,\tau,v)\in\Delta\times R^k$, $z_i^0\in R^{n_i}$. Отметим, что при условии $\sigma(\xi_i(t,z_i^0,\gamma_i(\cdot)))\le 0$ функции $\alpha_i(t,\tau,v,z_i^0)=+\infty$ для всех $(t,\tau,v)\in\Delta\times R^k$. Если же для некоторых $t>0$, $z_i^0\in R^{n_i}$, $\gamma_i(\cdot)\in\Gamma_i(t)$, $\sigma(\xi_i(t,z_i^0,\gamma_i(\cdot)))>0$, то разрешающие функции $\alpha_i(t,\tau,v,z_i^0)$ принимают конечные значения и равномерно по $\tau\in[0,t]$, $v\in R^k$ ограничены. Можно показать [12], что многозначные отображения $\mathrm{A}_i(t,\tau,v,z_i^0)$ являются выпуклозначными замкнутозначными $L\otimes B$-измеримыми по совокупности (τ,v), $\tau\in[0,t]$, $v\in R^k$, так что разрешающие функции $\alpha_i(t,\tau,v,z_i^0)$ являются $L\otimes B$-измеримыми по совокупности (τ,v), $\tau\in[0,t]$, $v\in R^k$. Поэтому они суперпозиционно измеримы [12], т.е. $\alpha_i(t,\tau,v(\tau),z_i^0)$ измеримы по τ, $\tau\in[0,t]$, при любой допустимой измеримой функции $v(\cdot)$, $v(\cdot)\in V[0,t]$. Здесь и всюду далее $V[0,t]=\{v(\cdot)\in L_p^k[0,t]:\int\limits_0^t\|v(\tau)\|^p d\tau\le \nu^p\}$.

Рассмотрим для некоторого начального положения $z^0=\{z_i^0,\ z_i^0\in R^{n_i}$, $i=1,\dots,N\}$ и набора селекторов $\gamma(\cdot)=\{\gamma_i(\cdot),\gamma_i(\cdot)\in\Gamma_i(t), i=1,\dots,N\}$ множество

$$T^*(z^0,\gamma(\cdot))\ =\{\,t\ge 0:\ \inf_{v(\cdot)\in V[0,t]}\ \max_{i=1,\dots,N}\int\limits_0^t\alpha_i(t,\tau,v(\tau),z_i^0)d\tau\ge 1\} \tag{11}$$

и его наименьший элемент

$$t^*(z^0,\gamma(\cdot))=\inf\{t:\ t\in T^*(z^0,\gamma(\cdot))\}.$$

Если при некоторых t, $t > 0$, $\alpha_i(t, \tau, v, z_i^0) \equiv +\infty$ для $\tau \in [0, t]$, $v \in R^k$, $z_i^0 \in R^{n_i}$, то в этом случае значение интеграла в фигурных скобках соотношения (11) естественно положить равным $+\infty$ и $t \in T^*(z^0, \gamma(\cdot))$. В случае, когда неравенство в соотношении (11) не выполняется при всех $t > 0$, положим $T^*(z^0, \gamma(\cdot)) = \varnothing$ и, соответственно, $t^*(z^0, \gamma(\cdot)) = +\infty$.

Теорема 1. Пусть справедливы условия 1, 2, функции $\sigma_i(z_i)$ являются собственными выпуклыми замкнутыми ограниченными снизу по z_i функциями и для некоторого начального положения $z^0 = \{z_i^0,\ z_i^0 \in R^{n_i}, i = 1, ..., N\}$ и набора селекторов $\gamma(\cdot) = \{\gamma_i(\cdot), \gamma_i(\cdot) \in \Gamma_i(t),\ i = 1, ..., N\}$ множество $T^*(z^0, \gamma(\cdot))$ не пусто и $T \in T^*(z^0, \gamma(\cdot))$. Тогда игру группового преследования для конфликтно-управляемого процесса (1)–(4) можно окончить в момент T с использованием управления вида (5).

Доказательство. Пусть $v(\cdot)$ — произвольное допустимое управление убегающего, для которого выполняется ограничение (3).

Рассмотрим случай $\sigma(\xi(T, z^0, \gamma(\cdot))) > 0$, $\xi(T, z^0, \gamma(\cdot)) = \{\xi_i(T, z_i^0, \gamma_i(\cdot)),\ i = = 1, ..., N\}$ и введем контрольную функцию

$$h(t) = 1 - \max_{i=1, ..., N} \int_0^t \alpha_i(T, \tau, v(\tau), z_i^0)\, d\tau,\ t \in [0, T].$$

Функции $\alpha_i(T, \tau, v, z_i^0)$ $L \otimes B$-измеримы по совокупности (τ, v), $\tau \in [0, T]$, $v \in R^k$, и поэтому они суперпозиционно измеримы, т.е. функции $\alpha_i(T, \tau, v(\tau), z_i^0)$ измеримы по τ, $\tau \in [0, T]$. По определению T имеем $h(0) = 1$,

$$h(T) = 1 - \max_{i=1, ..., N} \int_0^T \alpha_i(T, \tau, v(\tau), z_i^0) d\tau \le$$

$$\le 1 - \inf_{v(\cdot) \in V[0, T]} \max_{i=1, ..., N} \int_0^T \alpha_i(T, \tau, v(\tau), z_i^0) d\tau \le 0.$$

Поэтому в силу непрерывности функции $h(t)$ существует такой момент времени t_*, $t_* \in (0, T]$, что

$$h(t_*) = 0. \tag{12}$$

Отметим, что момент переключения t_* зависит от предыстории управления убегающего игрока $v_{t_*}(\cdot) = \{v(\tau), \tau \in [0, t_*]\}$.

Рассмотрим многозначные отображения при $v \in R^k$, $\tau \in [0, t_*]$

$$U_i^1(\tau, v) = \{u_i \in U_i(T, \tau, v) : \max_{\psi_i \in dom\sigma_i^*} [(\psi_i, \pi_i e^{(T-\tau)A_i} B_i[u_i - \gamma_i(T-\tau)] -$$

$$- \pi_i e^{(T-\tau)A_i} C_i v) + \alpha_i(T, \tau, v, z_i^0)[(\psi_i, \xi_i(t)) - \sigma_i^*(\psi_i)]] \le 0. \tag{13}$$

В силу свойств параметров процесса (1), функций $\sigma_i(z_i)$ и $\alpha_i(T, \tau, v, z_i^0)$ отображения $U_i^1(\tau, v)$ $L \otimes B$-измеримы [12] и компактнозначны при $\tau \in [0, t_*]$, $v \in R^k$.

В работе [34] впервые введено понятие лексикографического максимума по ортогональому базису $e_1, ..., e_m$ от компакта $A \in K(R^m)$ по следующей формуле:

$$\underset{e_1,\ ...,\ e_m}{lex \max} A = \bigcap_{r=0}^{m} A_r ,$$

где $A_0 = A$, $A_r = \{ x \in A_{r-1} : (x, e_r) = c(A_{r-1}, \psi) \}$, $c(A_{r-1}, \psi)$ — опорная функция множества A_{r-1} [33], $r = 1, ..., m$. Множество $\underset{e_1, ..., e_m}{lex \max} A$ состоит из одной точки, принадлежащей множеству крайних точек выпуклой оболочки множества A [35].

При этом, если взять многозначные отображения $U_i^1(\tau, v)$ и ортогональные базисы, такие что $e_1^i = \psi^i$, $\psi^i \in R^{m_i}$, $\psi^i \neq 0$, то выполняется равенство из [35]

$$(\underset{e_1, \dots, e_m}{lex \max} U_i^1(\tau, v),\ \psi_i) = c(U_i^1(\tau, v),\ \psi_i) .$$

Поэтому в силу теоремы об опорной функции [36] многозначные отображения $U_i^1(\tau, v)$ содержат $L \otimes B$-измеримые селекторы $u_i^1(\tau, v) = \underset{e_1, \dots, e_N}{lex \max} U_i^1(\tau, v)$, которые являются суперпозиционно измеримыми функциями [12] и $\left\| u_i^1(\tau, v) \right\| =$ $= (\| F_i(T-\tau)v \|^p + \frac{1}{T}\hat{\gamma}_i)^{\frac{1}{p}}$, $\tau \in [0, t_*]$, $v \in R^k$. Управление преследователей на интервале $\tau \in [0, t_*]$ положим равным

$$u_i(\tau) = u_i^1(\tau, v(\tau)) . \tag{14}$$

Из равенства (12) следует, что существует такой номер j, $1 \leq j \leq N$, что

$$1 - \int_0^{t_*} \alpha_j(T, \tau, v(\tau), z_i^0) d\tau = 0. \tag{15}$$

Рассмотрим для $v \in R^k$, $\tau \in [t_*, T]$ многозначное отображение

$$U_j^2(\tau, v) = \{ u_j \in U_j(T, \tau, v) :$$

$$\max_{\psi_i \in dom\sigma_{ji}^*} [(\psi_j, \pi_j e^{(T-\tau)A_{ji}} B_j[u_j - \gamma_j(T-\tau)] - \pi_j e^{(T-\tau)A_j} C_j v)] \leq 0 \}. \tag{16}$$

В силу свойств параметров процесса (1) на основании теоремы об обратном образе [12, 36] можно заключить, что отображение $U_j^2(\tau, v)$ $L \otimes B$-измеримо и компактнозначно при $v \in R^k$, $\tau \in [t_*, T]$. Поэтому в силу теоремы об опорной функции [36] многозначное отображение $U_j^2(\tau, v)$ содержит $L \otimes B$-измеримый селектор $u_j^2(\tau, v) = \underset{e_1, \dots, e_N}{lex \max} U_j^2(\tau, v)$. Для номера i, $i \neq j$, положим $u_i^2(\tau, v) =$ $\underset{e_1, \dots, e_N}{lex \max} U_i(T, \tau, v)$. Селекторы $u_i^2(\tau, v)$ при всех $i = 1, ..., N$ являются суперпозиционно измеримыми функциями [12], и справедливо условие $\left\| u_i^2(\tau, v) \right\| = (\| F_i(T-\tau)v \|^p + \frac{1}{T}\hat{\gamma}_i)^{\frac{1}{p}}$, $\tau \in [t_*, T]$, $v \in R^k$. Управление преследователей на интервале $[t_*, T]$ положим равным

$$u_i(\tau) = u_i^2(\tau, v(\tau)). \qquad (17)$$

Из формулы Коши для процесса (1) при выбранных управлениях номера j, $1 \le j \le N$, имеем

$$\pi_j z_j(T) \; = \; \xi_j(T, z_j^0, \gamma_j(\cdot)) \; +$$

$$+\int_0^T [\pi_j \; e^{(T-\tau)A_j} B_j[u_j(\tau) - \gamma_j(T-\tau)] - \pi_j e^{(T-\tau)A_j} C_j v(\tau)]\, d\tau. \qquad (18)$$

Принимая во внимание равенство $\sigma_j(z_j(T)) = \sigma_j(\pi_j z_j(T))$, формулу (18) и определение сопряженной функции, при выбранных управлениях получим

$$\sigma_j(z_j(T)) = \max_{\psi_i \in dom\sigma_j^*} \; [\, (\psi_j, \xi_j(T, z_j^0, \gamma_j(\cdot))) + \int_0^T [(\psi_j, \pi_j e^{(T-\tau)A_j} B_j \times$$

$$\times [u_j(\tau) - \gamma_j(T-\tau)] - \pi_j e^{(T-\tau)A_j} C_j v(\tau))] d\tau \; - \sigma_j^*(\psi_j) \;]. \qquad (19)$$

Прибавим и вычтем в квадратных скобках выражения (19) величину

$$[\, (\psi_j, \xi_j(T, z_j^0, \gamma_j(\cdot))) \; - \sigma_j^*(\psi_j) \;] \int_0^{t_*} \alpha_j(T, \tau, v(\tau), z_i^0) d\tau \, .$$

Тогда, учитывая соотношения (13)–(17), получим

$$\sigma_j(z_j(T)) = \max_{\psi_i \in dom\sigma_j^*} \; \{ [\, (\psi_j, \xi_j(T, z_j^0, \gamma_j(\cdot))) \; - \sigma_j^*(\psi_j) \;] \, h(t_*) \, +$$

$$+ \int_0^{t_*} [(\psi_j, \pi_j \; e^{(T-\tau)A_j} B_j[u_j^1(\tau) - \gamma_j(T-\tau)] - \pi_j e^{(T-\tau)A_j} C_j v(\tau)) \, +$$

$$+ \alpha_j(T, \tau, v(\tau), z_i^0) \;\; [\, (\psi_j, \xi_j(T, z_j^0, \gamma_j(\cdot)) \; - \sigma_j^*(\psi_j)]] d\tau \,] +$$

$$+ \int_{t_*}^T \; (\psi_j, \pi_j \; e^{(T-\tau)A_j} B_j[u_j^2(\tau) - \gamma_j(T-\tau)] - \pi_j e^{(T-\tau)A_j} C_j v(\tau)) d\tau \; \}.$$

Отсюда следует, что группа преследователей может гарантировать в момент T выполнение неравенства

$$\sigma(z(T)) \le \; \sigma_j(z_j(T)) \le \; \sigma_j(\xi_j(T, z_j^0, \gamma_j(\cdot))) \, h(t_*) = 0.$$

Проверим допустимость управлений $u_i(\tau)$, $\tau \in [0, T]$. По построению справедливы соотношения

$$\int_0^T \| u_i(\tau) \|^p \, d\tau = \int_0^{t_*} \left\| u_i^1(\tau) \right\|^p d\tau + \int_{t_*}^T \left\| u_i^2(\tau) \right\|^p d\tau =$$

 ISSN 0572-2691

$$= \int_0^T [\| F_i(T-\tau) \|^p + \tfrac{1}{T}\hat{\gamma}_i] d\tau \le \nu^p \mathrm{X}_i^p + \hat{\gamma}_i = \mu_i^p .$$

Для случая $\sigma(\xi(T, z^0, \gamma(\cdot))) \le 0$ существует такой номер q, $1 \le q \le N$, что $\sigma_q(\xi_q(T, z^0, \gamma(\cdot))) \le 0$. Рассмотрим для $v \in R^k$, $\tau \in [0, T]$ многозначное отображение

$$U_q^2(\tau, v) = \{ u_q \in U_q(T, \tau, v) : \max_{\psi_q \in dom \sigma_{\acute{e}}^*} [(\psi_q, \pi_q e^{(T-\tau)A_{qi}} B_q \times$$

$$\times [u_q - \gamma_q(T-\tau)] - \pi_q e^{(T-\tau)A_q} C_q v)] \le 0 \}. \tag{20}$$

В силу свойств параметров процесса (1) на основании теоремы об обратном образе [12, 36] можно заключить, что отображение $U_q^2(\tau, v)$ $L \otimes B$-измеримо и компактнозначно при $v \in R^k$, $\tau \in [0, T]$. Поэтому в силу теоремы об опорной функции [36] многозначное отображение $U_q^2(\tau, v)$ содержит $L \otimes B$-измеримый селектор $u_q^2(\tau, v) = \underset{e_1, \ldots, e_N}{lex \max} U_q^2(\tau, v)$. Для номера $i, i \ne q,$ положим $u_i^2(\tau, v) =$ $= \underset{e_1, \ldots, e_N}{lex \max} U_i\ (T, \tau, v)$. Селекторы $u_i^2(\tau, v)$ при всех $i = 1, \ldots, N$ являются суперпозиционно измеримыми функциями [12], и справедливо условие $\left\| u_i^2(\tau, v) \right\| =$ $= (\| F_i(T-\tau) v \|^p + \frac{1}{T}\hat{\gamma}_i)^{\frac{1}{p}}$, $\tau \in [0, T]$, $v \in R^k$. Управление преследователей на интервале $[0, T]$ положим равным $u_i(\tau) = u_i^2(\tau, v(\tau))$.

Тогда при выбранных управлениях с учетом соотношений (19), (20) группа преследователей может гарантировать в момент T выполнение неравенства

$$\sigma(z(T)) \le \sigma_q(z_q(T)) \le \sigma_q(\xi_q(T, z_q^0, \gamma_q(\cdot))) \le 0 .$$

Проверим допустимость управлений $u_i(\tau)$, $\tau \in [0, T]$. По построению справедливы соотношения

$$\int_0^T \| u_i(\tau) \|^p d\tau = \int_0^T [\| F_i(T-\tau) \|^p + \tfrac{1}{T}\hat{\gamma}_i] d\tau \le \nu^p \mathrm{X}_i^p + \hat{\gamma}_i = \mu_i^p .$$

Теорема доказана.

Рассмотрим для некоторого начального положения $z^0 = \{z_i^0,\ z_i^0 \in R^{n_i}$, $i = 1, \ldots, N\}$ и набора селекторов $\gamma(\cdot) = \{ \gamma_i(\cdot),\ \gamma_i(\cdot) \in \Gamma_i(t),\ i = 1, \ldots, N\}$ множество

$$T_*(z^0, \gamma(\cdot)) = \{ t \ge 0 : \max_{i=1, \ldots, N} \int_0^t \inf_{v \in R^k} \alpha_i(t, \tau, v, z_i^0) d\tau \ge 1 \} \tag{21}$$

и его наименьший элемент

$$t_*(z^0, \gamma(\cdot)) = \inf\{ t : t \in T_*(z^0, \gamma(\cdot)) \}.$$

Если при некоторых t, $t > 0$, $\inf_{v \in R^k} \alpha_i(t, \tau, v, z_i^0) \equiv +\infty$ для $\tau \in [0, t]$, $v \in R^k$, $z_i^0 \in R^{n_i}$, то в этом случае значение интеграла в фигурных скобках соотношения (21) естественно положить равным $+\infty$ и $t \in T_*(z^0, \gamma(\cdot))$. В случае, когда неравенство в соотношении (21) не выполняется при всех $t > 0$, положим $T_*(z^0, \gamma(\cdot)) = \varnothing$ и, соответственно, $t_*(z^0, \gamma(\cdot)) = +\infty$.

Следствие 1. Пусть справедливы условия 1, 2, функции $\sigma_i(z_i)$ являются собственными выпуклыми замкнутыми ограниченными снизу по z_i функциями и для некоторого начального положения $z^0 = \{z_i^0,\ z_i^0 \in R^{n_i},\ i = 1, \ldots, N\}$ и набора селекторов $\gamma(\cdot) = \{\gamma_i(\cdot),\ \gamma_i(\cdot) \in \Gamma_i(t),\ i = 1, \ldots, N\}$ множество $T_*(z^0, \gamma(\cdot))$ не пусто и $T \in T_*(z^0, \gamma(\cdot))$. Тогда $T_*(z^0, \gamma(\cdot)) \subset T^*(z^0, \gamma(\cdot))$ и игру группового преследования для конфликтно-управляемого процесса (1)–(4) можно окончить в момент T с использованием управления вида (5).

Доказательство. Имеют место следующие соотношения:

$$\inf_{v(\cdot)\in V[0,T]} \max_{i=1,\ldots,N} \int_0^T \alpha_i(T, \tau, v(\tau), z_i^0)\, d\tau \geq$$

$$\geq \max_{i=1,\ldots,N} \inf_{v(\cdot)\in V[0,T]} \int_0^T \alpha_i(T, \tau, v(\tau), z_i^0)\, d\tau \geq \max_{i=1,\ldots,N} \int_0^T \inf_{v\in R^k} \alpha_i(T, \tau, v(\tau), z_i^0)\, d\tau \geq 1.$$

Таким образом, $T_*(z^0, \gamma(\cdot)) \subset T^*(z^0, \gamma(\cdot))$ и осталось применить теорему 1.

Следствие 2. Пусть справедливы условия 1, 2, функции $\sigma_i(z_i)$ являются собственными выпуклыми замкнутыми ограниченными снизу по z_i функциями и для некоторого начального положения $z^0 = \{z_i^0,\ z_i^0 \in R^{n_i},\ i = 1, \ldots, N\}$ и набора селекторов $\gamma(\cdot) = \{\gamma_i(\cdot),\ \gamma_i(\cdot) \in \Gamma_i(t),\ i = 1, \ldots, N\}$ справедливо условие $t^*(z^0, \gamma(\cdot)) < +\infty$. Тогда, если группа преследователей использует законы управления вида (5), описанные при доказательстве теоремы 1, то для любого T, $0 < T < t^*(z^0, \gamma(\cdot))$, существует такой номер j, $1 \leq j \leq N$, что справедлива оценка

$$\sup_{v(\cdot)\in V[0,T]} \sigma(z(T)) \leq \sigma_j(\xi_j(T, z_j^0, \gamma_j(\cdot)))\left[1 - \inf_{v(\cdot)\in V[0,T]} \max_{i=1,\ldots,N} \int_0^T \alpha_i(T, \tau, v(\tau), z_i^0)\, d\tau\right].$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1, при условии что контрольную функцию следует задать в виде

$$h(t) = \inf_{v(\cdot)\in V[0,T]} \max_{i=1,\ldots,N} \int_0^T \alpha_i(T, \tau, v(\tau), z_i^0)\, d\tau - \max_{i=1,\ldots,N} \int_0^t \alpha_i(T, \tau, v(\tau), z_i^0)\, d\tau.$$

Схемы метода для класса стробоскопических стратегий

Из доказательства теоремы 1 видно, что преследователь в момент t использует информацию о $v_t(\cdot)$, причем она необходима лишь для определения момента переключения t_*, который разделяет активный и пассивный интервалы. На самих интервалах преследователь применяет контруправление, которое определяется стробоскопической стратегией. Далее показано, что для реализации гарантированного времени можно ограничиться контруправлением с переключением, момент которого не зависит от предыстории управления. Затем продемонстрировано, что для реализации гарантированного времени можно ограничиться контруправлением без переключения.

Теорема 2. Пусть справедливы условия 1, 2, функции $\sigma_i(z_i)$ являются собственными выпуклыми замкнутыми ограниченными снизу по z_i функциями и для некоторого начального положения $z^0 = \{z_i^0,\ z_i^0 \in R^{n_i},\ i = 1, ..., N\}$ и набора селекторов $\gamma(\cdot) = \{\gamma_i(\cdot),\ \gamma_i(\cdot) \in \Gamma_i(t),\ i = 1, ..., N\}$ множество $T_*(z^0, \gamma(\cdot))$ не пусто и $T \in T_*(z^0, \gamma(\cdot))$. Тогда игру группового преследования для конфликтно-управляемого процесса (1)–(4) можно окончить в момент T с использованием контруправления вида (6) с переключением, момент которого не зависит от предыстории управления.

Доказательство. Пусть $v(\cdot)$ — произвольное допустимое управление убегающего, для которого выполняется ограничение (3).

Рассмотрим случай $\sigma(\xi(T, z^0, \gamma(\cdot))) > 0,\ \xi(T, z^0, \gamma(\cdot)) = \{\xi_i(T, z_i^0, \gamma_i(\cdot)), i = 1, ...$ $..., N\}$ и введем контрольную функцию

$$h(t) = 1 - \max_{i=1,...,N} \int_0^t \inf_{v \in R^k} \alpha_i(T, \tau, v, z_i^0) d\tau,\ t \in [0, T].$$

Функции $\inf\limits_{v \in R^k} \alpha_i(T, \tau, v, z_i^0)$ L-измеримы по τ, $\tau \in [0, T]$ [10]. По определению T имеем

$$h(0) = 1,\ h(T) = 1 - \max_{i=1,...,N} \int_0^T \inf_{v \in R^k} \alpha_i(T, \tau, v, z_i^0) d\tau \le 0.$$

Поэтому в силу непрерывности функции $h(t)$ существует такой момент времени t_*, $t_* \in (0, T]$, что

$$h(t_*) = 0. \tag{22}$$

Отметим, что момент переключения t_* не зависит от предыстории управления убегающего игрока $v_{t_*}(\cdot) = \{v(\tau), \tau \in [0, t_*]\}$.

Выпуклозначные отображения $\mathrm{A}_i(T, \tau, v, z_i^0)$ можно записать в виде $\mathrm{A}_i(T, \tau, v, z_i^0) = [0, \alpha_i(T, \tau, v, z_i^0)]$. Поскольку $0 \le \inf\limits_{v \in R^k} \alpha_i(T, \tau, v, z_i^0) \le \alpha_i(T, \tau, v, z_i^0)$, справедливо условие $\inf\limits_{v \in R^k} \alpha_i(T, \tau, v, z_i^0) \in \mathrm{A}_i(T, \tau, v, z_i^0)$, $\tau \in [0, T]$, $v \in R^k$.

Рассмотрим многозначные отображения при $v \in R^k$, $\tau \in [0, t_*]$,

$$U_i^1(\tau, v) = \{ u_i \in U_i(T, \tau, v) : \max_{\psi_i \in dom \sigma_i^*} [(\psi_i, \pi_i e^{(T-\tau)A_i} B_i [u_i - \gamma_i(T - \tau)] -$$

$$- \pi_i e^{(T-\tau)A_i} C_i v) + \inf_{v \in R^k} \alpha_i(T, \tau, v, z_i^0) [(\psi_i, \xi_i(t)) - \sigma_i^*(\psi_i)]] \le 0. \tag{23}$$

В силу свойств параметров процесса (1), функций $\sigma_i(z_i)$ и $\inf\limits_{v \in R^k} \alpha_i(T, \tau, v, z_i^0)$ отображения $U_i^1(\tau, v)$ $L \otimes B$-измеримы [12] и компактнозначны при $\tau \in [0, t_*]$, $v \in R^k$. Поэтому в силу теоремы об опорной функции [36] многозначные отображения $U_i^1(\tau, v)$ содержат $L \otimes B$-измеримые селекторы $u_i^1(\tau, v) = lex \max\limits_{e_1, \ldots, e_N} U_i^1(\tau, v)$, которые являются суперпозиционно измеримыми функциями [12] и $\left\| u_i^1(\tau, v) \right\| = (\left\| F_i(T - \tau)v \right\|^p + \frac{1}{T} \hat{\gamma}_i)^{\frac{1}{p}}$, $\tau \in [0, t_*]$, $v \in R^k$. Управление преследователей на интервале $\tau \in [0, t_*]$ положим равным

$$u_i(\tau) = u_i^1(\tau, v(\tau)). \tag{24}$$

Из равенства (22) следует, что существует такой номер j, $1 \le j \le N$, что

$$1 - \int_0^{t_*} \inf_{v \in R^k} \alpha_j(T, \tau, v, z_j^0) d\tau = 0. \tag{25}$$

Рассмотрим для $v \in R^k$, $\tau \in [t_*, T]$ многозначное отображение

$$U_j^2(\tau, v) = \{ u_j \in U_j(T, \tau, v):$$

$$\max_{\psi_j \in dom\sigma_j^*} [(\psi_j, \pi_j e^{(T-\tau)A_{ji}} B_j [u_j - \gamma_j (T - \tau)] - \pi_j e^{(T-\tau)A_j} C_j v)] \le 0 \}. \tag{26}$$

В силу свойств параметров процесса (1) на основании теоремы об обратном образе [12, 36] можно заключить, что отображение $U_j^2(\tau, v)$ $L \otimes B$-измеримо и компактнозначно при $v \in R^k$, $\tau \in [t_*, T]$. Поэтому в силу теоремы об опорной функции [36] многозначное отображение $U_j^2(\tau, v)$ содержит $L \otimes B$-измеримый селектор $u_j^2(\tau, v) = lex \max\limits_{e_1, \ldots, e_N} U_j^2(\tau, v)$. Для номера $i, i \ne j$, положим $u_i^2(\tau, v) = $ $= lex \max\limits_{e_1, \ldots, e_N} U_i(T, \tau, v)$. Селекторы $u_i^2(\tau, v)$ при всех $i = 1, \ldots, N$ являются суперпозиционно измеримыми функциями [12], и справедливо условие $\left\| u_i^2(\tau, v) \right\| =$ $= (\left\| F_i(T - \tau)v \right\|^p + \frac{1}{T} \hat{\gamma}_i)^{\frac{1}{p}}$, $\tau \in [t_*, T]$, $v \in R^k$. Управление преследователей на интервале $[t_*, T]$ положим равным

$$u_i(\tau) = u_i^2(\tau, v(\tau)). \tag{27}$$

Принимая во внимание равенство $\sigma_j(z_j(T)) = \sigma_j(\pi_j z_j(T))$, формулу (18) при выбранных управлениях и определение сопряженной функции, имеем

$$\sigma_j(z_j(T)) = \max_{\psi_j \in dom\sigma_j^*} [(\psi_j, \xi_j(T, z_j^0, \gamma_j(\cdot))) +$$

$$+ \int_0^T [(\psi_j, \pi_j\ e^{(T-\tau)A_j} B_j [u_j(\tau) - \gamma_j(T - \tau)] - \pi_j e^{(T-\tau)A_j} C_j v(\tau))] d\tau - \sigma_j^*(\psi_j)]. \tag{28}$$

Прибавим и вычтем в квадратных скобках выражения (28) величину

 ISSN 0572-2691

$$[(\psi_j, \xi_j(T, z_j^0, \gamma_j(\cdot))) - \sigma_j^*(\psi_j)] \int_0^{t_*} \inf_{v \in R^k} \alpha_j(T, \tau, v, z_j^0) d\tau .$$

Тогда, учитывая соотношения (23)–(27), получим

$$\sigma_j(z_j(T)) = \max_{\psi_j \in dom\sigma_j^*} \{[(\psi_j, \xi_j(T, z_j^0, \gamma_j(\cdot))) - \sigma_j^*(\psi_j)] h(t_*) +$$

$$+ \int_0^{t_*} [(\psi_j, \pi_j \; e^{(T-\tau)A_j} B_j [u_j^1(\tau) - \gamma_j(T-\tau)] - \pi_j e^{(T-\tau)A_j} C_j v(\tau)) +$$

$$+ \inf_{v \in R^k} \alpha_j(T, \tau, v, z_j^0) [(\psi_j, \xi_j(T, z_j^0, \gamma_j(\cdot)) - \sigma_j^*(\psi_j)]] d\tau] +$$

$$+ \int_{t_*}^{T} (\psi_j, \pi_j \; e^{(T-\tau)A_j} B_j [u_j^2(\tau) - \gamma_j(T-\tau)] - \pi_j e^{(T-\tau)A_j} C_j v(\tau)) d\tau \}.$$

Отсюда следует, что группа преследователей может гарантировать в момент T выполнение неравенства

$$\sigma(z(T)) \le \sigma_j(z_j(T)) \le \sigma_j(\xi_j(T, z_j^0, \gamma_j(\cdot))) h(t_*) = 0.$$

Проверим допустимость управлений $u_i(\tau)$, $\tau \in [0, T]$. По построению справедливы соотношения

$$\int_0^T \| u_i(\tau) \|^p d\tau = \int_0^{t_*} \left\| u_i^1(\tau) \right\|^p d\tau + \int_{t_*}^{T} \left\| u_i^2(\tau) \right\|^p d\tau =$$

$$= \int_0^T [\| F_i(T-\tau) \|^p + \tfrac{1}{T} \hat{\gamma}_i] d\tau \le \nu^p \mathrm{X}_i^p + \hat{\gamma}_i = \mu_i^p .$$

Случай $\sigma(\xi(T, z^0, \gamma(\cdot))) \le 0$ можно рассмотреть так же, как в теореме 1.

Теорема доказана.

Обозначим $\delta(t, \tau, z) = \inf_{v \in R^k} \max_{i=1,\ldots,N} \alpha_i(t, \tau, v, z_i)$, $\tau \in [0, t]$, $z = \{z_i, \quad z_i \in R^{n_i}$, $i = 1, \ldots, N\}$.

Лемма. Функция $\delta(t, \tau, z) = \inf_{v \in R^k} \max_{i=1,\ldots,N} \alpha_i(t, \tau, v, z_i)$, $\tau \in [0, t]$, является измеримой по τ, при каждом t, $t > 0$, функцией.

Доказательство. Рассмотрим для каждого $\varepsilon \in R^1$ и $\tau \in [0, t]$ многозначное отображение $G_\varepsilon(\tau) = \{ v \in R^k : \max_{i=1,\ldots,N} \alpha_i(t, \tau, v, z_i) < \varepsilon \}$, которое имеет открытые значения в силу полунепрерывности сверху по $v \in R^k$ функции $\max_{i=1,\ldots,N} \alpha_i(t, \tau, v, z_i)$ при любом $\tau \in [0, t]$. График этого отображения $grG_\varepsilon(t) = \{ (\tau, v) : v \in G_\varepsilon(\tau), \quad \tau \in [0, t] \}$, будет $L \otimes B$-измерим по совокупности (τ, v), $v \in G_\varepsilon(\tau)$, $\tau \in [0, t]$, для любого t, поскольку функция $\max_{i=1,\ldots,N} \alpha_i(t, \tau, v, z_i)$

$L \otimes B$-измерима по совокупности (τ, v) [12]. Тогда по теореме об измеримости проекции [36] множество $\{ \tau \in [0, t] : (\tau, v) \in grG_\varepsilon(t)$ для некоторого $v \in G_\varepsilon(\tau) \}$ будет L-измеримо.

Пусть Q — счетное плотное множество в R^k [36]. Для любого $\varepsilon \in R^1$ имеем

$$\{ \tau \in [0, t] : \inf_{v \in R^k} \max_{i=1, \ldots, N} \alpha_i(t, \tau, v, z_i) < \varepsilon \} = \{ \tau \in [0, t] : G_\varepsilon(\tau) \neq \varnothing \} =$$

$$= \{ \tau \in [0, t] : (\tau, v) \in grG_\varepsilon(t) \text{ для некоторого } v \in G_\varepsilon(\tau) \} =$$

$$= \{ \tau \in [0, t] : (\tau, q) \in grG_\varepsilon(t) \text{ для некоторого } q \in G_\varepsilon(\tau) \bigcap Q \} =$$

$$= \bigcup_{q \in G_\varepsilon(\tau) \bigcap Q} \{ \tau \in [0, t] : (\tau, q) \in grG_\varepsilon(t) .$$

Но, как отмечалось выше, множество $\{ \tau \in [0, t] : (\tau, q) \in grG_\varepsilon(t)$ для некоторого $q \in G_\varepsilon(\tau) \bigcap Q \}$ измеримо, и поэтому функция $\delta(t, \tau, z) = = \inf\limits_{v \in R^k} \max\limits_{i=1, \ldots, N} \alpha_i(t, \tau, v, z_i)$ является измеримой по τ, $\tau \in [0, t]$.

Рассмотрим для некоторого начального положения $z^0 = \{z_i^0, \ z_i^0 \in R^{n_i}, \ i = 1, \ldots, N\}$ и набора селекторов $\gamma(\cdot) = \{ \gamma_i(\cdot), \gamma_i(\cdot) \in \Gamma_i(t), i = 1, \ldots, N\}$ множество

$$T_N(z^0, \gamma(\cdot)) = \{ t \geq 0 : \int_0^t \delta(t, \tau, z^0) d\tau \geq N \} \tag{29}$$

и его наименьший элемент

$$t_N(z^0, \gamma(\cdot)) = \inf\{t : t \in T_N(z^0, \gamma(\cdot)) \}.$$

Если для $\tau \in [0, t]$ и $z^0 = \{z_i^0, \ \ z_i^0 \in R^{n_i}, \ i = 1, \ldots, N\}$, $\delta(t, \tau, z^0) \equiv +\infty$, то в этом случае значение интеграла в фигурных скобках соотношения (29) естественно положить равным $+\infty$ и $t \in T_N(z^0, \gamma(\cdot))$. В случае, когда неравенство в соотношении (29) не выполняется при всех $t > 0$, положим $T_N(z^0, \gamma(\cdot)) = \varnothing$ и, соответственно, $t_N(z^0, \gamma(\cdot)) = +\infty$.

Следствие 3. Пусть справедливы условия 1, 2, функции $\sigma_i(z_i)$ являются собственными выпуклыми замкнутыми ограниченными снизу по z_i функциями и для некоторого начального положения $z^0 = \{z_i^0, \ z_i^0 \in R^{n_i}, \ i = 1, \ldots, N\}$ и набора селекторов $\gamma(\cdot) = \{ \gamma_i(\cdot), \ \gamma_i(\cdot) \in \Gamma_i(t), \ i = 1, \ldots, N\}$ множество $T_N(z^0, \gamma(\cdot))$ не пусто и $T \in T_N(z^0, \gamma(\cdot))$. Тогда $T_N(z^0, \ \gamma(\cdot)) \subset T_*(z^0, \gamma(\cdot))$ и игру группового преследования для конфликтно-управляемого процесса (1)–(4) можно окончить в момент T с использованием контруправления вида (6) с переключением, момент которого не зависит от предыстории управления.

Доказательство. Имеют место следующие соотношения:

$$\max_{i=1, \ldots, N} \int_0^T \inf_{v \in R^k} \alpha_i(T, \tau, v, z_i^0) d\tau \geq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int_0^T \inf_{v \in R^k} \alpha_i(T, \tau, v, z_i^0) d\tau =$$

 ISSN 0572-2691

$$= \frac{1}{N} \int_0^T \sum_{i=1}^N \inf_{v \in R^k} \alpha_i(T, \tau, v, z_i^0) d\tau \geq \frac{1}{N} \int_0^T \delta(T, \tau, z^0) d\tau \geq 1.$$

Таким образом, $T_N(z^0, \gamma(\cdot)) \subset T_*(z^0, \gamma(\cdot))$ и осталось применить теорему 2.

Следствие 4. Пусть справедливы условия 1, 2, функции $\sigma_i(z_i)$ являются собственными выпуклыми замкнутыми ограниченными снизу по z_i функциями и для некоторого начального положения $z^0 = \{z_i^0,\ z_i^0 \in R^{n_i},\ \ i = 1, ..., N\}$ и набора селекторов $\gamma(\cdot) = \{\gamma_i(\cdot),\ \gamma_i(\cdot) \in \Gamma_i(t),\ i = 1, ..., N\}$ справедливо условие $t_*(z^0, \gamma(\cdot)) < +\infty$. Тогда, если группа преследователей использует законы управления вида (6), описанные при доказательстве теоремы 2, то для любого T, $0 < T < t_*(z^0, \gamma(\cdot))$, существует такой номер j, $1 \leq j \leq N$, что справедлива оценка

$$\sup_{v(\cdot) \in V[0, T]} \sigma(z(T)) \leq \sigma_j(\xi_j(T, z_j^0, \gamma_j(\cdot))) \, [1 - \max_{i=1, ..., N} \int_0^T \inf_{v \in R^k} \alpha_i(T, \tau, v, z_i^0) d\tau].$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2, при условии что контрольную функцию следует задать в виде

$$h(t) = \max_{i=1, ..., N} \int_0^T \inf_{v \in R^k} \alpha_i(T, \tau, v, z_i^0) d\tau] - \max_{i=1, ..., N} \int_0^t \inf_{v \in R^k} \alpha_i(T, \tau, v, z_i^0) d\tau.$$

Теорема 3. Пусть справедливы условия 1, 2, функции $\sigma_i(z_i)$ являются собственными выпуклыми замкнутыми ограниченными снизу по z_i функциями и для некоторого начального положения $z^0 = \{z_i^0,\ z_i^0 \in R^{n_i},\ i = 1, ..., N\}$ и набора селекторов $\gamma(\cdot) = \{\gamma_i(\cdot),\ \gamma_i(\cdot) \in \Gamma_i(t),\ i = 1, ..., N\}$ множество $T_*(z^0, \gamma(\cdot))$ не пусто и $T \in T_*(z^0, \gamma(\cdot))$. Тогда игру группового преследования для конфликтно-управляемого процесса (1)–(4) можно окончить в момент T с использованием контруправления вида (6) без переключения.

Доказательство. Пусть $v(\cdot)$ — произвольное допустимое управление убегающего, для которого выполняется ограничение (3).

Рассмотрим случай $\sigma(\xi(T, z^0, \gamma(\cdot))) > 0$, $\xi(T, z^0, \gamma(\cdot)) = \{\xi_i(T, z_i^0, \gamma_i(\cdot)),\ i = 1, ..., N\}$.

Положим для $\tau \in [0, T]$

$$\alpha(T, z^0) = \max_{i=1, ..., N} \int_0^T \inf_{v \in R^k} \alpha_i(T, \tau, v, z_i^0) d\tau,$$

$$\alpha_i(T, \tau, z_i^0) = \frac{1}{\alpha(T, z^0)} \inf_{v \in R^k} \alpha_i(T, \tau, v, z_i^0).$$

Для $i = 1, ..., N$ рассмотрим интегралы $\int_0^T \alpha_i(T, \tau, z_i^0) d\tau$. Тогда по построению существует номер j, $1 \leq j \leq N$, такой что $\int_0^T \alpha_j(T, \tau, z_j^0) d\tau = 1$. Поскольку $\alpha(T, z^0) \geq 1$, то $\alpha_j(T, \tau, z_j^0) \leq \inf_{v \in R^k} \alpha_j(T, \tau, v, z_j^0) \leq \alpha_j(T, \tau, v, z_j^0)$, $\tau \in [0, T]$, $v \in R^k$.

Таким образом, в силу выпуклозначности множества $\mathrm{A}_j(t, \tau, v, z_j^0)$ имеем $\alpha_j(T, \tau, z_j^0) \in \mathrm{A}_j(t, \tau, v, z_j^0)$, $\tau \in [0, T]$, $v \in R^k$.

Рассмотрим многозначное отображение при $v \in R^k$, $\tau \in [0, T]$,

$$U_j(\tau, v) = \{ u_j \in U_j(T, \tau, v) : \max_{\psi_{ji} \in dom \sigma_j^*} [(\psi_j, \pi_j e^{(T-\tau)A_j} B_j [u_j - \gamma_j (T-\tau)] -$$

$$- \pi_j e^{(T-\tau)A_j} C_j v) + \alpha_j (T, \tau, z_j^0) [(\psi_j, \xi_j(t)) - \sigma_j^*(\psi_j)]] \leq 0. \tag{30}$$

В силу свойств параметров процесса (1), функций $\sigma_j(z_j)$ и $\alpha_j(T, \tau, z_j^0)$ отображение $U_j(\tau, v)$ $L \otimes B$-измеримо [12] и компактнозначно при $\tau \in [0, T]$, $v \in R^k$. Поэтому в силу теоремы об опорной функции [36] многозначное отображение $U_j(\tau, v)$ содержит $L \otimes B$-измеримый селектор $u_j(\tau, v) = \underset{e_1, \ldots, e_N}{lex \max} U_j(\tau, v)$. Для номера $i, i \neq j$, положим $u_i(\tau, v) = \underset{e_1, \ldots, e_N}{lex \max} U_i(T, \tau, v)$. Селекторы $u_i(\tau, v)$ при всех $i = 1, \ldots, N$ являются суперпозиционно измеримыми функциями [12], и справедливо условие $\left\| u_i(\tau, v) \right\| = (\| F_i(T-\tau) v \|^p + \frac{1}{T} \hat{\gamma}_i)^{\frac{1}{p}}$, $\tau \in [0, T]$, $v \in R^k$. Управление преследователей на интервале $\tau \in [0, T]$ положим равным

$$u_i(\tau) = u_i(\tau, v(\tau)). \tag{31}$$

Принимая во внимание равенство $\sigma_j(z_j(T)) = \sigma_j(\pi_j z_j(T))$, формулу (18) при выбранных управлениях и определение сопряженной функции, имеем

$$\sigma_j(z_j(T)) = \max_{\psi_{ji} \in dom \sigma_j^*} [(\psi_j, \xi_j(T, z_j^0, \gamma_j(\cdot))) +$$

$$+ \int_0^T [(\psi_j, \pi_j e^{(T-\tau)A_j} B_j [u_j(\tau) - \gamma_j(T-\tau)] - \pi_j e^{(T-\tau)A_j} C_j v(\tau))] d\tau - \sigma_j^*(\psi_j)]. \tag{32}$$

Прибавим и вычтем в квадратных скобках выражения (32) величину

$$[(\psi_j, \xi_j(T, z_j^0, \gamma_j(\cdot))) - \sigma_j^*(\psi_j)] \int_0^T \alpha_j(T, \tau, z_j^0) d\tau.$$

Тогда, учитывая соотношения (30), (31), получим

$$\sigma_j(z_j(T)) = \max_{\psi_{ji} \in dom \sigma_j^*} \{[(\psi_j, \xi_j(T, z_j^0, \gamma_j(\cdot))) - \sigma_j^*(\psi_j)] (1 - \int_0^T \alpha_j(T, \tau, z_j^0) d\tau) +$$

$$+ \int_0^T [(\psi_j, \pi_j e^{(T-\tau)A_j} B_j [u_j(\tau) - \gamma_j(T-\tau)] - \pi_j e^{(T-\tau)A_j} C_j v(\tau)) +$$

$$+ \alpha_j(T, \tau, z_j^0) [(\psi_j, \xi_j(T, z_j^0, \gamma_j(\cdot)) - \sigma_j^*(\psi_j)]] d\tau]\}.$$

ISSN 0572-2691

Отсюда следует, что группа преследователей может гарантировать в момент T выполнение неравенства

$$\sigma(z(T)) \le \sigma_j(z_j(T)) \le \sigma_j(\xi_j(T, z_j^0, \gamma_j(\cdot)))\,(1 - \int_0^T \alpha_j(T, \tau, z_j^0)d\tau) = 0.$$

Проверим допустимость управлений $u_i(\tau)$, $i = 1, ..., N$, $\tau \in [0, T]$. По построению справедливы соотношения

$$\int_0^T \| u_i(\tau) \|^p d\tau = \int_0^T [\| F_i(T-\tau) \|^p + \tfrac{1}{T}\hat{\gamma}_i] d\tau \le \nu^p X_i^p + \hat{\gamma}_i = \mu_i^p .$$

Случай $\sigma(\xi(T, z^0, \gamma(\cdot))) \le 0$ можно рассмотреть так же, как в теореме 1.

Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть справедливы условия 1, 2, функции $\sigma_i(z_i)$ являются собственными выпуклыми замкнутыми ограниченными снизу по z_i функциями и для некоторого начального положения $z^0 = \{z_i^0,\ z_i^0 \in R^{n_i},\ i = 1, ..., N\}$ и набора селекторов $\gamma(\cdot) = \{\gamma_i(\cdot),\ \gamma_i(\cdot) \in \Gamma_i(t),\ i = 1, ..., N\}$ множество $T_N(z^0, \gamma(\cdot))$ не пусто. Тогда имеют место следующие включения $T_N(z^0, \gamma(\cdot)) \subset T_*(z^0, \gamma(\cdot)) \subset T^*(z^0, \gamma(\cdot))$ и неравенства $t_N(z^0, \gamma(\cdot)) \ge t_*(z^0, \gamma(\cdot)) \ge t^*(z^0, \gamma(\cdot))$.

Доказательство непосредственно следует из соответствующих определений и теорем.

Заключение

В работе рассматриваются линейные дифференциальные игры группового преследования с терминальной функцией платы и интегральными ограничениями на управления. Сформулированы достаточные условия окончания игры за конечное гарантированное время в случае, когда справедливо условие М.С. Никольского [6]. Предложена модифицированная схема метода разрешающих функций, которая обеспечивает окончание игры за определенное гарантированное время в классе стробоскопических стратегий Хайека [13]. Показано, что без дополнительных предположений это время совпадает с гарантированным временем в классе квазистратегий. Дано сравнение гарантированных времен.

Й.С. Раппопорт

МЕТОД РОЗВ’ЯЗУВАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ В ЗАДАЧІ ГРУПОВОГО ПЕРЕСЛІДУВАННЯ З ТЕРМІНАЛЬНОЮ ФУНКЦІЄЮ ПЛАТИ ТА ІНТЕГРАЛЬНИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ НА КЕРУВАННЯ

Запропоновано метод вирішення ігрових завдань динаміки з термінальною функцією плати і інтегральними обмеженнями на керування, який полягає в систематичному використанні ідей Фенхеля–Моро стосовно загальної схеми методу розв’язувальних функцій. Сутність запропонованого методу в тому, що розв’язувальну функцію вдається виразити через спряжену до функції плати і, використовуючи інволютивність оператора сполучення для опуклої замкнутої функції, отримати гарантовану оцінку термінального значення функції плати, яку представлено через значення плати в початковий момент і інтеграл від розв'язувальної функції. Головною особливістю методу є накопичувальний принцип, який використовується в поточному підсумовуванні розв'язувальної функції для оцінки якості гри аж до досягнення деякого порогового значення. Розглянуто лінійні диференціальні ігри групового переслідування з термінальною функцією плати та інтегральними обмеженнями на керування. Сформульовано достатні умови закінчення гри за кінцевий гарантований час у класі квазістратегій. Запропоновано дві схеми методу розв'язувальних функцій, що забезпечують без додаткових припущень завершення гри за кінцевий гарантований час у класі стробоскопічних стратегій. Показано результати порівняння гарантованих часів різних схем методу розв'язувальних функцій.

Ключові слова: лінійна диференціальна гра, термінальна функція плати, інтегральні обмеження, багатозначне відображення, вимірний селектор, стробоскопічна стратегія, групове переслідування.

J.S. Rappoport

METHOD OF RESOLVING FUNCTIONS IN THE GROUP PURSUIT PROBLEM WITH A TERMINAL PAY OFF FUNCTION AND INTEGRAL CONSTRAINTS ON CONTROLS

A method is proposed for solving game dynamics problems with a terminal pay off function and integral constraints on controls, which consists in systematically using the ideas of Fenhel-Moreau in relation to the general scheme of the method of resolving functions. The essence of the proposed method lies in the fact that the resolving function can be expressed through the function conjugate to the pay off function and, using the involute of the conjugation operator for a convex closed function, to obtain a guaranteed estimate of the terminal value of the pay off function, which is represented through the paying off value at the initial time and the integral of the resolving function. The main feature of the method is the cumulative principle, which is used in the current summation of the resolving function for assessing the quality of the game until a certain threshold value is reached. The paper considers linear differential games of group pursuit with a terminal pay off function and integral constraints on controls. Sufficient conditions for termination of the game for a finite guaranteed time in the class of quasi-strategies are formulated. Two schemes of the method of resolving functions are proposed that ensure without additional assumptions the completion of the game for the final guaranteed time in the class of stroboscopic strategies. The guaranteed times for various schemes of the resolving-functions method are compared.

Keywords: linear differential game, terminal pay off function, integral constraints, multivalued mapping, measurable selector, stroboscopic strategy, group approach.

1. Раппопорт И.С., Чикрий А.А. О гарантированном результате в дифференциальной игре с терминальной функцией платы. *Прикладная математика и механика.* 1995. **59**, № 5. С. 714–720.
2. Раппопорт И.С., Чикрий А.А. Гарантированный результат в дифференциальной игре группового преследования с терминальной функцией платы. *Прикладная математика и механика*. 1997. **61**, № 4. С. 584–594.
3. Раппопорт И.С. Метод разрешающих функций в теории конфликтно-управляемых процессов с терминальной функцией платы. «*Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики»*. 2016. № 3. С. 49–58.
4. Раппопорт И.С. О стробоскопической стратегии в методе разрешающих функций для игровых задач управления с терминальной функцией платы. *Кибернетика и системный анализ.* 2016. **52**, № 4. С. 90–102.
5. Раппопорт И.С. Достаточные условия гарантированного результата в дифференциальной игре с терминальной функцией платы. «*Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики»*. 2018. № 1. С. 72–84.

6. Никольский М.С. Прямой метод в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями. *Управляемые системы.* 1969. Вып. 2. С. 49–59.
7. Чикрий А.А., Безмагорычный В.В. Метод разрешающих функций в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями. *Автоматика*. 1993. № 4. С. 26–36.
8. Чикрий А.А., Белоусов А.А. О линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями сближения. *Тр. ИММ УрО РАН*. 2009. **15**, № 4. С. 290–301.
9. Саматов Б.Т. О задачах группового преследования при интегральных ограничениях на управления. I. *Кибернетика и системный анализ*. 2013. **49**, № 5. С. 132–145.
10. Раппопорт И.С. Метод разрешающих функций для игровых задач управления с интегральными ограничениями. *Кибернетика и системный анализ.* 2018. **54**, № 5. С. 109–127.
11. Chikrii A.A. Conflict controlled processes. Dordrecht; Boston; London: Springer Science and Business Media, 2013. 424 p.
12. Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Метод разрешающих функций в теории конфликтно-управляемых процессов. *Кибернетика и системный анализ.* 2012. **48**, № 4. С. 40–64.
13. Hajek O. Pursuit Games. New York: Academic Press, 1975. **12.** 266 p.
14. Пшеничный Б.Н. Простое преследование несколькими объектами. *Кибернетика.* 1976. № 3. С. 145–146.
15. Пшеничный Б.Н., Раппопорт И.С. Об одной задаче группового преследования. *Кибернетика*. 1979. № 6. С. 145–146.
16. Пшеничный Б.Н., Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Эффективный метод решения дифференциальных игр со многими преследователями. *Докл. АН СССР*. 1981. **256**, № 3. С. 530–535.
17. Пшеничный Б.Н., Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Преследование несколькими управляемыми объектами при наличии фазовых ограничений. *Докл. АН СССР*. 1981. **259**, № 4. С. 785–788.
18. Пшеничный Б.Н., Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Групповое преследование в дифференциальных играх. *Techische Hochschul Leipzig, Wissenshaftliche Zeitschriff*. 1982. № 1. С. 13–27.
19. Раппопорт И.С. Стратегии группового сближения в методе разрешающих функций для квазилинейных конфликтно-управляемых процессов. *Кибернетика и системный анализ.* 2019. **55**, № 1. С. 149–163.
20. Пилипенко Ю.В., Чикрий А.А. Колебательные кофликтно-управляемые процессы. *Прикл. математика и механика*. 1993. **57**, № 3. С. 3–14.
21. Chikrii A.A., Eidelman S.D. Game problems for fractional quasilinear systems. *Int. J. Computers and Mathematics with Applications*. 2002. **44**, N 7. P. 835–852.
22. Chikrii A.A., Chikrii G.T. Matrix resolving functions in game problems of dynamics. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.* 2015. **291**. P. 56–65.
23. Никольский М.С. Первый прямой метод Л.С. Понтрягина в дифференциальных играх. М. : Изд-во МГУ, 1984. 65 с.
24. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М. : Изд-во МГУ, 1990. 198 с.
25. Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В. Дифференциальные игры. Киев. : Наук. думка, 1992. 260 с.
26. Pittsyk M.V., Chikrii A.A. On group pursuit problem. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* 1982. **46**, N 5. P. 584–589.
27. Chikrii A.A. Game dynamic problems for systems with fractional derivatives. *Pareto optimality, Game Theory and Equilibria, Springer Optimization and its Applications.* 2008. **17**. P. 349–387.
28. Chikrii A.A. Multivalued mappings and their selections in game control problems. *Journal of Automation and Information Sciences.* 1995. **27**, N 1. P. 27–38.
29. Chikrii A.A. An analytical method in dynamic pursuit games. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.* 2010. **271**. P. 69–85.
30. Chikrii A.A., Kalashnikova S.F. Pursuit of a group of evaders by a single controlled object. *Cybernetics.* 1987. **23**, N 4. P. 437–445.
31. Чикрий А.А., Эйдельман С.Д. Обобщенные матричные функции Миттаг–Леффлера в игровых задачах для эволюционных уравнений дробного порядка. *Кибернетика и системный анализ.* 2000. **36**, № 3. С. 3–32.
32. Analytical method for solution of the game problem of soft landing for moving object. J. Albus, A. Meystel, A.A. Chikrii, A.A. Belousov, A.J. Kozlov. *Cybernetics and Systems Analisis.* 2001. **37**, N 1. P. 75–91.
33. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М. : Мир, 1973. 470 с.
34. Филиппов А.Ф.. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования. *Вестн. МГУ. Сер. математика, механика, астрономия, физика, химия.* 1959. № 2. С. 25–32.
35. Половинкин Е.С. Элементы теории многозначных отображений. М. : Изд-во МФТИ, 1982. 127 с.
36. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-valued analysis. Boston; Basel; Berlin : Birkhauser. 1990. 461 p.

Получено 10.01.2019